

Sala 5

Gab. —

Est. 56

Tab. 19

N.º 55

Sala 5
Gab. —
Est. 55
Tab. 19
N.º 55

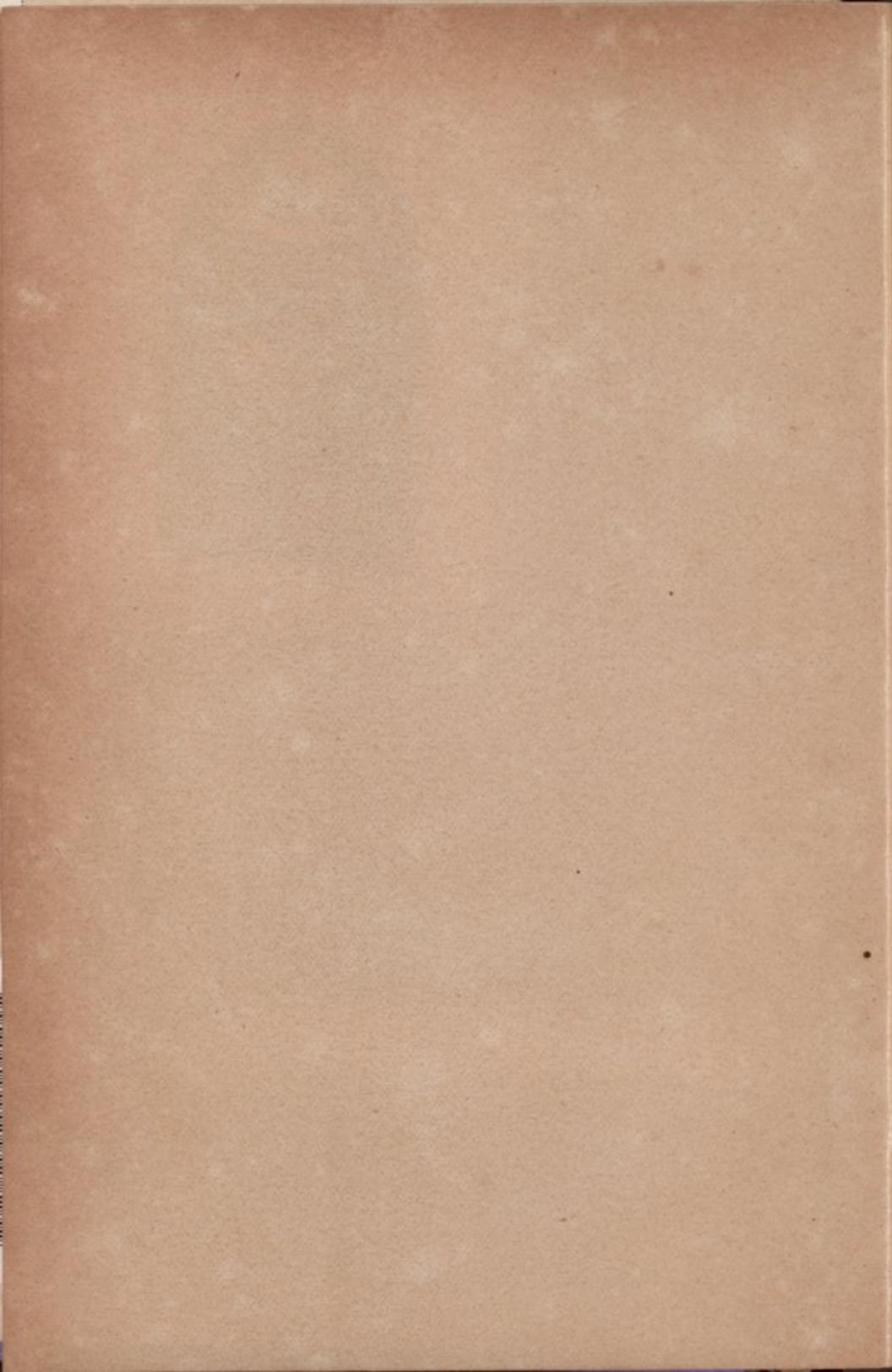


UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Biblioteca Geral



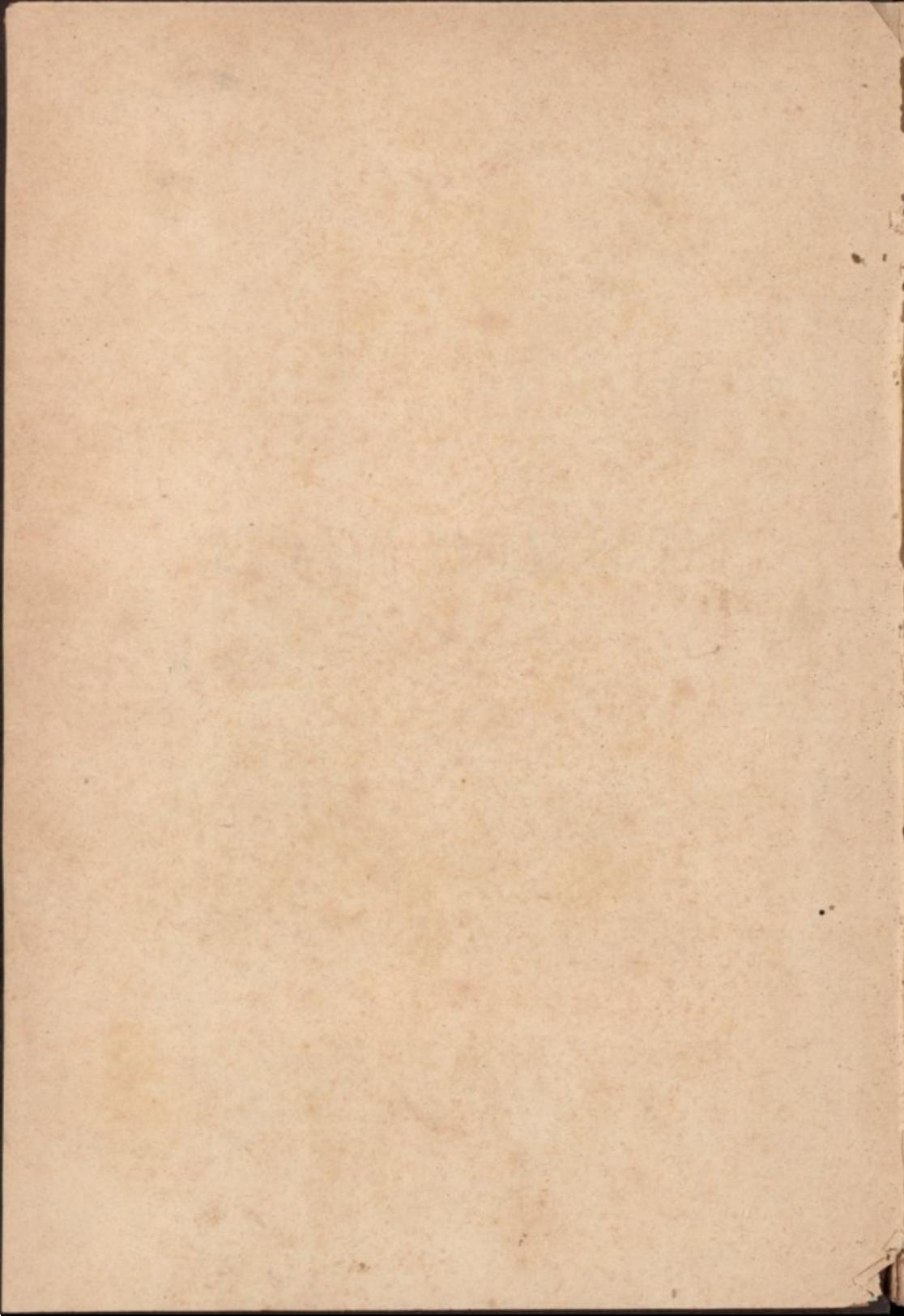
1301088242

b16732078



CURVAS PLANAS ALGEBRICAS

Matemáticas



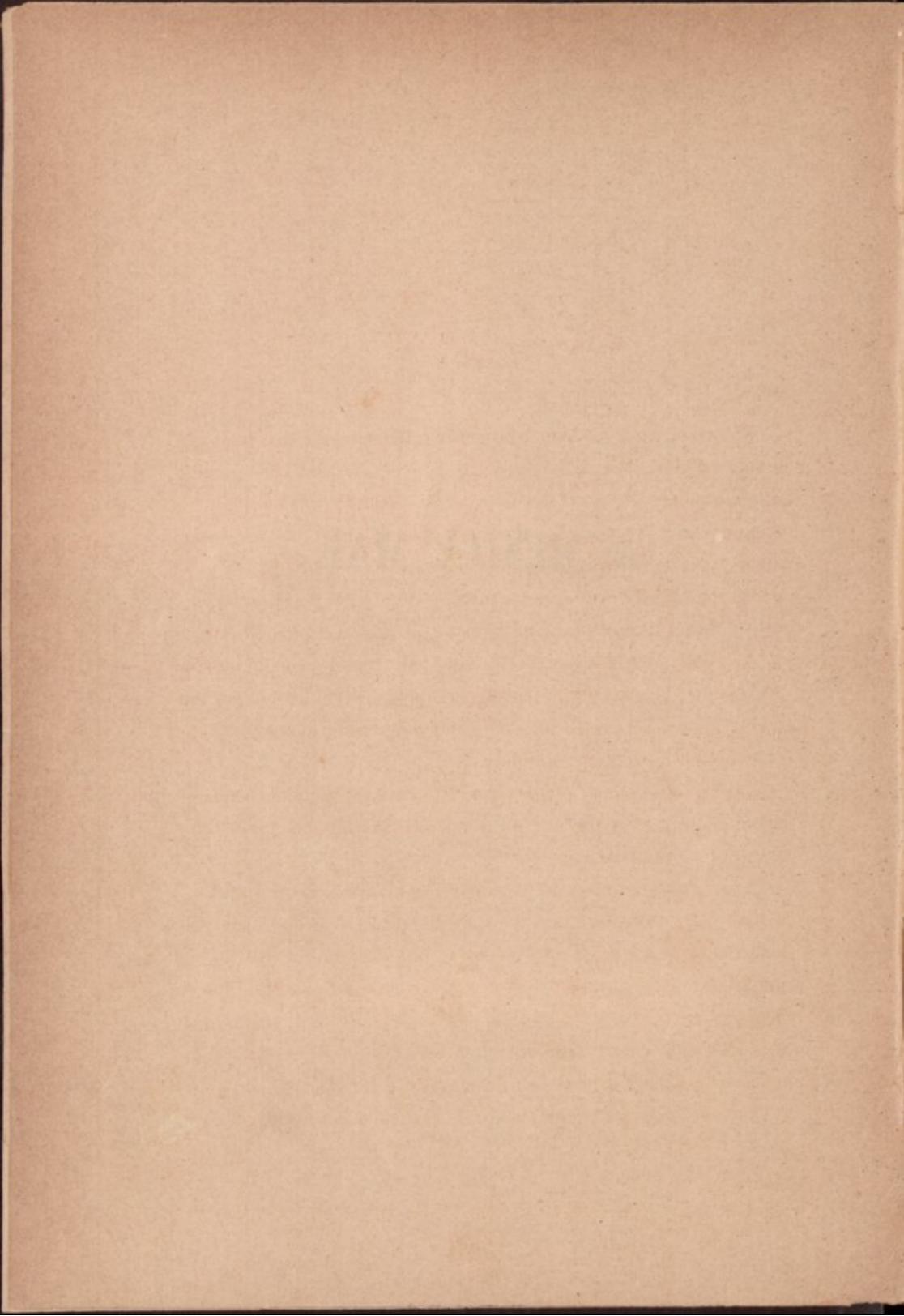
SUPERFICIES DE RIEMANN

POR

HENRIQUE MANUEL DE FIGUEIREDO



COIMBRA
IMPRESA DA UNIVERSIDADE
1887



Riemann, nas duas Memorias sobre a theoria geral das funcções e sobre as funcções abelianas, intituladas — «*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*» e «*Theorie der Abel'schen Functionen*», — apresentou como base de investigações uma nova theoria de superficies proprias para a representação geometrica de funcções não uniformes e que foram designadas com o nome de *superficies de Riemann*.

As idéas do celebre analysta tem sido, com especialidade em Allemanha, largamente desenvolvidas por notaveis geometras em memorias e tractados cujo estudo depende essencialmente do conhecimento d'aquellas superficies.

Expôr, nos seus principios fundamentaes, o methodo de Riemann, constitue o objecto da nossa dissertação inaugural, que dividimos em quatro partes.

Na primeira estudamos, segundo o methodo de M. Puiseux, a distribuição das raizes das equações algebraicas em systemas circulares em volta dos pontos criticos, por isso que a solução de um tal problema corresponde ao conhecimento dos pontos de ramificação, base para a construcção das superficies de Riemann.

A segunda parte comprehende a *Analysis situs* de Riemann: definição, classificação e transformação das superficies.

A maneira como a concepção de Riemann permite reduzir,

por meio da transformação anteriormente estudada, as funções integraes á uniformidade, constitue o assumpto da terceira parte d'este trabalho.

Na ultima apresentamos uma applicação do methodo ao estudo dos integraes ellipticos, rapida e elementar, pois que outra cousa não comportavam os limites a que naturalmente estavamos obrigados n'um trabalho d'esta natureza.

Coimbra, janeiro de 1887.

I

PERMUTAÇÃO DOS VALORES DAS FUNÇÕES ALGEBRICAS EM VOLTA DOS PONTOS CRITICOS

1. Uma função algebraica

$$y = f(x) = f(\xi + i\eta) = u + iv$$

definida pela equação irreductivel

$$F(y, x) = 0$$

é, para um determinado valor de x , susceptivel de adquirir os n valores

$$y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \dots y_n = f_n(x).$$

Effectuando no plano X a representação geometrica de Cauchy para a variavel

$$x = \xi + i\eta$$

e formando no plano Y a *imagem* de x , corresponderão a cada ponto x , n pontos em Y, que em geral são distintos uns dos outros. Comtudo, para os valores de x , que satisfazem simultaneamente ás equações

$$F(y, x) = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

parte ou a totalidade dos valores de y tornam-se eguaes entre si. Estes pontos x , aos quaes correspondem raizes eguaes na equação que define a funcção y , denominam-se *pontos criticos algebricos*.

As raizes

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

são em todo o plano funcções continuas de x , com excepção de alguns pontos em que uma ou mais d'entre ellas se tornam infinitas, e que são para a funcção inversa da que se considera pontos nullos, a partir dos quaes tem logar a continuidade.

Estes pontos infinitos, em numero limitado, correspondem ás raizes da equação que se obtem egualando a zero o coefficente da mais alta potencia de y , na equação $F=0$.

Quando é um só dos valores de y que se torna infinito para um certo x , esse ponto x denomina-se um *polo*.

São estas as duas unicas especies de *pontos singulares* que admittem as funcções algebricas.

2. Consideremos uma porção limitada do plano X tal que, movendo-se ahi o ponto x , correspondam a y valores funcçionaes diferentes uns dos outros e finitos: n'esse caso a *imagem* do caminho descripto por x será constituida em Y por n curvas separadas por intervallos finitos, que formam n ramos perfeitamente

distinctos para a funcção, cada um dos quaes é uma funcção uniforme n'aquelle espaço limitado.

Resulta d'isto que, se suppozermos que a variavel vai de $x = a$ a $x = b$ por differentes caminhos, o valor final para cada um dos ramos da funcção será independente do caminho seguido, comtanto que na deformação contínua, pela qual esses caminhos podem ser convertidos uns nos outros, não sejam encontrados pontos singulares.

Se o caminho descripto pela variavel fôr uma curva fechada, o valor final para cada ramo será, pois, igual ao inicial, se na deformação continua em que o caminho percorrido pôde ser reduzido ao ponto de partida não forem encontrados pontos singulares.

3. Supponhamos, porém, que o ponto x encontra no seu movimento algum ponto singular.

Se x tem de passar por um ponto critico α , quando estiver muito proximo d'elle, todas ou algumas das funcções

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

adquirem valores deseguaes, mas muito approximados uns dos outros e que se identificam em α : passado o ponto critico, aquellas das funcções que ali tinham adquirido um valor commum tornam a adquirir valores distinctos, mas ficará completamente indeterminado qual das funcções agora separadas representa uma certa das anteriores á passagem pelo ponto critico.

A passagem de x por um polo, conduzindo a pontos onde não existe a continuidade, torna igualmente impossivel a sequencia de um percurso ulterior determinado.

D'aqui concluimos que, tendo escolhido para um valor inicial $x = a$ entre as funcções y definidas pela equação irreductivel

$$F(y, x) = 0$$

uma determinada $y_{h,a}$ não será sempre possível determinar para o valor final $x = b$ qual é entre as raizes

$$y_{1,b}, y_{2,b} \dots y_{h,b} \dots y_{n,b}$$

aquelle que representa o valor final de $y_{h,a}$ supponho conhecido o caminho seguido por x desde $x = a$ até $x = b$.

4. Mas esta correspondencia pôde determinar-se logo que o caminho que segue a variavel não passe por pontos singulares, o que é sempre possível.

Com effeito, para $x = a$ e $x = b$ a equação $F = 0$ darã

$$y_{1,a}, y_{2,a} \dots y_{h,a} \dots y_{n,a}$$

e

$$y_{1,b}, y_{2,b} \dots y_{h,b} \dots y_{n,b};$$

dando a x uma serie de valor approximados a partir de a até b , por isso que a nenhum d'elles correspondem pontos singulares e pela continuidade das raizes, poder-se-hão seguir os valores correspondentes a uma determinada funcção que tem o valor inicial $y_{h,a}$ de modo a poder-se indicar quando chegamos a $x = b$ qual é dos valores

$$y_{1,b}, y_{2,b}, \dots y_{h,b} \dots y_{n,b}$$

aquelle que representa o valor final de $y_{h,a}$.

Feito, porém, isto para um certo caminho seguido pela variavel, não é necessario proceder novamente a uma determinação analoga para obter a correspondencia dos valores quando a variavel descreve um caminho differente do primeiro mas effectuado entre os mesmos limites.

Seja AMB (fig. 1) o caminho para o qual conhecemos em B quaes são dos valores funcçionaes y_b os que correspondem respectivamente aos valores y_a : pertendemos determinar isto mesmo quando x segue o caminho ANB .

Consideremos uma raiz que tem em A o valor $y_{h,a}$: o valor que corresponde em B a $y_{h,a}$, quando x percorre ANB , é, pelo que acima deixámos indicado, o mesmo que se o caminho seguido fosse

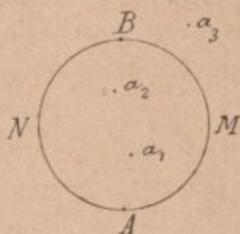


Fig. 1

$ANBMA + AMB$.

Supponhamos conhecido o valor que corresponde a $y_{h,a}$ depois de x ter percorrido $ANBMA$, e designemol-o por $y_{p,a}$.

Como sabemos qual é o valor funcional que em B , pelo caminho AMB , corresponde a $y_{p,a}$ em A , teremos assim o valor procurado para o percurso

$ANBMA + AMB$,

ou, o que é o mesmo, para ANB .

Reduz-se, pois, a questão a determinar os valores finais correspondentes respectivamente aos iniciaes

$$y_{1,a}, y_{2,a} \dots y_{n,a}$$

quando o caminho descripto pela variavel é uma curva fechada que comprehende no seu interior os pontos criticos que o novo caminho deveria encontrar na sua deformação continua para se reduzir ao primeiro.

5. Seja (fig. 2) ABC a curva que comprehende os pontos criticos $a_1, a_2 \dots$

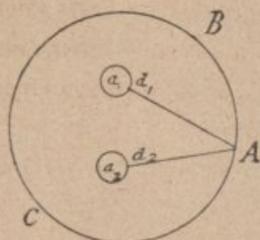


Fig. 2

Tracem-se curvas fechadas que, não se cortando, envolvem (cada uma d'ellas separadamente) um ponto critico.

Podemos figural-as pela porção Ad_1 da recta Aa_1 , e pela circumferencia infinitamente proxima de a_1 descripta de a_1 como centro. Estes contornos $Ad_1\widehat{a_1}d_1A$

denominam-se *contornos elementares*. Segundo são percorridos pela variavel no sentido directo ou retrogrado, assim se faz preceder a letra que os designa do signal + ou -.

Posto isto é evidente que, para o resultado final, seguir a variavel o caminho ABC equivale a seguir successivamente os contornos elementares, pois que o primeiro se transforma n'estes ultimos sem que tenha, na sua deformação, de atravessar ponto critico algum: para cada caso ver-se-ha facilmente a ordem, o numero de vezes e o sentido em que devem ser percorridos os contornos. Estamos assim reduzidos a estudar o percurso effectuado sobre o contorno elementar.

Sejam

$$y_{1,a} \dots y_{h,a} \dots y_{k,a} \dots y_{n,a}$$

os valores de y para $x=a$ em A, e que em d se convertem respectivamente em

$$y_{1,d} \dots y_{h,d} \dots y_{k,d} \dots y_{n,d}$$

Quando a variavel percorre a circumferencia de raio infinitamente pequeno, descripta em volta do ponto critico, uma d'estas funcções, a que tem, por exemplo, o valor inicial $y_{k,d}$, depois de effectuada uma circumvoluçãõ completa, ou retoma o primitivo valor ou muda-se n'um outro: supponhamos que se muda em $y_{k,d}$.

Continuando x a caminhar de d até A , ao valor funccional $y_{k,d}$ em d , corresponderá em A $y_{k,a}$, pois que se em logar d'este valor se obtivesse outro, por exemplo $y_{n,a}$, um movimento retrogrado de x não reproduzia $y_{k,d}$ em d , mas daria, pelo que supozemos acima, $y_{n,d}$. Concluimos portanto que as raizes

$$y_{1,a} y_{2,a} \dots y_{n,a}$$

se permutam, pelo percurso de x sobre o contorno elementar, exactamente da mesma maneira que

$$y_{1,d} y_{2,d} \dots y_{n,d}$$

pela circumvoluçãõ de x em volta dos pontos criticos.

As considerações que acabamos de apresentar conduzem, pois, naturalmente a estudar o modo como as funcções algebraicas permutam os seus valores uns nos outros em volta dos pontos criticos; e d'este importante problema nos vamos occupar nos numeros seguintes.



6. Seja a_1 um ponto correspondente ao valor finito $x = \alpha$ para o qual um numero l dos valores funcçionaes

$$y_1, y_2 \dots y_n$$

adquirem o valor finito commum $y = \beta$.

Descreva-se em volta de a_1 uma circumferencia de raio infinitamente pequeno, sobre que se moverá x partindo da posição inicial c .

As $n - l$ funcções que no ponto a_1 correspondem a raizes simples de $F(y, x) = 0$, retomam os seus primitivos valores depois de a variavel x ter feito uma circumvolução completa. Temos, pois, a analysar sómente a maneira como as l raizes, que tem em a_1 o valor commum $y = \beta$, se comportam para a circumvolução effectuada por x .

No ponto inicial c teremos, pela continuidade das raizes, as l raizes distinctas

$$y_1 = \beta + y'_1, y_2 = \beta + y'_2, \dots y_l = \beta + y'_l$$

em que $y'_1, y'_2, \dots y'_l$ são infinitamente pequenos. Pela circumvolução de x em volta de a_1 estas quantidades $y'_1, y'_2, \dots y'_l$, e portanto as l raizes de $F = 0$, permutam-se entre si de uma certa maneira, como passamos a mostrar.

7. Se introduzirmos em $F(y, x) = 0$ os valores

$$y = \beta + y', x = \alpha + x'$$

obteremos

$$Ay'^l + \sum By'^r x'^s = 0. \dots \dots \dots (1)$$

N'esta equação r e s são numeros inteiros e positivos: nos termos do desenvolvimento de Σ ha, pelo menos, um independente de y' , aliás não seria $F=0$ uma equação irreductivel, como se suppoz: o grau menos elevado dos termos independentes de x' que ahi se encontram, é claramente igual a l .

Supponhamos primeiramente que $\frac{dF}{dx}$ não se annula para os valores $x=\alpha$, $y=\beta$; isto é, que nos termos independentes de y' ha um que contém x' na primeira potencia. N'este caso os dois termos Ay'^l e Bx' serão de uma ordem menos elevada do que todos os outros; e teremos, designando por Λ um polynomio cujos termos são infinitamente pequenos em relação áquelles dois,

$$Ay'^l + Bx' + \Lambda = 0, \dots \dots \dots (2)$$

que fazendo

$$x' = x''^l, y' = hx'' = hx'^{\frac{1}{l}}$$

se converte em

$$Ah^l + B + x'' \Lambda_1 = 0. \dots \dots \dots (3)$$

Suppondo $x''=0$ teremos

$$Ah^l + B = 0, \dots \dots \dots (4)$$

cujas l raizes

$$h_1, h_2 \dots h_l$$

se podem suppôr dispostas de maneira que os seus argumentos differam successivamente uns dos outros de $\frac{2\pi}{l}$.

Serão, pois,

$$h_1 x'^{\frac{1}{l}}, h_2 x'^{\frac{1}{l}}, \dots h_l x'^{\frac{1}{l}}$$

os valores approximados das raizes da equação (1), para a posição c do ponto x .

Supponha-se agora que a variavel faz, sobre a circumferencia descripta em volta do ponto critico a_1 , uma circumvolução completa, voltando á posição inicial c : o augmento do argumento de $x'^{\frac{1}{l}}$ será de $\frac{2\pi}{l}$, isto é,

$$h_1 x'^{\frac{1}{l}} \text{ tornar-se-ha em } h_2 x'^{\frac{1}{l}}$$

$$h_2 x'^{\frac{1}{l}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad h_3 x'^{\frac{1}{l}}$$

.....

$$h_l x'^{\frac{1}{l}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad h_1 x'^{\frac{1}{l}}.$$

E isto tem egualmente logar quando, em vez dos valores approximados das raizes, se consideram os valores exactos

Com effeito, designem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_l$ quantidades muito pequenas que se annullam para $x'' = 0$; a equação (3) terá as l raizes simples

$$h_1 + \varepsilon_1, h_2 + \varepsilon_2 \dots h_l + \varepsilon_l;$$

o que dará para (1) as l raizes exactas

$$y'_1 = (h_1 + \varepsilon_1) x'^{\frac{1}{l}}, \dots y'_l = (h_l + \varepsilon_l) x'^{\frac{1}{l}}.$$

Quando o ponto movel x volta, depois de ter percorrido a circumferencia, ao ponto inicial c , o systema de valores de y' deve no seu conjuncto conservar-se o mesmo; e assim o valor final de y'_1 , por exemplo, não se convertendo no valor inicial de y'_2 , terá de ser igual a um outro, ao de y'_3 , por exemplo. Ora já vimos que o valor approximado $h_1 x'^{\frac{1}{l}}$ se convertia em $h_2 x'^{\frac{1}{l}}$; portanto o valor exacto terá a fórma $(h_2 + \varepsilon') x'^{\frac{1}{l}}$, devendo ao mesmo tempo ser

$$(h_2 + \varepsilon') x'^{\frac{1}{l}} = (h_3 + \varepsilon_3) x'^{\frac{1}{l}},$$

d'onde

$$h_2 - h_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon';$$

isto é, seria uma quantidade finita igual a uma outra infinitamente pequena.

D'aqui se conclue, pois, que o valor rigoroso final de y'_1 será igual ao valor rigoroso inicial de y'_2 ; e o mesmo para as outras raizes.

Portanto: quando no ponto a_1 , correspondente a $x = \alpha$, l raizes

$$y_1, y_2, \dots, y_l$$

da equação

$$F(y, x) = 0$$

tomam o valor commum β , e quando além d'isso é, para $x = \alpha$ e $y = \beta$, $\frac{dF}{dx} < 0$, essas raizes formam um *systema circular*; isto é, quando x percorre uma circumferencia infinitamente proxima de

a_1 , de maneira a effectuar uma circumvolução completa, o valor final de cada uma das raizes

$$y_1, y_2, \dots, y_l$$

será igual ao valor inicial da seguinte, effectuando-se assim uma serie de passagens cyclicas que se podem indicar por

$$\begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_k, y_l \\ y_2, y_3, \dots, y_k, y_l, y_1 \end{pmatrix}$$

Se em logar de uma unica circumvolução x fizesse tres, por exemplo, ter-se-hia

$$\begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_k, y_l \\ y_4, y_5, \dots, y_2, y_3 \end{pmatrix}$$

etc.

S. Supponhamos agora que em (1) é $\frac{dF}{dx} = 0$ para $x = \sigma$, $y = \beta$; e que n é a potencia a que está elevado x' no primeiro termo independente de y' .

Para conhecer como n'este caso se permutam as raizes vamos, d'um modo analogo ao anterior, determinar os valores infinitamente pequenos de y' que satisfazem approximadamente a (1), attendendo só aos termos d'ordem menos elevada que ahi se encontram. Para isso servir-nos-hemos das seguintes considerações geometricas.

Tracem-se dois eixos rectangulares Ox, Oy , e, tomando para coordenadas os expoentes de y' e de x' nos differentes termos

de (1), marquem-se, no plano rs , os pontos correspondentes que devem existir todos no quadrante positivo (fig. 3).

Os pontos marcados sobre Os correspondem aos termos independentes de y' , e sobre Or aos independentes de x' . D'estes, o mais proximo da origem tem por abscissa l .

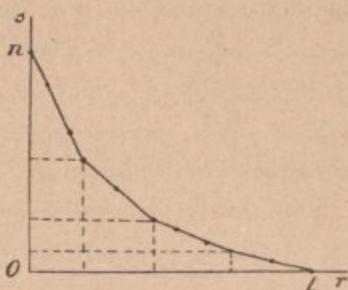


Fig. 3

Imagine-se uma recta coincidindo com Or , e dêmos-lhe um movimento de rotação em volta do ponto l , de maneira que ella encontre a parte positiva de Os , parando quando tivermos chegado a um dos pontos marcados no plano dos eixos. Poderá acontecer que sejam encontrados ao mesmo tempo mais do que um ponto.

Dê-se, em seguida á recta, um novo movimento em volta do ponto que fica mais afastado do primitivo ponto de rotação, até que sejam encontrados outros; e assim por diante até se chegar ao ponto do eixo Os , que fica mais perto da origem e que tem a ordenada n .

Por meio d'esta construcção ter-se-ha formado uma linha polygonal, convexa para a origem, sobre a qual estão situados os pontos correspondentes aos termos de ordem menos elevada de (1).

Consideremos um dos termos d'esta equação (1)

$$By'^r x'^s.$$

Suppondo que h é uma quantidade finita que não se annulla para $x' = 0$, façamos

$$y' = hx'^u.$$

O grau de $By'^r x'^s$, relativamente a x' , será $\mu r + s$.

Ora se com o coeficiente angular $-\mu$ traçarmos uma recta que passe pelo ponto (r, s) , cortará ella o eixo Os no ponto que dista da origem $\mu r + s$; isto é, precisamente o grau do termo correspondente ao ponto (r, s) .

Vê-se, pois, claramente que todos os termos do mesmo grau devem estar em linha recta.

Aos lados da linha polygonal corresponderão, portanto, os grupos de termos do mesmo grau

$$G_1 = A y'^l + B_a y'^{r_a} x'^{s_a} + \dots + B_b y'^{r_b} x'^{s_b}$$

$$G_2 = B_b y'^{r_b} x'^{s_b} + B_c y'^{r_c} x'^{s_c} + \dots + B_d y'^{r_d} x'^{s_d}$$

.....

$$G_m = B_e y'^{r_e} x'^{s_e} + \dots + B_n x'^n.$$

9. Consideremos o primeiro grupo: teremos

$$l\mu = \mu r_a + s_a = \dots = \mu r_b + s_b,$$

d'onde

$$\mu = \frac{s_a}{l - r_a} = \dots = \frac{s_b}{l - r_b} = \frac{q}{p}.$$

Fazendo $x' = x''^p$ e por isso

$$y' = h x'^{\mu} = h x''^{q} \dots \dots \dots (5)$$

serão, relativamente a x'' , do grau

$$lq = r_a q + s_a p = \dots = r_b q + s_b p$$

os termos do grupo que estamos considerando.

Poder-se-ha, pois, escrever (1) da fôrma seguinte:

$$A h^l + \dots + B_b h^{r_b} + x'' \Lambda = 0, \dots \dots \dots (6)$$

ou

$$h^{r_b} (A h^{l-r_b} + \dots + B_b) + x'' \Lambda = 0. \dots \dots \dots (7)$$

Ponhamos

$$A h^{l-r_b} + \dots + B_b = 0. \dots \dots \dots (8)$$

Esta equação admite $l - r_b$ raizes; portanto a equação (7) terá, para x'' muito pequeno, $l - r_b$ raizes muito proximas d'estas.

Consideremos o segundo grupo: será

$$\mu r_b + s_b = \mu r_c + s_c = \dots = \mu r_d + s_d,$$

d'onde

$$\mu = \frac{s_c - s_b}{r_b - r_c} = \dots = \frac{s_d - s_b}{r_b - r_d} = \frac{q_1}{p_1}.$$

E do mesmo modo que anteriormente se vê que a equação (1) se reduz a

$$h^{r_d} (B_b h^{r_b-r_d} + \dots + B_d) + x'' \Lambda = 0, \dots \dots \dots (9)$$

que para x'' muito pequeno admittirá $r_b - r_d$ raizes muito proximas das que são dadas pela equação

$$B_b h^{r_b-r_d} + \dots + B_d = 0. \dots \dots \dots (10)$$

Assim o primeiro grupo G_1 fornece $l - r_b$ raizes de (1); o segundo G_2 fornece $r_b - r_d$ raizes; e continuando a proceder como

até aqui, chegar-se-hia ao ultimo lado da linha polygonal, que dava para (1) $r_g - 0$ raizes.

Será portanto

$$l - r_b + r_b - r_d + \dots - r_g + r_g = l$$

o numero das raizes de (1) que são dados pelos diversos grupos; isto é, tel-as-hemos todas.

Observaremos ainda que, como se vê pela propria construcção feita para determinar os grupos, os coefficients angulares dos lados da linha polygonal vão augmentando, e assim será

$$\frac{q}{p} < \frac{q_1}{p_1} < \frac{q_2}{p_2} < \dots,$$

e como é $y' = hx'^{\frac{q}{p}}$ para G_1 e $y' = hx'^{\frac{q_1}{p_1}}$ para G_2 , etc., segue-se que os valores dados pelo primeiro grupo são d'uma ordem inferior aos que são dados pelo segundo, e assim por deante.

10. Vejamos agora como tem logar em cada grupo a passagem cyclica dos valores das raizes.

Tomemos o primeiro: será

$$\mu = \frac{s_a}{l - r_a} = \dots = \frac{s_b}{l - r_b} = \frac{q}{p},$$

e sendo p e q primos relativos, é

$$l - r_a = k_a p, \dots, l - r_b = k_b p$$

onde k_a, \dots, k_b são numeros inteiros.

Pondo

$$h^p = z \dots \dots \dots (11)$$

a equação (8) tornar-se-ha em

$$A z^{k_b} + B_a z^{k_b - k_a} + \dots + B_b = 0, \dots \dots \dots (12)$$

que dá k_b valores de z , que, por agora, suppremos todos deseguaes.

A cada um d'elles corresponderão p raizes simples de (8) h_1, h_2, \dots, h_p , dadas por $h^p = z$, e que podemos imaginar dispostas de modo que os seus argumentos diffiram successivamente de $\frac{2q\pi}{p}$.

A estes valores correspondem tambem, como acima vimos, p raizes approximadas de (1), dadas por (5),

$$h_1 x^{\frac{q}{p}}, h_2 x^{\frac{q}{p}}, \dots, h_p x^{\frac{q}{p}}.$$

Supponhamos que a variavel x volta, depois d'uma circumvolução em torno do ponto a_1 , ao ponto de partida c : o augmento do argumento de $x^{\frac{q}{p}}$ será então egual a $\frac{2q\pi}{p}$; isto é, o valor approximado

$$h_1 x^{\frac{q}{p}} \text{ converte-se em } h_2 x^{\frac{q}{p}}$$

$$h_2 x^{\frac{q}{p}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad h_3 x^{\frac{q}{p}}$$

.....

$$h_p x^{\frac{q}{p}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad h_1 x^{\frac{q}{p}}.$$

O mesmo tem logar quando, em vez dos valores aproximados de (1) considerarmos os rigorosos.

De que

$$h_1, h_2, \dots, h_p$$

são raizes de (8), segue-se que (7) admite como raizes rigorosas

$$h_1 + \varepsilon_1, h_2 + \varepsilon_2, \dots, h_p + \varepsilon_p,$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ designam, como anteriormente, quantidades muito pequenas, que se annullam com x'' . Serão, portanto, em virtude de (5)

$$y'_1 = (h_1 + \varepsilon_1) x'^{\frac{q}{p}}, \dots, y'_p = (h_p + \varepsilon_p) x'^{\frac{q}{p}}$$

p raizes rigorosas de (1).

O conjuncto d'estas raizes conserva-se o mesmo quando a variavel x volta ao ponto de partida c , e assim o valor final de y'_1 , por exemplo, deverá ser igual ao valor inicial de qualquer outra raiz.

Mas, como vimos, o valor approximado $h_1 x'^{\frac{q}{p}}$ converte-se em $h_2 x'^{\frac{q}{p}}$; portanto o valor final de $(h_1 + \varepsilon_1) x'^{\frac{q}{p}}$ será da fórma $(h_2 + \varepsilon') x'^{\frac{q}{p}}$.

Suppondo que era

$$(h_2 + \varepsilon') x'^{\frac{q}{p}} = (h_3 + \varepsilon_3) x'^{\frac{q}{p}}$$

teriamos

$$h_2 - h_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon',$$

o que não deve ser, e que subsistirá em quanto se suppozer que o valor final de y'_1 é diferente do inicial de y'_2 . E o mesmo se conclue para todas as quantidades $y'_1, y'_2, y'_3, \dots, y'_p$.

Ao grupo

$$G_1 = Ay'^l + B_a y'^{r_a} x'^{s_a} + \dots + B_b y'^{r_b} x'^{s_b},$$

relativo ao primeiro lado da linha polygonal correspondem, pois, $k_b p = l - r_b$ valores de y' do mesmo grau, que se repartem em k_b *systemas circulares* de p raizes cada um.

Por uma analyse semelhante, applicada aos outros grupos, se chegaria á divisão total das raizes em *systemas circulares*.

¶¶. No que acabamos de ver admittiu-se que a equação (12) tinha unicamente raizes simples. A distribuição das raizes em *systemas circulares* tem ainda logar quando isto se não dá.

Supponhamos assim que (12) tem l' raizes eguaes entre si: a cada uma das raizes

$$h_1, h_2, \dots, h_p$$

de (11) correspondem l' raizes eguaes em (8); portanto, por (5), terá (1) l' raizes cujo valor approximado é

$$y'_1 = h_1 x'^{\frac{q}{p}},$$

outras l' que tem o valor approximado

$$y_2 = h_2 x'^{\frac{q}{p}},$$

etc.

..

Para cada raiz h de (11) haverá, pois, em (1) l' raízes que tem o mesmo valor approximado; mas a esse valor approximado correspondem valores rigorosos diferentes, que é necessario distinguir.

Para isso, observando que os valores rigorosos são representados por

$$y' = (h + h') x^{\frac{q}{p}},$$

onde h' é infinitamente pequeno, substituiremos em (1) h por $h + h'$ e obter-se-ha assim uma equação

$$A' h'^{l'} + \Sigma B' h'^r x'^s = 0, \dots\dots\dots (1')$$

analogia a (1), que dará os valores de h' que distinguem uns dos outros os $p l'$ valores representados respectivamente

$$l' \text{ por } y'_1 = (h_1 + h') x^{\frac{q}{p}}$$

$$l' \text{ » } y'_2 = (h_2 + h') x^{\frac{q}{p}}$$

.....

$$l' \text{ » } y'_p = (h_p + h') x^{\frac{q}{p}}.$$

Fazendo applicação á equação (1') do methodo anteriormente exposto para a equação (1), separar-se-hão grupos de termos

analogos a G_1, G_2, \dots , que devem ser considerados separadamente. Fazendo

$$x' = x''p = x'''pp^{(i)}, \quad h' = \rho x'''q^{(i)} = \rho x'' \frac{q^{(i)}}{p^{(i)}},$$

onde ρ é uma quantidade que não se annulla com x''' , chega-se a equações analogas a (11) e (12), que designaremos por (11') e (12').

Se as equações (12') admittem sómente raizes simples, as raizes de (1') poderão dispôr-se em *systemas circulares*, representados em geral por

$$h' = \rho x'' \frac{q^{(i)}}{p^{(i)}}.$$

Tomemos o primeiro grupo. As equações (11') e (12') devem dar $k'_b p'$ raizes de (1'), que se distribuem em k'_b *systemas circulares* de p' raizes. Cada raiz simples de (12') dá um *systema circular*

$$h'_1 = \rho_1 x'' \frac{q'}{p'} = \rho_1 x' \frac{q'}{pp'}$$

$$h'_2 = \rho_2 x'' \frac{q'}{p'} = \rho_2 x' \frac{q'}{pp'}$$

.....

$$h'_{p'} = \rho_{p'} x'' \frac{q'}{p'} = \rho_{p'} x' \frac{q'}{pp'},$$

em que $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p'}$ são os valores de ρ para $x''' = 0$.

A uma raiz simples de (12') correspondem portanto, das p' raizes de (1) que indicámos, as pp' seguintes, em que é $Q = qp' + q'$:

$$\left. \begin{aligned} y'_{1,1} &= h_1 x'^{\frac{q}{p}} + \rho_1 x'^{\frac{Q}{pp'}} \\ y'_{1,2} &= h_1 x'^{\frac{q}{p}} + \rho_2 x'^{\frac{Q}{pp'}} \\ \dots\dots\dots \\ y'_{1,p'} &= h_1 x'^{\frac{q}{p}} + \rho_{p'} x'^{\frac{Q}{pp'}} \end{aligned} \right\} \text{correspondentes a } y'_1 = (h_1 + h') x'^{\frac{q}{p}}$$

$$\left. \begin{aligned} y'_{2,1} &= h_2 x'^{\frac{q}{p}} + \rho_1 x'^{\frac{Q}{pp'}} \\ y'_{2,2} &= h_2 x'^{\frac{q}{p}} + \rho_2 x'^{\frac{Q}{pp'}} \\ \dots\dots\dots \\ y'_{2,p'} &= h_2 x'^{\frac{q}{p}} + \rho_{p'} x'^{\frac{Q}{pp'}} \end{aligned} \right\} \text{correspondentes a } y'_2 = (h_2 + h') x'^{\frac{q}{p}}$$

.....

$$\left. \begin{aligned} y'_{p,1} &= h_p x'^{\frac{q}{p}} + \rho_1 x'^{\frac{Q}{pp'}} \\ y'_{p,2} &= h_p x'^{\frac{q}{p}} + \rho_2 x'^{\frac{Q}{pp'}} \\ \dots\dots\dots \\ y'_{p,p'} &= h_p x'^{\frac{q}{p}} + \rho_{p'} x'^{\frac{Q}{pp'}} \end{aligned} \right\} \text{correspondentes a } y'_p = (h_p + h') x'^{\frac{q}{p}}.$$

Estas pp' raizes podem dispôr-se da maneira seguinte:

$$y'_{1,1} = h_1 x^{\frac{q}{p}} + \rho_1 x^{\frac{Q}{pp'}}$$

$$y'_{2,1} = h_2 x^{\frac{q}{p}} + \rho_1 x^{\frac{Q}{pp'}}$$

.....

$$y'_{p,1} = h_p x^{\frac{q}{p}} + \rho_1 x^{\frac{Q}{pp'}}$$

$$y'_{1,2} = h_1 x^{\frac{q}{p}} + \rho_2 x^{\frac{Q}{pp'}}$$

$$y'_{2,2} = h_2 x^{\frac{q}{p}} + \rho_2 x^{\frac{Q}{pp'}}$$

.....

$$y'_{p,2} = h_p x^{\frac{q}{p}} + \rho_2 x^{\frac{Q}{pp'}}$$

.....

.....

$$y'_{1,p'} = h_1 x^{\frac{q}{p}} + \rho_{p'} x^{\frac{Q}{pp'}}$$

$$y'_{2,p'} = h_2 x^{\frac{q}{p}} + \rho_{p'} x^{\frac{Q}{pp'}}$$

.....

$$y'_{p,p'} = h_p x^{\frac{q}{p}} + \rho_{p'} x^{\frac{Q}{pp'}}$$

D'estas fórmulas concluímos, sem insistir mais, que as pp' raizes formam um *systema circular*.

Depois de pp' circumvoluções em volta do ponto a_1 tornar-se-ha a achar o primeiro valor, e em seguida reproduzir-se-hão os seguintes pela mesma ordem. Para os outros grupos procede-se d'um modo analogo.

Se a equação (12'), em logar de ter só raizes simples, as tivesse tambem multiplas, formariamos pelo mesmo processo uma nova equação (1'') e outra (12''); se esta admittisse ainda raizes eguaes, continuar-se-hia a mesma analyse, até que finalmente se haveria de chegar a uma equação com uma só raiz infinitamente pequena.

Com effeito, é facil de ver que o numero l' de raizes de (1') é inferior ou, quando muito, igual a l ; assim se a equação (12') tiver ainda raizes eguaes, deverá chegar-se a uma equação (1'') cujo numero de raizes l'' é inferior ou, quando muito, igual a l' , e assim por deante até que, se for $l > l'$, $l' > l''$, . . . , se chegará a uma ultima equação que contém sómente uma raiz.

Para que isto assim não fosse seria necessario que, em vez de terem logar aquellas desigualdades, o numero das raizes das equações a que successivamente se chega fosse sempre o mesmo: mas isso levaria a valores de (1), que differiriam uns dos outros d'um infinitamente pequeno d'uma ordem tão elevada como se quizesse; isto é, haveria valores de y' eguaes entre si para qualquer valor de x' , ou valores eguaes de y para qualquer x , o que é manifestamente impossivel, pois se suppoz irreductivel a equação $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ y, x \end{smallmatrix}\right) = 0$.

Concluímos, portanto, que ainda n'este caso as raizes formam *systemas circulares*.

12. No que deixamos dicto suppozemos que ao valor finito $x = \alpha$ correspondiam l valores funcçoes que tomavam um valor commum β , tambem finito: mas se $x = \alpha$ é raiz da equação que se obtem egualando a zero o coefficente da mais alta potencia de y em $F(y, x) = 0$, o valor commum é $y = \infty$.

A consideração d'estes pontos x , para os quaes alguns valores de y se tornam infinitamente grandes, é facilmente reduzida ao caso das raizes eguaes finitas.

Com effeito se pozermos na equação algebraica proposta

$$x = \alpha + x', \quad y = \frac{1}{y'}$$

formaremos uma equação que para $x' = 0$ tem uma raiz $y' = 0$ de ordem l . Esta nova equação poderá tractar-se pelo methodo anteriormente exposto, o que dá a distribuição das raizes em *systemas circulares*.

Quando a equação a que se chega pela substituição anterior só tiver, para $x' = 0$, uma raiz nulla, o ponto α é então um *polo*.

13. Se o valor $x = \alpha$ se torna infinito, a consideração da funcção na vizinhança do ponto infinitamente distante reduz-se, fazendo

$$x = \frac{1}{x'}$$

á analyse d'uma funcção algebraica entre x' e y na proximidade do ponto nullo $x' = 0$.

14. Supponhamos agora descripta uma circumferencia R que

contenha todos os pontos criticos existentes no finito cujo numero, como sabemos, é limitado; e que a variavel

$$x = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi}$$

se move n'ella. Façamos ainda

$$x = \frac{1}{x'}, \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x'}\right) = \psi(x');$$

a variavel x' , que representaremos n'um outro plano, descreve, ao mesmo tempo que x percorre R , uma outra circumferencia R' , cujos pontos correspondem a

$$x' = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}.$$

A todos os pontos situados dentro de R no primeiro plano corresponderão pontos situados fóra de R' no segundo; e, inversamente, todos aquelles que estão fóra de R terão por correspondentes pontos situados dentro de R' .

Portanto ao espaço indefinido fóra de R corresponderá o espaço limitado por R' , no qual se deve também achar o ponto nullo correspondente a $x = \infty$ e onde não deve estar nenhum dos que são relativos aos outros pontos criticos.

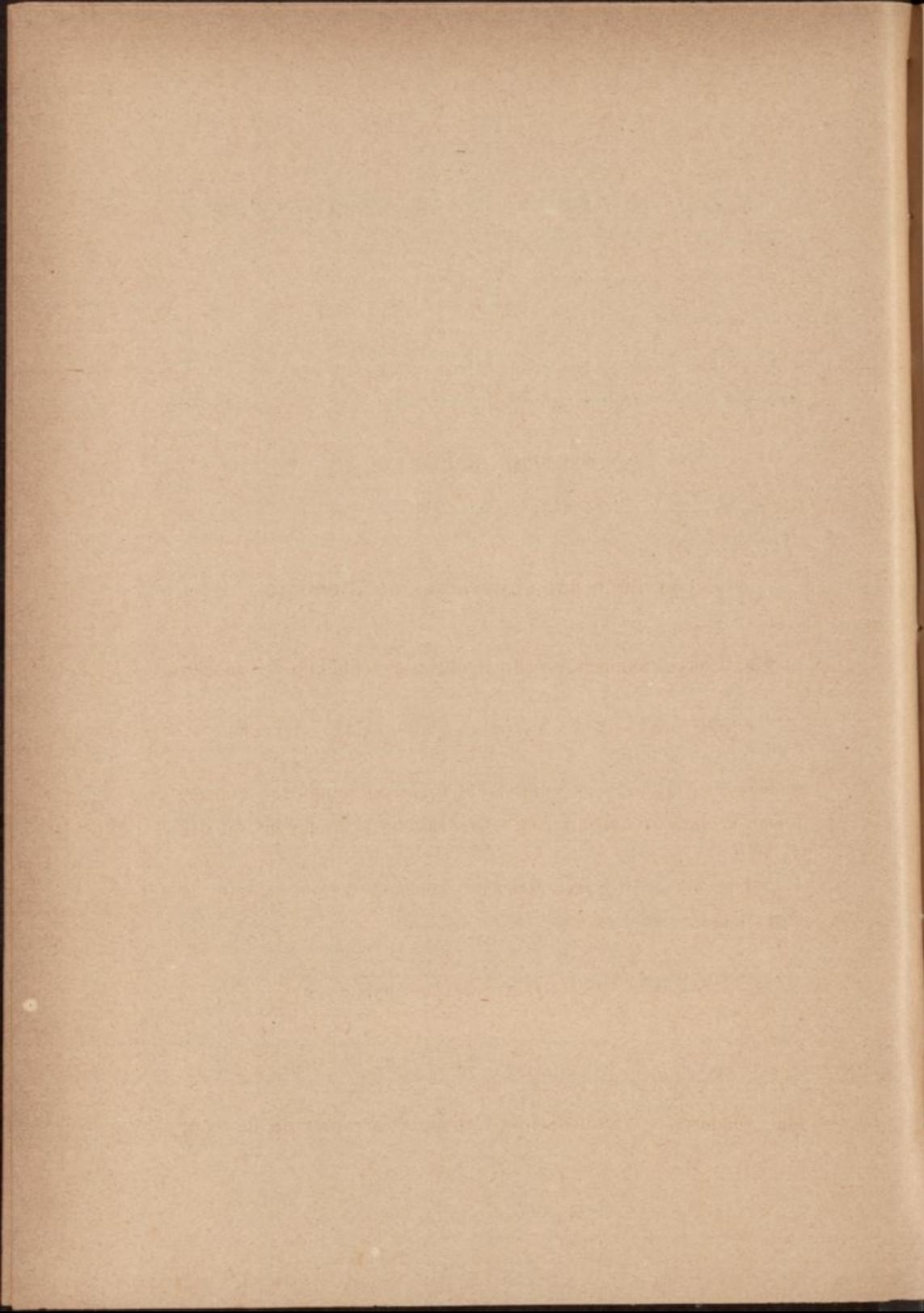
Depois de uma circumvolução completa da variavel poderá, ou não, variar o valor funccional correspondente a x' , conforme $x' = 0$ for, ou não, um ponto critico; pois que $\psi(x')$ dentro d'aquelle circulo, abstrahindo do ponto nullo, não póde ter outro ponto critico: isto é, variará o valor funccional conforme for, ou não, $x = \infty$ um ponto critico de y .

Portanto: o percurso de uma curva que encerra todos os pontos críticos d'uma função algebraica

$$y = f(x),$$

existentes no finito só poderá produzir uma mudança no valor funcional d'esta quando $x = \infty$ for um ponto critico de $y = f(x)$.





II

SUPERFICIES DE RIEMANN

I. Definição das superfícies de Riemann

15. Consideremos a função algébrica y definida pela equação

$$F(y, x) = y^2 - A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) = 0,$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4 são quantidades reais ou complexas que no plano X , onde se move x , são representadas pelos pontos a_1, a_2, a_3, a_4 .

A função y não é uma função uniforme; a cada valor de x correspondem dois valores

$$y = + \sqrt{A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)},$$

$$y = - \sqrt{A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)},$$

que, sendo em geral distintos, formam dois ramos da função,

podendo comtudo tomar o valor commum $y=0$ quando x se torna igual a algum dos valores

$$a_1, a_2, a_3, a_4.$$

Para determinar como os dois ramos da funcção y se comportam para a circumvolução dos pontos criticos, podemos applicar o que deixamos dicto na primeira parte.

Para $x=a_1$ os valores de y são nullos, e como para $x=a_1$ e $y=0$ a derivada $\frac{dF}{dx}$ se torna em

$$-A(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)$$

segue-se que estamos no caso que já foi considerado no n.º 7; portanto os dois valores $+y$, $-y$ formam em volta de a_1 um systema circular

$$\begin{pmatrix} +y, & -y \\ -y, & +y \end{pmatrix}.$$

E o mesmo tem logar com relação aos outros pontos a_2, a_3, a_4 .

Se a variavel x percorre uma circumferencia em cujo interior estão situados os quatro pontos a_1, a_2, a_3, a_4 , não se produzirá, por uma circumvolução completa d'ella, nenhuma alteração no valor funcional de y , isto é, $x = \infty$ não é um ponto critico para a funcção y .

16. Vamos agora ver como uma representação especial do valor da variavel complexa nos permite obter que x sómente cor-

responda á sua primitiva posição, quando y retomar tambem o seu primitivo valor.

Como a cada valor de x podem, em geral, corresponder dois valores de y , supponhamos representada a variavel x sobre dois planos ou folhas sobrepostas.

A cada valor de x corresponderão assim dois pontos: um x' no plano superior; outro x'' no plano inferior.

Seja x_0 um valor differente de a_1, a_2, a_3, a_4 , ao qual correspondem os dois valores $+y_0, -y_0$. Ao ponto x'_0 , no plano superior, corresponde o valor $+y_0$; e a x''_0 , no plano inferior, o valor $-y_0$.

Supponhamos agora que x'_0 está cercado por uma curva fechada L , no interior da qual se não encontra ponto critico algum; e que x' se move sómente dentro d'esse espaço limitado: x'' tambem, na folha inferior, só se deslocará na proximidade de x''_0 .

N'este caso aos pontos do plano superior corresponde sempre $+y$, em quanto que aos do plano inferior corresponde $-y$.

Se x' fizer uma circumvolução em volta d'um ponto x'_1 que esteja dentro de L , ao valor primitivo de x corresponde tambem o primitivo valor de y : e o mesmo succede para a outra folha. D'este modo correspondem sempre aos dois pontos x' e x'' , nos planos superior e inferior e que representam o mesmo valor de x , os valores funcçoes $+y$ e $-y$.

Vejamos, porém, como havemos de proceder quando considerarmos os valores

$$x = a_1, a_2, a_3, a_4,$$

para os quaes dois ramos da funcção se tornam identicos, e cujos pontos correspondentes se denominam *pontos de ramificação*.

Considere-se o ponto a_1 : porisso que ahi os dois valores de y se tornam eguaes, junctemos n'esse ponto os dois planos primitivamente separados.

Designemos por x_1 um valor de x tal que o modulo de $(x_1 - a_1)$ seja menor que o raio d'uma circumferencia L descripta de a_1 como centro, e que não contém nenhum dos outros pontos a_2, a_3, a_4 ; sejam, além d'isso, x'_1 e x''_1 os pontos que, nos dois planos, representam aquelle valor, e $+y_1, -y_1$ os valores de y que respectivamente lhes pertencem.

Façamos com x' (fig. 4), partindo de x'_1 , uma circumvolução em volta de a_1 , sem sahir para fóra de L ; quando x' retoma a primitiva posição x'_1 , y não readquire o valor primitivo $+y_1$, mas é igual a $-y_1$; isto é, toma aquelle valor que suppozemos corresponder ao ponto x''_1 .

Tracta-se de obter que, depois de uma circumvolução em volta de a_1 , o ponto x' não coincida com x'_1 , mas com o que lhe está inferior x''_1 .

Para isso supponhamos (fig. 5) traçada a partir de a_1 , em qual-

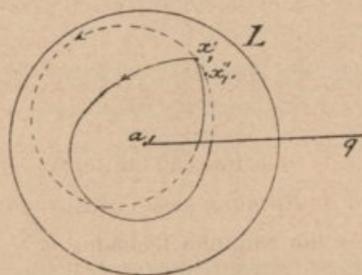


Fig. 5

quer direcção, uma recta indefinida $\overline{a_1 q}$; ao longo d'ella imaginemos cortados os dois planos. Effectuar-se-hão assim duas secções que deixam quatro bordos: junctemos cada bordo da folha superior com o que lhe fica fronteiro na folha inferior, como se vê indicado em

cóрте transversal na fig. 6. Feita esta ligação das duas folhas ao longo da linha $\overline{a_1q}$, quando se atravessar esta linha passar-se-ha, d'um modo continuo, da folha superior para a inferior e inversamente.

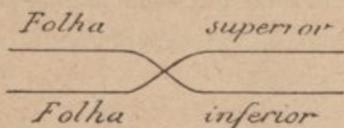


Fig. 6

Desloquemos agora x' em volta do ponto a_1 partindo da posição x'_1 . Logo que chegarmos á linha $\overline{a_1q}$ passamos á segunda folha e continuaremos ahi, seguindo a linha pontuada, até x''_1 onde se encontrará o valor $-y_1$.

Cerquemos ainda a_1 , caminhando na folha inferior do ponto de partida x''_1 : logo que chegarmos a $\overline{a_1q}$ passamos novamente da folha inferior para a superior, e continuando a caminhar n'esta até x'_1 encontraremos ahi o valor $+y_1$; o que concorda com o facto de duas circumvoluções em volta de a_1 darem a y o valor $+y$.

D'esta maneira, e fazendo o mesmo para os pontos a_2, a_3, a_4 , obtemos que a cada ponto que representa x corresponda sómente um valor de y .

Podemos ainda, em vez de fazer córtes indefinidos como $\overline{a_1q}$, ligar a_1 com a_2 e a_3 com a_4 e considerar $\overline{a_1a_2}, \overline{a_3a_4}$ como córtes de ramificação, ao longo dos quaes se ligam, como anteriormente, as folhas superior e inferior.

A superficie, cuja construcção acabamos de indicar, denomina-se *superficie de Riemann* da funcção y .

Poder-se-ha, pois, dizer que y é uma funcção uniforme do logar da variavel x sobre a *superficie de Riemann* assim construida: quando x tiver descripto sobre esta um caminho fechado, y retonará o seu primitivo valor inicial.

Em volta dos pontos a_1, a_2, a_3, a_4 , a *superficie de Riemann*,

formada pelas duas folhas, enrosca-se semelhando uma superficie helicoides, e por esse motivo é tambem designada por alguns mathematicos allemães com o nome de *Windungsfläche*; e os pontos de ramificação por *Windungspunkte*.

17. Consideremos agora o caso geral: seja

$$y = f(x)$$

a função definida por

$$F(y, x) = 0,$$

e cujos polos e pontos criticos supomos determinados.

Marquem-se no plano os pontos criticos e façamos descrever á variavel, partindo d'um ponto ordinario, um contorno fechado em cujo interior exista unicamente o ponto critico $x = \alpha$, a que correspondem l raizes eguaes a β na equação $F = 0$.

Os l valores

$$f_a, f_b, \dots, f_l,$$

que $f(x)$ tem no ponto de partida e que em α se tornam eguaes a β , distribuem-se em geral, para a circumvolução do ponto critico, em varios systemas circulares

$$\left(\begin{array}{c} f_a, f_b, \dots, f_e \\ f_b, \dots, f_e, f_a \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} f_g, f_h, \dots, f_l \\ f_h, \dots, f_l, f_g \end{array} \right), \dots$$

Para um segundo ponto critico correspondente a $x = \alpha$, em que

l' raizes de $F=0$ se tornam eguaes a β' , formar-se-hão os systemas circulares

$$\left(\begin{array}{c} f_{a'}, f_{b'}, \dots f_{e'} \\ f_{b'}, \dots f_{e'}, f_{a'} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} f_{g'}, f_{h'}, \dots f_{l'} \\ f_{h'}, \dots f_{l'}, f_{g'} \end{array} \right)$$

e do mesmo modo para todos os pontos criticos restantes.

Tomem-se n esferas de raio infinitamente grande e sobrepostas. Em cada uma d'estas superficies marque-se um ponto, correspondente ao mesmo valor arithmetico de x , que não seja um ponto critico. Como a um valor de x correspondem n valores de y differentes, póde dizer-se que as n esferas formam uma superficie de n folhas tal que a cada um dos seus pontos corresponde um unico valor funcional de y ; e assim se podem designar as folhas pelos indices dos valores correspondentes de y .

Consideremos os pontos criticos.

No ponto α imaginar-se-hão reunidas as folhas que correspondem ao primeiro systema circular; executa-se depois um córte n'estas folhas que se estende indefinidamente, mas de maneira que não encontre nenhum outro ponto critico.

Une-se em seguida o lado direito do córte existente na folha (a) com o esquerdo do córte existente na folha (b), o lado direito de (b) com o esquerdo de (c), etc.; até que finalmente se unirá o lado direito do córte da folha (e) com o esquerdo do córte da folha (a).

Para o segundo systema circular, relativo a α , procede-se d'um modo analogo: executa-se um córte nas folhas correspondentes ás raizes que formam o segundo systema, e liga-se o lado direito do córte de (g) com o esquerdo do córte em (h), etc., e finalmente o lado direito do córte em (l) com o esquerdo do de (g). Etc.

..

Estabelecida analogamente a ligação correspondente a todas as folhas e a todos os pontos criticos, a superficie assim formada, de n folhas, denomina-se *superficie de Riemann* da funcção y (*Windungsfläche*).

Esta construcção mostra-nos immediatamente que a cada ponto critico da funcção correspondem, na superficie formada, um certo numero de pontos, cada um dos quaes é commum aos córtes feitos nas folhas relativas a cada systema circular.

Taes pontos chamam-se *pontos de ramificação* (*Windungspunkte*), e as secções que d'elles partem os *córtes de ramificação*.

Diz-se que um ponto de ramificação é da ordem θ quando o systema circular a que elle se refere é composto de $\theta + 1$ raizes.

A fig. 7 representa um córte transversal feito n'uma das folhas de uma *superficie de Riemann*, que correspondem a um ponto de ramificação de ordem 2.

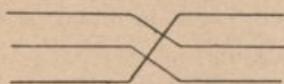


Fig. 7

18. A superficie de Riemann da funcção y , tal como a acabamos de indicar, é pois o logar geometrico dos pontos de que y depende d'um modo uniforme; isto é, quaesquer caminhos percorridos pela variavel, entre dois pontos situados na mesma superficie, conduzem aos mesmos valores funcçionaes; a funcção proposta é então uma funcção uniforme do logar da sua variavel.

Se $R(y, x)$ for uma qualquer funcção racional de x e de y será igualmente uma funcção uniforme do logar da variavel sobre a superficie de Riemann da funcção y , pois que a cada ponto d'esta corresponderá um determinado x e um determinado y .

19. Em vez de executar o córte de ramificação como anteriormente, isto é, partindo do ponto de ramificação até ao infinito,

póde tambem, em casos especiaes, fazer-se a secção entre dois pontos de ramificação, para o que facilmente se apresentarão as condições necessarias e sufficientes.

Seja $f(x)$ uma funcção para a qual a_1 e a_2 correspondam a dois pontos de ramificação, e $\overline{a_1 a_2}$ o córte de ramificação ao longo do qual se ligam k folhas, de modo que a funcção dependa uniformemente do logar da sua variavel. Uma circumvolução, effectuada sobre uma curva fechada que comprehende a_1 e a_2 e existente n'uma das k folhas da superficie, não deve produzir alteração funcional alguma; mas a circumvolução feita em volta de a_1 e a_2 póde ser substituida por duas outras circumvoluções em volta de a_1 e a_2 , effectuadas no mesmo sentido. Se for, por exemplo, x_0 o ponto de partida, e a primeira circumvolução transformar $f_1(x_0)$ em $f_2(x_0)$, a segunda deverá transformar $f_2(x_0)$ em $f(x_0)$; e o mesmo tem logar para os outros valores funcçionaes

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_k(x_0):$$

portanto, nos dois pontos de ramificação, é identica a successão dos valores funcçionaes quando é diferente o sentido do movimento da variavel em volta de a_1 e de a_2 ; deve então ter-se realisado a união das folhas (fig. 8), de maneira que ao longo de $\overline{a_1 a_2}$

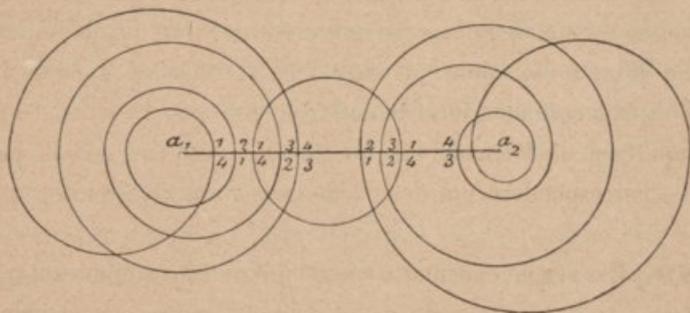


Fig. 8

o lado inferior da folha 1 se ligue ao superior de 2, o inferior de 2 ao superior de 3, e assim por diante até que o inferior de k se liga ao superior de 1: o que realisa a identidade dos dois cyclos de raizes para as direcções oppostas de movimento.

A construcção effectuada satisfaz a condição necessaria, de que o percurso de qualquer caminho fechado, que não encerra os dois pontos em questão, não deve produzir nenhuma alteração funcional. Com effeito, se a curva fechada não passa pelo córte de ramificação é isto evidente, pois que então existe ella, na sua totalidade, na mesma folha; se, pelo contrario, ella atravessar $\overline{a_1 a_2}$, passando, por exemplo, da parte superior de $\overline{a_1 a_2}$ na primeira folha para a quarta, na sua reversão da parte de baixo de $\overline{a_1 a_2}$, volta, passando pelo do córte de ramificação, para a primeira folha.

20. A mutua dependencia das folhas no ponto infinitamente distante, imposta pelas propriedades analyticas particulares de cada função, realisa-a de facto a construcção executada com referencia aos pontos de ramificação existentes no finito.

Já anteriormente vimos que uma circumvolução de todos os pontos criticos, existentes no finito, se deve considerar como identica á circumvolução do ponto infinitamente distante, suppondo que os pontos criticos, á excepção de $x = \infty$, não se estendem indelinidamente. E como para o nosso caso isto tem logar, segue-se que a ligação das folhas da superficie de Riemann se realisa no infinito pela construcção effectuada no finito.

II. Limites das superficies de Riemann

21. Definida a superficie de Riemann de n folhas como o logar geometrico dos pontos de que depende d'um modo uniforme a funcção $f(x)$, e indicado o methodo geral da sua construcção, vamos apresentar as considerações geometricas que formam uma outra parte fundamental do methodo de Riemann.

Curvas limites

22. Imaginemos, descripta em volta d'um ponto qualquer n'uma folha da superficie de Riemann, uma circumferencia de pequeno raio, que, no caso especial de ser o ponto considerado um de ramificação a_1 , será substituida pela curva fechada $abcd$ (fig. 9) ou por outra analoga. A superficie de Riemann fica assim dividida em duas partes, limitadas pela curva agora traçada, de modo que não é possível passar por um traço continuo d'uma para a outra sem atravessar o limite.

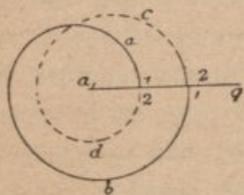


Fig. 9

Uma superficie, ou parte de superficie, diz-se *connexa* quando n'um traço continuo se póde passar d'um qualquer dos seus pontos a um outro sem atravessar os limites da superficie ou porção de superficie considerada.

Quando se divide o espaço indefinido em duas partes *não connexas*, as superficies assim limitadas denominam-se *superficies fechadas*.

Supponhamos, salvo indicação em contrario, que as curvas fechadas que empregamos aqui e no que se segue nem se cortam a si mesmas nem tem pontos singulares.

23. Supponhamos agora que a curva fechada, que foi traçada em volta d'um ponto n'uma das folhas da superficie de Riemann, se reduz até que fique infinitamente proxima d'elle; poder-se-ha considerar a superficie de Riemann como uma superficie fechada, cujo limite é constituido por aquella curva infinitamente pequena. O ponto que ella encerra denomina-se então o *ponto limite* da superficie.

Se se isolarem outros pontos da superficie por curvas fechadas A, B, C, etc., o ponto limite e estas curvas determinarão o *limite total* da parte connexa da superficie resultante.

24. Traçadas sobre uma superficie de Riemann ou sobre uma parte d'ella, com o limite total A, B, C, ..., diversas curvas que não passam por ponto algum de ramificação, vamos ver como se caracterizam estas superficies relativamente ao numero e especie d'aquellas linhas.

Uma curva L limita completamente sobre uma superficie S uma parte d'esta, quando não é possível ir d'ahi até ao limite total, ou a qualquer ponto d'uma outra parte, sem atravessar a linha L, que então se chama uma curva *limite completo*.

Assim uma curva fechada $a'b'c'd'$, que se trace dentro d'uma porção de superficie completamente limitada $abcd$ existente em uma só folha da superficie de Riemann, limita de novo uma porção d'ella (fig. 10); o mesmo tem logar (fig. 11) para a curva $a'b'c'd'$, que circumda o ponto de ramificação a_1 .

Tanto n'um caso como no outro não se pôde passar de pontos

do interior de $a'b'c'd'$ para $abcd$ sem cortar o limite d'aquella parte separada: $a'b'c'd'$ é, pois, uma curva limite completo.

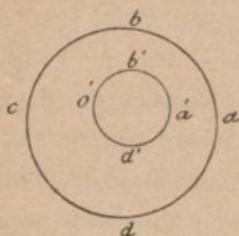


Fig. 10

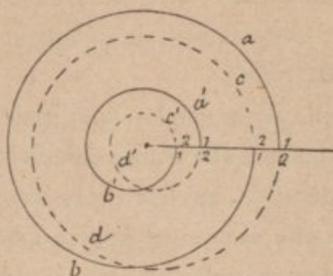


Fig. 11

Se na superfície de Riemann de duas folhas, com os pontos de ramificação a_1 e a_2 ligados pelo córte de ramificação $\overline{a_1 a_2}$ (fig. 12), for traçada a curva C na folha superior, ficará a superfície dividida em duas partes: a primeira é formada por toda a folha superior exceptuando a parte d'ella comprehendida por C ; a segunda por esta parte da folha superior comprehendida por C e por toda a folha inferior.

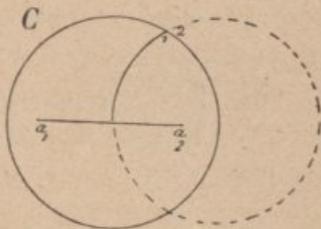


Fig. 12

É evidente que, neste caso, dois pontos infinitamente proximos, tomados d'uma parte e d'outra de C , e por isso existentes na folha superior, não podem ser unidas por um traço continuo sem atravessar o limite C , que por isso será uma curva *limite completo*.

25. Designemos agora por p e p' dois pontos infinitamente proximos d'uma curva L , e situados respectivamente d'um e outro lado de L ; se, por meio de um traço continuo, se poder ir igual-

mente de p e de p' até ao limite total sem cortar L , ou se se podér chegar de p a p' por um traço continuo que não encontre L nem o limite total S , a linha L não limita, por si, completamente parte alguma da superficie considerada; é uma curva *limite não completo*.

Seja, por exemplo, $abcd a' b' c' d'$ uma superficie annular existente n'uma folha d'uma superficie de Riemann; a curva $a'' b'' c'' d''$ (fig. 13) será um *limite não completo*, por isso que de dois pontos fronteiros d'um e d'outro lado d'ella se pôde chegar ao limite total sem a cortar.

Consideremos ainda (fig. 14) uma superficie de Riemann de

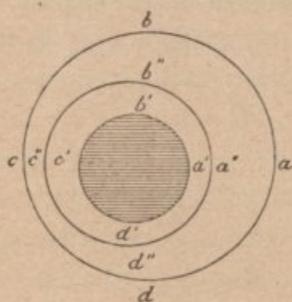


Fig. 13

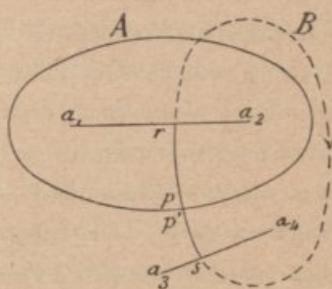


Fig. 14

duas folhas com os quatro pontos de ramificação a_1, a_2, a_3, a_4 , e com os córtes de ramificação $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_3 a_4}$. Se traçarmos a curva A na folha superior, comprehendendo os pontos a_1 e a_2 , poderemos chegar d'um ponto p , situado n'um dos lados de A , ao ponto fronteiro sem cortar A , ao longo do traço $prsp'$ que em r passa para a folha inferior e em s outra vez para a superior. A é, portanto, uma curva *limite não completo*.

Do que n'este numero e no antecedente deixamos dicto se conclue que não é possível estabelecer uma distincção absoluta entre

estas especies de limites e que, pelo contrario, a especificação depende do limite total adoptado.

Systemas de curvas limites

26. Se sobre uma superficie de Riemann se traçar um numero qualquer de curvas fechadas A, B, \dots , *limites completos*, separar-se-hão alli dois *continua* de pontos: para o primeiro (*pontos interiores*), um traço continuo que reuna qualquer dos pontos d'elle ao limite total encontrará aquellas curvas n'um numero *impar* de pontos; para o segundo (*pontos exteriores*), o traço de ligação com o limite total encontra aquellas curvas sómente n'um numero *par* de pontos ou não as encontra.

A, B, \dots determinam assim, pelo seu agrupamento, o *limite completo* d'um *continuum* de pontos (interiores), que é formado pela somma arithmetica das partes connexas comprehendidas por aquellas curvas. Formam um *systema limite completo*.

Desde que as curvas se cortem deixa, porém, isto de ter logar para a somma arithmetica de todos os pontos. Assim, na fig. 15, o *continuum* de pontos interiores é formado só pela parte cheia.

27. Diz-se que n curvas fechadas limites não completos formam, pelo seu agrupamento, um *systema limite não completo*, quando se podem unir ao limite total por um traço continuo, dois pontos infinitamente proximos d'uma qualquer d'essas curvas, tomados d'um e d'outro lado d'ella, sem encontrar nenhuma das n curvas traçadas.

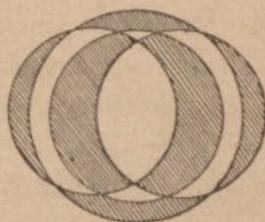


Fig 15

Na superficie de Riemann, com duas folhas e com os tres pontos

de ramificação a_1, a_2, a_3 (fig. 16), os agrupamentos de curvas (A, B), (A, C), (B, C), formam *systemas de curvas limites não completos*.

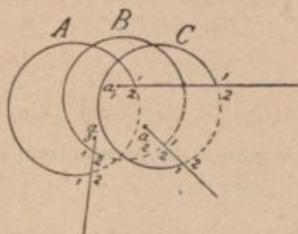


Fig. 16

28. Supponham-se traçadas na superfície de Riemann n curvas limites não completos; e supponha-se mais que $n - 1$ d'essas curvas formam um *systema limite não completo*.

Se todas as n reunidas separam sobre a superfície dois *continua* de pontos taes que para o primeiro é sempre possível reunir por traço continuo qualquer d'estes ao limite total sem encontrar nenhuma das n curvas (*pontos exteriores*), e para o segundo só é possível essa reunião atravessando uma das n curvas, diz-se então que as n curvas formam um *systema limite completo irreductivel*. Na fig. 16 (A, B, C) é um *systema limite completo irreductivel*.

29. Imaginemos agora diversos *systemas irreductiveis* (A), (B), . . . , sem curva commum. Reunidos, separam estes *systemas* dois *continua* distinctos de pontos.

Com effeito, considere-se (fig. 17) uma parte de superfície cujo limite total é (L, L₁), e onde (A) fórma um *systema limite completo irreductivel* e (B) um outro.

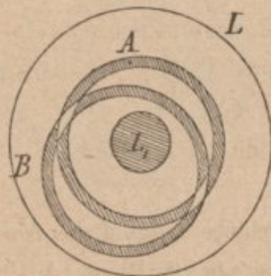


Fig. 17

A reunião de (A) e (B) distingue dois *continua* de pontos. Um composto de todos os *pontos exteriores* que podem ser reunidos ao limite total (L₁ L₁) por traços continuos, que, ou não encontram curva alguma (A) ou (B), ou

as encontram n'um numero par de pontos; outro composto de *pontos interiores*, que as atravessam em um numero impar de pontos (os cheios da figura).

30. Do que deixamos dicto claramente se manifesta a analogia que existe entre um *systema limite completo irreductivel* e uma curva fechada limite completo.

E assim diz-se que n curvas limites não completos formam, pelo seu agrupamento, *um systema limite completo*, quando, sendo possivel reunir por um traço continuo um ponto infinitamente proximo d'uma das curvas ao limite total sem cortar qualquer das n curvas, ou, cortando-as n'um numero par de pontos, sómente é possivel effectuar essa reunião para o ponto fronteiro ao primeiro e tambem infinitamente proximo da curva cortando aquellas n'um numero impar de pontos. As n curvas separam em todo o seu contorno dois *continua* de pontos—*exteriores* e *interiores*. Do primeiro passa-se ao limite total ou não atravessando nenhuma das curvas ou fazendo-o um numero *par* de vezes; do segundo só se passa ao limite total cortando as curvas um numero *impar* de vezes.

31. Sejam, sobre uma superficie de Riemann, (A), (B), (C) tres systemas de curvas fechadas, que não passam por ponto algum de ramificação; supponha-se ainda que (A), (B), (C) formam os systemas limites completos (A, B) e (A, C).

Vamos considerar as posições que póde ter um ponto p da superficie relativamente a estes systemas.

Supponhamos primeiramente que p pertence a algum dos *continua* interiores, respectivamente limitados por (A, B) ou (A, C), *mas que não é commum aos dois*.

Poderá então ser: ou p interior a (A, B) e exterior a (A, C) , ou p exterior a (A, B) e interior a (A, C) .

Vejamos successivamente as duas hypotheses.

No primeiro caso, se ligarmos por um traço continuo o ponto considerado ao limite total, como o p é interior a (A, B) , (A) e (B) podem ser atravessadas dos seguintes modos: as curvas (A) não serem cortadas, e as curvas (B) serem-n'ó um numero *impar* de vezes; — as curvas (A) serem cortadas um numero *par* de vezes, e as curvas (B) um numero *impar*; — as curvas (A) serem cortadas um numero *impar* de vezes, e não serem *vez alguma* cortadas as curvas (B) ; — as curvas (A) serem cortadas um numero *impar* de vezes, e as curvas (B) um numero *par*.

Como, ao mesmo tempo, o ponto p é exterior a (A, C) poderão as curvas (A) e (C) ser cortadas das seguintes maneiras: as curvas (A) um numero *par* de vezes, e as curvas (C) tambem um numero *par*; — as curvas (A) não serem cortadas, e as curvas (C) um numero *par* de vezes; — as curvas (A) serem cortadas um numero *par*, e não o serem *vez alguma* as curvas (C) ; — as curvas (A) serem cortadas um numero *impar*, e igualmente as curvas (C) um *impar* de vezes; — (A) e (C) não serem cortadas.

Podemos concentrar isto da seguinte fórma:

p interior a (A, B)

$$\left. \begin{array}{l} (A), \text{ par ou zero} \dots\dots\dots (B), \text{ impar} \\ (A), \text{ impar} \dots\dots\dots (B), \text{ par ou zero} \end{array} \right\}$$

p exterior a (A, C)

$$\left. \begin{array}{l} (A), \text{ par ou zero} \dots\dots\dots (C), \text{ par ou zero} \\ (A), \text{ impar} \dots\dots\dots (C), \text{ impar} \end{array} \right\}$$

No segundo caso, isto é, se for p exterior a (A, B) e interior a (A, C) analogamente se terá:

p exterior a (A, B)

$$\left. \begin{array}{l} (A), \text{ par ou zero} \dots\dots\dots (B), \text{ par ou zero} \\ (A), \text{ impar} \dots\dots\dots (B), \text{ impar} \end{array} \right\}$$

p interior a (A, C)

$$\left. \begin{array}{l} (A), \text{ par ou zero} \dots\dots\dots (C), \text{ impar} \\ (A), \text{ impar} \dots\dots\dots (C), \text{ par ou zero} \end{array} \right\}$$

D'isto se conclue immediatamente que todos os pontos limitados por (A, B) e por (A, C) , *que não lhes são communs*, só poderão ser ligados por traço continuo ao limite total cortando um numero *impar* de vezes as curvas (B) e (C) ; isto é, que taes pontos formam um *continuum* de que o systema (B, C) é um *limite completo*.

No que deixamos dicto suppoz-se que o ponto p não era commum aos dois *continua* de pontos limitados pelos systemas (A, B) e (A, C) . Supponhamos agora que p é commum aos dois *continua*. N'esse caso virá:

p interior a (A, B)

$$\left. \begin{array}{l} (A), \text{ par ou zero} \dots\dots\dots (B), \text{ impar} \\ (A), \text{ impar} \dots\dots\dots (B), \text{ par ou zero} \end{array} \right\}$$

p interior a (A, C)

$$\left. \begin{array}{l} (A), \text{ par ou zero} \dots\dots\dots (C), \text{ impar} \\ (A), \text{ impar} \dots\dots\dots (C), \text{ par ou zero} \end{array} \right\}$$

Por onde se vê que, ligando por um traço continuo p com o limite total, as curvas (B) e (C) serão cortadas um numero *par* de vezes; isto é, para os pontos que são comprehendidos nos *continua*, respectivamente limitados por (A, B) e por (A, C) e que são communs aos dois systemas, *não é o systema (B, C) um limite completo.*

Considerados os pontos interiores supponhamos, em segundo logar, que o ponto p é exterior a (A, B) e a (A, C); então ter-se-ha:

p exterior a (A, B)

$$\left. \begin{array}{l} \text{(A), } \textit{par} \text{ ou } \textit{zero} \text{ (B), } \textit{par} \text{ ou } \textit{zero} \\ \text{(A), } \textit{impar} \text{ (B), } \textit{impar} \end{array} \right\}$$

p exterior a (A, C)

$$\left. \begin{array}{l} \text{(A), } \textit{par} \text{ ou } \textit{zero} \text{ (C), } \textit{par} \text{ ou } \textit{zero} \\ \text{(A), } \textit{impar} \text{ (C), } \textit{impar} \end{array} \right\}$$

Portanto os pontos que pertencem aos *continua* exteriores a (A, B) e a (A, C) não podem ser completamente limitados por (B, C); isto é, pôde sempre passar-se de qualquer d'elles ao limite total cortando (B) e (C) um numero *par* de vezes.

Vejamos, finalmente, como as curvas (B) ou (C) separam, no systema (B, C), *em todo o seu contorno*, os dois *continua* de pontos — exteriores e interiores.

Se isto, com effeito, tiver logar, dois pontos infinitamente proximos de qualquer das curvas e situados d'um e outro lado d'ella, devem poder ser ligados ao limite total por dois traços que cortem, um d'elles, as curvas (B) e (C) um numero *par* de vezes e, ao mesmo tempo, o outro um numero *impar* de vezes.

Supponhamos, porém, que n'uma certa parte do contorno d'uma das curvas (B) não se realisa isto, e que do ponto p , pertencente a (B, C) e situado d'um dos lados d'uma curva (B), é possível, como do ponto fronteiro p' , chegar ao limite total, tendo cortado um numero *par* de vezes (B) e (C).

Isto poderá effectuar-se: cortando (B) um numero *par* de vezes e (C) um numero *par*; — (B) um numero *par* de vezes, e não cortando (C); — não cortando (B), e cortando (C) um numero *par* de vezes; — (B) um numero *impar* de vezes, e (C) tambem um numero *impar*.

Consideremos o primeiro d'estes quatro casos: as curvas (B) cortadas um numero *par* de vezes e as curvas (C) egualmente um numero *par* de vezes.

O ponto p póde, relativamente ao systema (A, B), ser interior ou exterior. Supponhamol-o interior.

Como p é, ao mesmo tempo, interior ao systema (B, C), será exterior a (A, C); mas o numero de vezes que se atravessam as curvas (C) é *par*: logo será egualmente *par* o numero de vezes que são cortadas as curvas (A), pois o systema (A, C) é limite completo.

Portanto, ao passar de p para o limite total, é *par* o numero de vezes que se atravessam (A) e (B), o que não póde ser por isso que o systema (A, B) é limite completo e, por hypothese, p é um ponto interior do systema (A, B).

Supponhamos agora p exterior relativamente a (A, B). Será então interior em relação ao systema (A, C); mas o numero de vezes que são cortadas as curvas (C) é *par*, portanto *impar* o numero de vezes que são cortadas (A).

Logo será tambem *impar* o numero de vezes que são cortadas (A) e (B), o que não é possível ter logar, attendendo a que p é

exterior relativamente a (A, B) , e (A, B) um systema limite completo.

A consideração dos outros casos possiveis, que indicámos acima, conduz egualmente a resultados absurdos; d'onde concluímos que não pôde ser verdadeira a hypothese de que se partiu, e que portanto as curvas (B) e (C) limitam com effeito *em todo o seu contorno* os dois *continua* de pontos interiores e exteriores.

De tudo o que n'este numero deixamos dicto concluímos que é verdadeiro o seguinte theorema:

THEOREMA: *Se um systema de curvas fechadas (A) , que não passam ponto algum de ramificação, fórma, com outro systema de curvas analogas (B) , o limite completo d'um continuum de pontos d'uma superficie de Riemann; e se ao mesmo tempo o primeiro systema de curvas (A) é com um terceiro systema analogo (C) o limite completo d'um outro continuum de pontos da mesma superficie, o systema (B) , juntamente com (C) , formarão um systema (B, C) que é o limite completo d'um terceiro continuum de pontos composto dos dois primeiros com exclusão dos pontos que lhes são communs.*

Exemplificamos em dois casos simples.

1.º Na superficie de Riemann de duas folhas, e com os tres

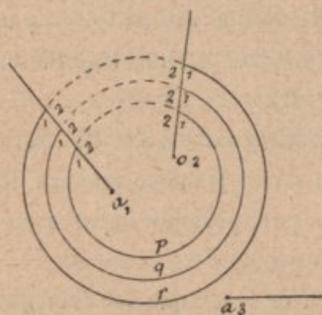


Fig. 18

pontos de ramificação a_1, a_2, a_3 (fig. 18), em que as curvas (p) e (q) formam um systema limite completo (p, q) e em que egualmente as curvas q e r formam (q, r) , é tambem (p, r) um systema limite completo.

2.º Na superficie de Riemann de duas folhas, com os pontos de

ramificação a_1 e a_2 ligados pelo córte de ramificação $\overline{a_1 a_2}$ (fig. 19), as curvas (q) e (r) formarão um systema limite completo (q, r) , pois (p, q) e (p, r) são systemas limites completos: o espaço limitado por (p, q) está, como é claro, na folha superior, em quanto que os espaços limitados por (p, r) e (q, r) se compõem dos espaços correspondentes da folha superior e de toda a folha inferior.

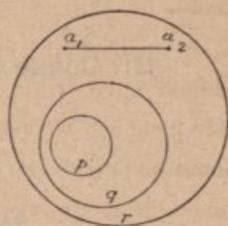


Fig. 19

III. Connexão das superficies de Riemann

Definição da ordem de conexão

32. Uma superficie de Riemann connexa, em que cada linha fechada fórma o limite completo d'uma parte d'ella, denomina-se *simplesmente connexa*.

Quando isto não tem logar, a superficie diz-se *de conexão multipla*.

33. Seja k uma qualquer linha fechada limite não completo e

$$b_1, b_2, \dots b_n$$

n curvas fechadas, que separadamente são limites não completos e reunidas não limitam completamente parte alguma da superficie de Riemann em que estão traçadas; mas supponhamos que k fórma, com parte ou com a totalidade das curvas $b_1, b_2, \dots b_n$, um systema limite completo.

Se designarmos por $c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ outras n curvas quaesquer da natureza das primeiras, será então egualmente c_1 com as linhas $b_1, b_2, \dots b_n$, tomadas em parte ou na totalidade, um systema limite completo.

Se b_r é um elemento commum aos dois systemas, serão

$$b_r \text{ com } k, b_1, b_2, \dots b_{(r-1)}, b_{(r+1)}, \dots b_n$$

e

$$b_r \text{ com } c_1, b_1, b_2, \dots, b_{(r-1)}, b_{(r+1)}, \dots, b_n$$

o limite completo d'uma parte da superficie: logo (n.º 31)

$$k \text{ com } c_1, b_1, b_2, \dots, b_{(r-1)}, b_{(r+1)}, \dots, b_n$$

formará tambem um limite completo.

Se entre aquellas curvas que estão ligadas com k para formar systema limite completo, e aquellas que com c_1 formam egualmente um systema analogo, não ha elemento commum, é claro que pôde sempre ter logar a substituição effectuada.

Por isso que k limita completamente, com parte ou a totalidade das curvas

$$c_1, b_1, \dots, b_{(r-1)}, b_{(r+1)}, \dots, b_n,$$

uma parte de superficie, o mesmo terá logar para a curva c_2 ; observando, comtudo, que entre as linhas que com c_2 devem formar systema limite completo se hão de achar algumas das curvas b , pois que c_1 e c_2 não podem formar um tal systema: continuamos então uma substituição analoga á anterior, e assim por deante.

Concluimos, pois, sem insistir mais que é possivel a substituição das curvas b_1, b_2, \dots, b_n por c_1, c_2, \dots, c_n , e que tem então logar o theorema seguinte:

THEOREMA: *Se designarmos por*

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

n linhas fechadas, que nem separadamente são curvas limites completos, nem junctas formam um systema limite completo d'uma parte

da superfície de Riemann; e por k uma linha qualquer limite não completo, pôde dizer-se que n outras curvas quaesquer da natureza das primeiras

$$c_1, c_2, \dots c_n$$

formam com a linha k um systema limite completo.

34. Mostra-nos o theorema antecedente que o facto de uma curva fechada limite não completo poder formar um systema limite completo com n curvas, que nem separadamente nem junctas limitam completamente parte alguma da superfície, é independente da escolha das n curvas; por isso se definem as superfícies cuja connexão é de ordem $n + 1$, da maneira seguinte:

Uma superfície denomina-se connexa da ordem $n + 1$ quando n'ella se podem traçar n curvas fechadas que, separadamente, são limites não completos e juntas não formam um systema limite completo, com as quaes, porém (em parte ou na totalidade), cada uma outra curva fechada constitue um systema limite completo.

Esta definição, que se baseia essencialmente na escolha arbitraria das n curvas fechadas, é perfeitamente geral e precisa.

Com effeito, se a propriedade característica que ella enuncia tiver logar para um certo systema de n curvas, subsistirá ainda para outro qualquer systema do mesmo genero; além d'isso ficarão, por ella, perfeitamente separadas as superfícies que apresentam uma connexão de multiplicidade differente. Uma superfície connexa, que a definição precedente indicar ser da ordem $n + 1$, nunca se poderá confundir com outra de ordem n ou de ordem $n + 2$: com effeito, sobre uma superfície de connexão multipla de ordem n , n curvas fechadas limitam *sempre* completamente uma parte da superfície, o que não tem logar na superfície con-

nexa de ordem $n + 1$; e na de ordem $n + 2$ não podem sempre $n + 1$ curvas fechadas formar um systema limite completo, o que tem logar para a superficie de connexão multipla de ordem $n + 1$.

**Transformação das superficies de Riemann de connexão multipla
em superficies simplesmente connexas**

35. Classificadas as superficies de Riemann pela sua ordem de connexão, vamos occupar-nos da operação, essencial nas theorias de Riemann, da transformação das superficies de connexão de ordem elevada em connexas simples; operação que, como veremos, é executada pela introdução de linhas especiaes e que passamos a definir.

36. Sobre uma superficie de Riemann de connexão elevada, partindo d'um ponto do limite total, trace-se, n'um movimento continuo, uma linha até qualquer outro ponto do mesmo limite sem que no seu percurso ella o tenha tocado ou atravessado: e execute-se isto de maneira que as partes da superficie que estão situadas d'um e outro lado d'aquelle traço continuo, não deixem de ficar reciprocamente connexas.

Considerem-se os dois lados da linha em questão como novos limites da superficie.

Se observarmos, porém, que esses novos limites devem ser considerados como taes não só depois de effectuado o traço mas mesmo durante a sua execução, poder-se-ha accrescentar que a linha traçada póde terminar n'um ponto do seu percurso anterior e nunca cortar-se a si propria.

Uma linha descripta n'estas condições, e assim definida, constitue o que Riemann denomina um *querschnitt*.

Partindo de casos definidos simples, com toda a facilidade se vê immediatamente a possibilidade da transformação.

Tomemos, por exemplo, a superfície annular (fig. 20), de limite total L e L_1 .

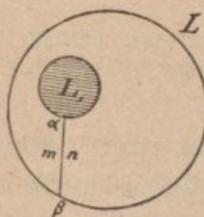


Fig. 20

Uma linha $\alpha\beta$ que liga dois pontos α e β do limite total, e cujos lados m e n se consideram como novos limites, não alterando a conexão reciproca das partes da superfície situadas d'um e d'outro lado d'ella, será um *querschnitt* d'essa superfície que, sendo de conexão multipla de ordem 2, se transforma

n'uma simples connexa.

Na fig. 21 os *querschnitte* $\alpha\beta$ e $\gamma\delta$ transformam semelhantemente a superfície cujo limite total é LL_1L_2 e que é de conexão multipla de ordem 3 n'uma simplesmente connexa.

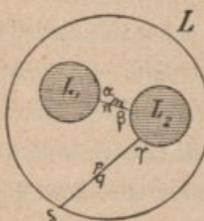


Fig. 21

37. N'uma superfície de conexão elevada póde sempre, por definição, ser traçada uma curva fechada limite não completo; isto é, partindo de dois pontos infinitamente próximos,

situados d'um e outro lado d'ella, poderá chegar-se por dois traços continuos que não se cortam a si proprios, ao limite total da superfície sem tocar aquella curva. A conexão reciproca das partes adjacentes ás linhas traçadas não é destruída, pois que a curva limite não completo conduz d'um ponto n'um lado d'ellas ao ponto opposto do outro lado.

D'isto concluímos que a linha resultante da reunião dos dois traços póde ser considerada como um *querschnitt*, e portanto o seguinte theorema:

THEOREMA: *N'uma superficie de connexão multipla é sempre possível traçar pelo menos um querschnitt.*

38. Supponhamos dada uma superficie de connexão multipla de ordem $n + 1$.

Sobre uma tal superficie é sempre possível traçar n curvas limites não completos, e que junctas formam igualmente um systema limite não completo. Tracemos na superficie um *querschnitt*, que não encontre nenhuma d'estas n linhas: por isso que o *querschnitt* não destrua a connexão reciproca das duas partes da superficie que lhe são adjacentes, poder-se-ha ligar por um traço continuo um ponto do lado d'elle ao fronteiro do lado opposto, e este traço formará uma nova linha limite não completo, que, com as n linhas fechadas existentes na superficie, deverá formar um systema limite completo: mas isto não póde ter lugar, pois o *querschnitt* liga dois pontos oppostos da ultima linha traçada com o limite total da superficie sem cortar nem esta curva nem, por hypothese, qualquer das outras n .

Não é possível, portanto, a supposição d'onde partimos, e assim conclue-se que é verdadeiro o theorema seguinte:

THEOREMA: *N'uma superficie de connexão multipla de ordem $n + 1$ um querschnitt qualquer encontra pelo menos uma das n curvas limites não completos, que definem a ordem de connexão d'aquella superficie.*

39. Estabelecidos os dois theoremas antecedentes passamos ao theorema fundamental da transformação.

Supponhamos que a superficie S , de que se tracta, é de connexão multipla de ordem $n + 1$ e completamente fechada: isto é, que um dado ponto d'ella foi cercado por uma linha infinitamente

proxima d'elle, que deve ser considerada como limite total da superficie.

Em S imaginemos traçado um *querschnitt*, e designemos por S' a superficie que tem por limites os de S e, além d'isso, os dois lados do *querschnitt*.

Pertendemos demonstrar que S' é uma superficie de connexão de ordem inferior a $n + 1$.

Com effeito, supponha-se que a introdução do *querschnitt* não abaixou a ordem de connexão da superficie; poder-se-hão então traçar em S' n curvas fechadas, que separadamente são limites não completos, e que junctas devem tambem formar um systema limite não completo.

Ora o *querschnitt* não corta nenhuma das n curvas existentes em S' , e como os limites de S' são os mesmos de S mais os lados do *querschnitt*, segue-se que elle tambem não corta as n curvas consideradas em S .

Por outro lado é possível, sem cortar as proprias n linhas, chegar de pontos do *continuum* interior ao limite total de S' , isto é, ao limite de S ou ao *querschnitt*: mas n'este ultimo caso, caminhando ao longo do *querschnitt*, chega-se tambem ao limite de S , e por isso póde dizer-se que é sempre possível chegar ao limite total de S .

Na superficie S connexa de ordem $n + 1$ existem, pois, n curvas que formam um systema limite não completo, e das quaes nenhuma é cortada pelo *querschnitt*: mas, pelo theorema do numero anterior, não póde isto ter logar. Haverá, pois, em S' , quando muito, $(n - 1)$ curvas fechadas, taes que separadas sejam limites não completos e junctos formem um systema limite não completo.

D'aqui concluimos que *n'uma superficie de connexão multipla*

a introdução d'um querschnitt abaixa a ordem de conexão da superfície.

Consideremos, por exemplo, a superfície de Riemann S fechada, de duas folhas com os tres pontos de ramificação (fig. 22), a_1, a_2, a_3 , e de conexão múltipla de ordem 3. A é o ponto limite.

Sejam b_1 e b_2 curvas fechadas que isoladamente são limites não completos e juntas formam um systema limite não completo.

Podemos, partindo de pontos opostos da curva b_2 , traçar duas linhas continuas q_1 e q_2 para o limite total A da superfície: esta linha $q_1 q_2$ será um *querschnitt* de S , e os seus dois lados formarão novos limites para a superfície que agora designamos por S' .

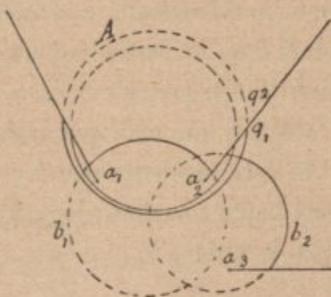


Fig. 22

A nova superfície S' é conexa de ordem inferior a 3.

Com effeito a linha b_1 , que supozemos existente em S , pertence totalmente á nova superfície S' , por isso que não foi cortada em ponto algum pelo *querschnitt*; e se ella formava em S uma linha limite não completo, é claro que em S' o formará igualmente, pois na verdade para passar de S para S' não se fez mais do que introduzir um novo limite. Portanto se uma qualquer linha fechada em S' formar com b_1 o limite completo d'uma porção da superfície, teremos assim visto que a conexão de S' é da ordem 2.

Ora se k for uma linha fechada existente em S que não é cortada pelo *querschnitt*, essa linha deverá formar com ambas ou só com uma das curvas b_1, b_2 um systema limite completo; mas, por isso que de q_1 e q_2 se póde chegar ao limite total sem tocar

as outras linhas b_1 e k , segue-se que b_2 se deve excluir, e portanto k e b_1 formam o limite completo d'uma parte da superfície S : o que bem se vê na figura 22.

Mas, como já dissemos, os limites de S' são os de S mais os lados do *querschnitt*, e a estes também não se pôde chegar sem cortar k ou b_1 partindo d'um ponto do *continuum* interior do sistema (k, b_1) , pois n'este caso, ao longo do *querschnitt*, se poderia ir até A o que pelo que acabamos de ver não pôde ter lugar.

É, pois, manifesto que k e b_1 formam na superfície S' um sistema limite completo; logo S' é uma superfície de conexão múltipla de ordem 2.

40. Vejamos agora como a introdução de um *querschnitt* reduz a superfície conexa de ordem $n + 1$ exactamente a uma de ordem n ; isto é, que a superfície de conexão $n + 1$ não pôde, pela introdução de um *querschnitt*, ser transformada n'outra de conexão de ordem inferior a n .

Supponhamos que a introdução de um *querschnitt* transformou S em S' , cuja conexão é de ordem $n - h$.

Se em S' se traçarem $n - h - 1$ curvas fechadas

$$b_1, b_2, \dots, b_{(n-h-1)}$$

que formam um sistema limite não completo, uma outra curva que também não limite completamente parte alguma da superfície S' será ahi, e por isso também em S com parte ou a totalidade das curvas

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-h-1}$$

o limite completo d'uma parte de superfície.

Junctemos ás $n-h-1$ curvas uma outra b que ligue dois pontos fronteiros, situados d'um e outro lado do *querschnitt*.

Pertendemos demonstrar que uma qualquer linha fechada k , situada em S , fórma, com todas ou com parte das curvas

$$b_1, b_2, \dots b_{n-h-1}, b$$

um systema limite completo.

Temos dois casos a considerar:

1.º A linha k não encontra o *querschnitt*.

N'este caso existe k totalmente em S' , e por isso deverá formar com as $n-h-1$ linhas ahí traçadas

$$b_1, b_2, \dots b_{(n-h-1)}$$

um systema limite completo; e o mesmo tem logar para S . Isto é, k fórma com parte das linhas

$$b_1, b_2, \dots b_{n-h-1} b$$

em S um systema limite completo.

2.º A linha k encontra o *querschnitt*.

Sejam (fig. 23) α e β os dois pontos do limite total que são ligados pelo *querschnitt*, e k' uma linha que encerra b e não corta o *querschnitt*, e que com k e b fórma um systema limite completo em S' . Por isso que k' não corta o *querschnitt* deve

$$k' \text{ com } b_1, b_2, \dots b_{n-h-1}$$

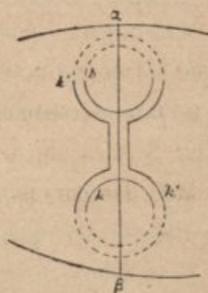


Fig. 23

formar um systema limite completo em S' e portanto em S .
E como

$$k' \text{ com } k, b$$

fôrma tambem um systema limite completo, segue-se (n.º 31)
que, como no 1.º caso,

$$k \text{ com } b_1, b_2, \dots, b_{(n-h-1)}, b$$

em parte ou na totalidade fôrma um systema limite completo.
Ora, como é facil de ver, as linhas

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-h-1}, b$$

constituem em S um systema limite não completo: junctamente
com uma linha fechada k limite não completo, formam (como
acabamos de ver) um systema limite completo em S , portanto a
superficie S será connexa da ordem $n - h + 1$.

Mas, por hypothese, S é de connexão multipla de ordem $n + 1$,
logo deve ser $h = 0$; isto é, a superficie S' é connexa de ordem
 n , como pertendiamos demonstrar.

Do que deixamos dicto se conclue o theorema seguinte:

THEOREMA: *Uma superficie de Riemann S de connexão multipla de ordem $n + 1$ é transformada por um querschnitt n'uma superficie S' connexa de ordem n ,*

41. COROLLARIO I. *Uma superficie de connexão simples é dividida por um querschnitt em duas partes desconexas.*

Com effeito a superficie simplesmente connexa é de ordem de
connexão 1, e como a introdução do *querschnitt* abaixa a ordem

de conexão de uma unidade, será a superfície resultante de conexão 0; isto é, ficará dividida em duas partes desconexas.

42. COROLLARIO II. *Se, por meio de n querschnitte, se transformar uma superfície S conexa de ordem $n + 1$ n'uma simples conexa S' , o novo limite total será constituído todo por um traço continuo.*

Supponhamos que isto não tem logar, e que, percorrendo o limite total de S , se tenha de passar do ponto α ao ponto β (fig. 24).

Se ligarmos α com β por um traço continuo p é claro, pelo que fica dicto, que a superfície é assim dividida em duas partes desconexas; mas, por outro lado, se se consideram dois pontos γ e δ situados d'um e outro lado de p , é tambem manifesto que ao longo de p e

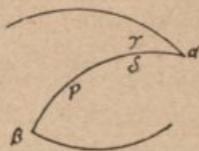


Fig. 24

das linhas que formam o limite total se poderá, sem cortar os limites, passar n'um traço continuo de γ para δ .

Chegamos, pois, a dois resultados contradictorios: que γ e δ estão situados em partes da superfície que são reciprocamente desconexas, e que se póde sem passar os limites chegar de γ a δ em traço continuo. Concluimos, portanto, que não póde ter logar a hypothese de que partimos e que é verdadeira a proposição enunciada.

Methodo de transformação

43. Na transformação das superfícies de Riemann de conexão elevada em superfícies simples conexas, emprega-se muitas vezes, para traçar os *querschnitte*, o methodo que vamos indicar.

Consideremos em primeiro logar uma superfície de Riemann S fechada e de conexão multipla de ordem $(n + 1)$.

Trace-se n'ella uma linha fechada b_1 que seja limite não completo: por isso que o limite total da superficie em questão consiste n'um ponto A, escolhido arbitrariamente, segue-se que b_1 pôde considerar-se como ligando pelas suas extremidades dois pontos do limite total A (fig. 25); e como, além d'isso, se podem

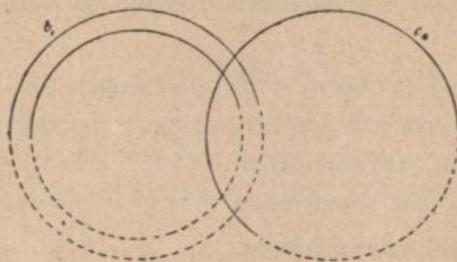


Fig. 25

unir dois pontos infinitamente proximos de b_1 e fronteiros por um traço continuo c_1 que não toca o limite total, poder-se-ha considerar a linha b_1 como um *querschnitt* de S. Mas a linha c_1 também se deve considerar como um segundo *querschnitt*, pois não só são ligados por ella dois pontos fronteiros do primeiro *querschnitt*, agora já considerado como limite, mas uma qualquer linha infinitamente proxima de b_1 unirá dois pontos fronteiros infinitamente proximos de c_1 sem tocar os limites.

A superficie S ficará, pois, transformada por b_1 e c_1 n'uma superficie de connexão de ordem $(n-1)$, cujo limite total é formado pelos dois lados das linhas b_1 e c_1 que, como indica a fig. 26,

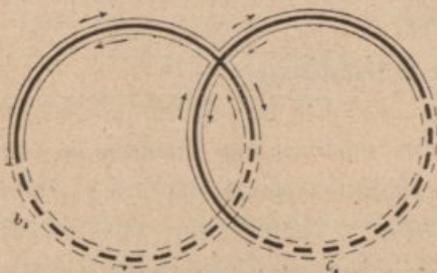


Fig. 26

poderão ser percorridos n'um movimento continuo.

Trace-se em seguida (fig. 27), uma linha fechada b_2 na superficie de connexão d'ordem $(n-1)$, que seja limite não completo, e una-se um ponto

de b_2 com um de c_1 por um traço continuo d_1 . As linhas b_2 e d_1

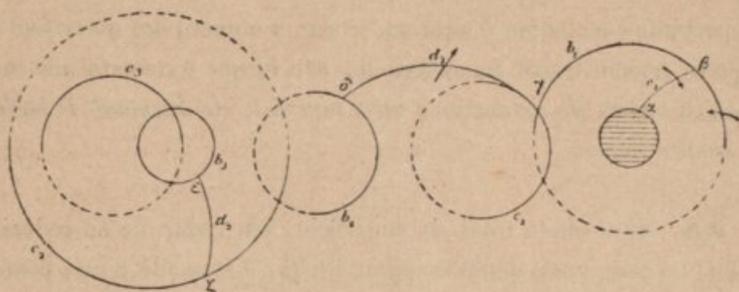


Fig. 27

formam um novo *querschnitt*, por isso que partindo d'um ponto do limite total a linha $b_2 d_1$ termina n'um ponto de si mesma e divide a superficie em partes que conservam a sua mutua connexão.

Se ligarmos agora dois pontos infinitamente proximos e fronteiros de b_2 por uma linha continua c_2 , será esta um novo *querschnitt*; com effeito c_2 liga os dois pontos fronteiros de b_2 , que são dois pontos do limite total; além d'isso pelo lado interior de b_2 póde chegar-se, por um traço continuo infinitamente proximo d'esta linha, d'um ponto de c_2 ao que lhe fica fronteiro.

A connexão da superficie tem-se assim reduzido á ordem $(n-3)$.

Descrevendo uma outra linha fechada limite não completo b_3 , liga-se com c_2 por uma linha continua d_2 ; esta, juncta com b_3 , será ainda um *querschnitt*.

Continuando assim ir-se-ha abaixando a ordem de connexão, até que, depois de traçado um numero sufficiente de *querschnitte*, se obterá uma superficie de connexão simples.

44. Este processo de transformação mostra-nos immediatamente uma propriedade notavel das superficies de Riemann.

Com effeito, é evidente que a existencia de um *querschnitt* d_h traz como necessariamente possível a existencia d'um outro c_{h+1} , e portanto concluímos d'aqui que é *par* o numero dos *querschnitte* que se podem traçar na superficie; isto é, que o numero que indica a ordem de *connexão* d'uma superficie de Riemann fechada é sempre *impar*.

45. Se o limite total da superficie, em lugar de se reduzir como no caso antecedente ao ponto limite, é formado d'este ponto e d'outras curvas, o processo de transformação da superficie de Riemann de *connexão* multipla n'outra de *connexão* simples é o seguinte.

Primeiramente, abstrahindo de todas as partes do limite total, á excepção do ponto limite, transforma-se a superficie pelo processo acima indicado n'outra de *connexão* simples S' . Feito isto, consideram-se como limites as linhas a que não se attendeu, o que converte a superficie S' n'uma de *connexão* multipla S'' .

Ligando em seguida, por traços continuos, um ponto de cada uma das curvas agora introduzidas respectivamente com um ponto do limite total, esses traços são novos *querschnitte*, que transformam S'' n'uma outra simplesmente *connexa* S'_1 ; com effeito, os novos *querschnitte* impedem que em volta das curvas que ultimamente se consideraram sejam traçadas outras curvas fechadas (o que poderia dar limites não completos), e os primeiros fazem com que quaesquer outras curvas fechadas limitem completamente uma parte da superficie: quer dizer, qualquer curva fechada, traçada em S'_1 , será uma curva limite completo; portanto é S'_1 uma superficie simplesmente *connexa*.

III

INTEGRAES SOBRE AS SUPERFICIES DE RIEMANN

46. Na theoria dos integraes de funcções de variaveis complexas o caminho da integração é um elemento dos mais importantes na definição d'estes integraes: no que se segue vamos analysar a influencia que um tal caminho exerce sobre os resultados da integração effectuada sobre as superficies de Riemann.

Integraes tomados sobre uma superficie simplesmente connexa

47. Para estudar a maneira como caminhos diversos de integração, entre os mesmos dois pontos inicial e final, podem conduzir a resultados differentes, e ver como isto tem logar para as superficies que na segunda parte apresentámos, tomou Riemann para ponto de partida o theorema seguinte da reduccão de um dado integral duplo a outro integral simples:

THEOREMA: *Sejam*

$$U(\xi, \eta), \quad V(\xi, \eta)$$

duas funcções das variaveis reaes ξ e η que têm valores determi-

nados para cada ponto d'uma parte completamente limitada d'uma dada superficie de Riemann, e que são para os pontos d'esta parte da superficie, finitas e continuas, podendo as derivadas parciais d'ellas tornar-se infinitas para certos pontos isolados: n'este caso o integral

$$\iint \left(\frac{dV}{d\xi} - \frac{dU}{d\eta} \right) d\xi d\eta$$

estendido a todos os elementos da porção de superficie completamente limitada, póde reduzir-se ao integral

$$\int (U d\xi + V d\eta)$$

tomado sobre o limite da superficie no sentido directo.

A demonstração d'esta proposição, que é um caso especial do theorema de Green, é para as superficies de Riemann inteiramente analogia á demonstração ordinaria, em que não insistiremos.

Observamos sómente que, como a superficie de Riemann é, em geral, composta de varias folhas, as linhas parallelas aos eixos coordenados se devem traçar (fig. 28) em todas as folhas, passando tambem pelos pontos de ramificação que existam no espaço que se considera. Poderão assim pertencer na avaliação do integral

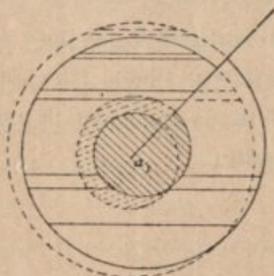


Fig. 28

$$\iint \frac{dV}{d\xi} d\xi d\eta$$

a um determinado η muitas fitas sobre-

postas, infinitamente estreitas, em que a porção de superfície considerada se suppõe decomposta, parallelamente ao eixo dos ξ . E o mesmo relativamente a ξ , quando se avalia o integral

$$\iint \frac{dU}{d\eta} d\xi d\eta.$$

48. Seja

$$\xi + i\eta = x;$$

e

$$f(\xi + i\eta) = u + iv$$

uma função tal que uma parte que se considere da superfície de Riemann que lhe pertence seja idêntica com a porção de superfície proposta; e supponhamos ainda que n'aquella parte completamente limitada da superfície a função é finita e continua.

Teremos

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (u + iv) (d\xi + id\eta) = \int (ud\xi - vd\eta) + \\ &+ i \int (vd\xi + ud\eta); \end{aligned}$$

mas, pelo theorema anterior, é

$$\int (ud\xi - vd\eta) = \iint \left(-\frac{dv}{d\xi} - \frac{du}{d\eta} \right) d\xi d\eta$$

$$\int (vd\xi + ud\eta) = \iint \left(\frac{du}{d\xi} - \frac{dv}{d\eta} \right) d\xi d\eta$$

e como devem ser

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{dv}{d\eta}, \quad \frac{du}{d\eta} = -\frac{dv}{d\xi},$$

será

$$\int f(x) dx = 0.$$

Portanto: o integral $\int f(x) dx$, tomado no sentido directo sobre as linhas que formam o limite completo d'uma parte da superficie de Riemann, é nullo, suppondo que a funcção $f(x)$ é finita e continua dentro d'aquelle espaço limitado.

49. Supponhamos que no espaço completamente limitado que se considera existem pontos de discontinuidade: para reduzir esse caso ao antecedente encerramos os pontos de discontinuidade por linbas fechadas infinitamente proximas d'elles, e que serão consideradas como limites na porção de superficie já anteriormente limitada.

O integral estendido a todo o novo limite terá um valor nullo:

com effeito, o espaço que resta depois de effectuada a separação dos pontos de discontinuidade é completamente limitado, e além d'isso $f(x)$ satisfaz agora ás condições necessarias para que tenha logar a proposição mencionada acima. Na superficie de Riemann de duas folhas (fig. 29), em que α

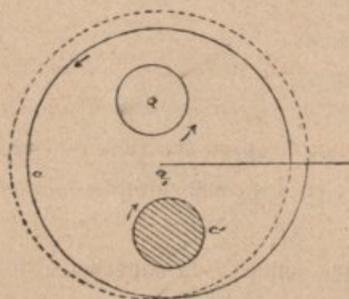


Fig. 29

é um ponto de discontinuidade e em que a funcção é finita e continua no resto do espaço limitado por c' , teremos

$$\int_{\hat{c}} f(x) dx + \int_{\hat{c}'} f(x) dx - \int_{\hat{c}''} f(x) dx = 0.$$

Podemos por consequencia formular, em geral, o theorema seguinte:

THEOREMA: *O integral de $f(x)$, tomado sobre o limite completo d'uma porção de superficie de Riemann, dentro da qual existem pontos de discontinuidade, é igual á somma dos integraes tomados sobre curvas infinitamente pequenas que encerrem aquelles pontos, no sentido directo, relativamente á area que ellas envolvem.*

50. COROLLARIO I. *Cada integral curvilineo, fechado, tomado sobre uma superficie simples connexa pertencente a $f(x)$ é nullo, quando dentro do espaço limitado aquella funcção é finita e continua.*

Isto é evidente logo que se observè que, n'uma parte simplesmente connexa da superficie de Riemann da funcção $f(x)$, qualquer curva fechada fórma o limite completo d'um *continuum* de pontos.

51. COROLLARIO II. *Diversos caminhos de integração, tomados entre os mesmos pontos limites n'uma porção simplesmente connexa d'uma superficie de Riemann, conduzem ao mesmo resultado se a funcção é finita e continua dentro do espaço completamente limitado por aquelles caminhos.*

Com effeito, n'uma parte simples connexa da superficie, dois caminhos de integração entre x_0 e x_1 formarão o limite completo

d'um certo espaço no qual se a funcção $f(x)$ é ali continua e finita será, pelo theorema demonstrado,

$$\int_c^{x_1} f(x) dx + \int_{c'}^{x_0} f(x) dx = 0;$$

logo

$$\int_c^{x_1} f(x) dx = \int_{c'}^{x_0} f(x) dx.$$

52. COROLLARIO III. *Numa porção simplesmente connexa d'uma superficie de Riemann o integral de $f(x)$, sobre um caminho c' (fig. 30), é igual ao integral tomado sobre o caminho c mais a somma dos integraes tomados em volta dos pontos de discontinuidade comprehendidos entre c e c' .*

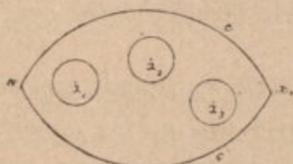


Fig. 30

Com effeito, sendo

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

os pontos de discontinuidade é, pelo theorema,

$$\int_{c'}^{x_1} f(x) dx + \int_c^{x_0} f(x) dx - \int_{a_1} f(x) dx - \int_{a_2} f(x) dx - \dots = 0$$

ou

$$\int_{c'}^{x_1} f(x) dx = \int_c^{x_0} f(x) dx + \sum_1^n \int_{a_i} f(x) dx.$$

53. Supponhamos dada uma parte P completamente limitada da superficie de Riemann da funcção $f(x)$, de connexão multipla,

e que contém pontos de discontinuidade. Tracem-se em volta d'estes pontos de discontinuidade curvas fechadas, infinitamente proximas d'elles, que consideraremos como novos limites da superficie.

Fazendo, pelos methodos expostos na segunda parte, a transformação da superficie assim novamente limitada, por meio de *querschnitte*, obtem-se uma porção de superficie P' de conexão simples.

Em P' , portanto, qualquer curva fechada constituirá, por si só, um limite completo, e não poderá encerrar ponto de discontinuidade algum, pois que se isso podesse ter logar a curva fechada seria, por si só, um limite não completo, e sómente com outras que encerrassem o ponto de discontinuidade poderia formar um systema limite completo.

Segue-se, pois, d'isto e do que deixamos dicto no numero anterior, que na porção de superficie P' o integral de $f(x)$, tomado sobre uma curva fechada, terá constantemente o valor zero, e que o resultado da integração executada, seguindo caminhos diferentes entre os mesmos pontos inicial e final, é sempre o mesmo.

Como a superficie total S se póde sempre considerar como uma superficie fechada, podemos tambem generalisar o anterior a toda a superficie de Riemann da funcção $f(x)$, e assim vemos que o integral da funcção que em S póde, para os diferentes caminhos de integração, ter no mesmo ponto x diversos valores, sobre a superficie S' terá, pelo contrario, sempre o mesmo valor.

Podemos, por conseguinte, enunciar a seguinte importante proposição:

*A superficie de Riemann S d'uma funcção $f(x)$, depois que, pela exclusão dos pontos de discontinuidade e por meio de *querschnitte*,*

foi transformada n'uma superficie S' de connexão simples, é o logar geometrico dos pontos dos quaes o integral $\int_{x_0}^x f(x) dx$ é uma funcção uniforme.

Periodos elementares

54. Resta-nos agora ver como é possível exprimir o valor d'um integral qualquer, tomado sobre uma superficie de Riemann de connexão multipla, n'outro cujo caminho de integração se estenda entre os mesmos pontos, inicial e final, mas considerado na superficie S' de connexão simples.

E assim, resolvida uma tal questão, poderemos determinar como estão uns para os outros os valores dos integraes tomados sobre caminhos arbitrarios entre os mesmos pontos d'uma superficie de Riemann de connexão multipla, tendo reduzido o problema a funcções uniformes.

55. Designemos por l um *querschnitt* da superficie S sobre que se estende o caminho m da integração de x_0 a x_1 (fig. 31);

e seja p uma linha que na superficie simplesmente connexa S' liga os dois pontos α e β situados sobre m e infinitamente proximos do *querschnitt* l .

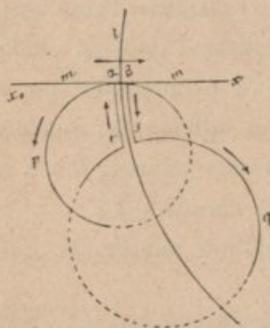


Fig. 31

O integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$, tomado na superficie S' , terá, pelo que acima deixamos dicto, um valor igual á somma dos tres integraes estendidos respectivamente ao longo das linhas $x_0 \alpha$, p , βx_1 ; por-

tanto, cada integral tomado em S de x_0 a x_1 que atravessa uma vez o querschnitt l tem o mesmo valor que o integral tomado sobre S' entre os mesmos limites menos o integral tomado ao longo de p em S' na direcção indicada na figura 31.

Quando o caminho de integração corta o querschnitt n'um outro ponto tem isto ainda logar.

Com effeito, supponhamos cortado o querschnitt l n'um outro ponto e seja, para esse ponto, q uma linha analogá á linha já considerada p (fig. 31): r e s são duas linhas infinitamente aproximadas de l e que levam a α e β .

As linhas p, s, q, r formam em S' um caminho fechado, e por isso será

$$\int_{p s q r} f(x) dx = 0$$

e

$$\int_p f(x) dx + \int_s f(x) dx + \int_q f(x) dx + \int_r f(x) dx = 0;$$

mas, como é manifesto,

$$\int_s f(x) dx + \int_r f(x) dx = 0,$$

e, além d'isso, como p e q são percorridas em sentidos differentes, será

$$\int_p f(x) dx = \int_q f(x) dx$$

quando a integração sobre p e q for effectuada no mesmo sentido.

Tem portanto logar o que acima dissemos sobre toda a porção

do *querschnitt* comprehendida entre dois pontos de encontro successivos quer com um outro *querschnitt* quer com o limite total.

Isto que deixamos dicto applica-se evidentemente a qualquer outro *querschnitt* traçado na superficie.

Vamos em seguida considerar os valores d'estes diversos integraes que em S' levam d'um ponto situado d'um lado do *querschnitte* infinitamente proximo d'elle, ao ponto fronteiro.

56. Dada a superficie de Riemann de connexão multipla de ordem $n + 1$ supponmos que ella foi transformada n'outra de connexão simples pelo methodo que apresentámos no final da segunda parte. Consideraremos, como ahi, successivamente dois casos.

1.º A superficie é completamente fechada e tem por ponto limite A.

As linhas que n'este caso operam a transformação da superficie S em S' são as designadas na figura 27 por

$$b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$$

Supponhamos primeiramente que o caminho da integração atravessa uma das linhas d : vejamos qual é o valor que tem o integral tomado em S' pelo caminho que conduz d'um ponto infinitamente proximo de d_1 ao ponto que lhe fica fronteiro. Para effectuar um tal percurso pode-se caminhar ao longo de b_1 e c_1 percorrendo successivamente os seus dois lados (fig. 26) em sentidos oppositos: e como $f(x)$ tem dos dois lados do *querschnitt* valores infinitamente proximos, os elementos do integral tomado por aquelle caminho destruir-se-hão.

Vemos, pois, que a passagem dos *querschnitte* d não introduz nenhuma mudança brusca no valor integral.

Temos assim de attender unicamente á passagem das linhas da natureza de b e c .

Quando o caminho de integração atravessar b_1 para passar, em S' , do ponto proximo de b_1 ao que lhe fica defronte, poder-se-ha seguir a curva c_1 , o que dará um integral que designamos por I_1 , e isto em toda a extensão de b_1 . Da mesma maneira a passagem de c_1 dará um integral V_1 tomado ao longo de b_1 .

Analogamente na passagem de b_2 obter-se-ha um integral I_2 tomado ao longo de c_2 ; e quando fôr c_2 o *querschnitt* cortado virá um integral V_2 ao longo de b_2 ; etc.

Concluimos que o integral $\int_{x_0}^x f(x) dx$ tomado na superficie S , em que $f(x)$ é uniforme, entre dois pontos por um caminho qualquer tem no ponto final um valor w que só differe do valor uniforme w' do mesmo integral tomado entre os mesmos pontos em S' , de multiplos inteiros dos integraes relativos ás passagens dos *querschnitte*

$$I_1, I_2, \dots, V_1, V_2, \dots,$$

e que é portanto

$$w = w' + m_1 I_1 + m'_1 V_1 + m_2 I_2 + m'_2 V_2 + \dots,$$

em que m_1, m'_1, m_2, \dots são numeros inteiros, que indicam as vezes que o caminho de integração atravessa cada *querschnitt*, e o sentido da passagem.

2.º Supponhamos, porém, que o limite total da superficie em questão, não se reduzindo ao *ponto limite*, é composto d'outras curvas além d'este ponto. Então o processo de transformação da superficie S na simples connexa S' faz com que tenhamos a attender, além das linhas b, c, d , tambem ás linhas e .

Consideremos o *querschnitt* e_1 como o unico da natureza de e que foi necessario executar.

Se o caminho da integraçãõ atravessa e_1 ter-se-ha, como é claro, a ajunctar ao integral tomado em S' o integral tomado ao longo da curva agora tambem considerada como fazendo parte do limite total, integral que designamos por E_1 .

No caso anterior vimos que a passagem das linhas d não produzia mudança brusca no valor do integral; no caso presente, porém, já não podemos dizer o mesmo, e torna-se necessario precisar a alteraçãõ que uma tal passagem pôde produzir.

Quando o caminho da integraçãõ corta d_1 , como indica a figura 27, o integral que temos a ajunctar é, como dissemos, o que obtem pela dupla circumvoluçãõ de b_1 e c_1 : ora este integral, que era anteriormente nullo, já não o é, pois que n'aquelle percurso foi cortado o *querschnitt* e_1 , resultando assim para a passagem de d_1 um augmento E_1 no valor integral.

A passagem de b_1 n'uma das partes comprehendida entre β e γ dará, como facilmente se vê, $I_1 - E_1$, e na parte restante que fica entre β e γ simplesmente I_1 .

Se for c_1 o *querschnitt* cortado obter-se-hão da mesma fórma resultados expressos em I'_1 e E_1 . Das passagens pelos *querschnitte* b_2, c_2 resultarão integraes expressos em I_2, I'_2 e E_1 : etc.

Se em logar de existir na superficie um unico *querschnitt* e_1 da natureza de e houver outros e_2, e_3, \dots , chegar-se-ha a resultados inteiramente analogos.

Podemos, portanto, concluir que *um integral*

$$\int_{x_0}^x f(x) dx$$

tomado sobre a superficie de Riemann S de connexão multipla,

sobre a qual $f(x)$ é uma função uniforme, se pôde deduzir do integral tomado entre os mesmos limites sobre a superfície resultante da primeira S' e de conexão simples, pela addicção de multiplos inteiros de quantidades constantes independentes do caminho de integração

$$I_1, I_2, \dots, I'_1, I'_2, \dots, E_1, E_2, \dots$$

Será, pois,

$$\int_S^x f(x) dx = \int_{S'}^x f(x) dx + m_1 I_1 + m_2 I_2 + \dots + m'_1 I'_1 + m'_2 I'_2 + \\ + n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots$$

em que são

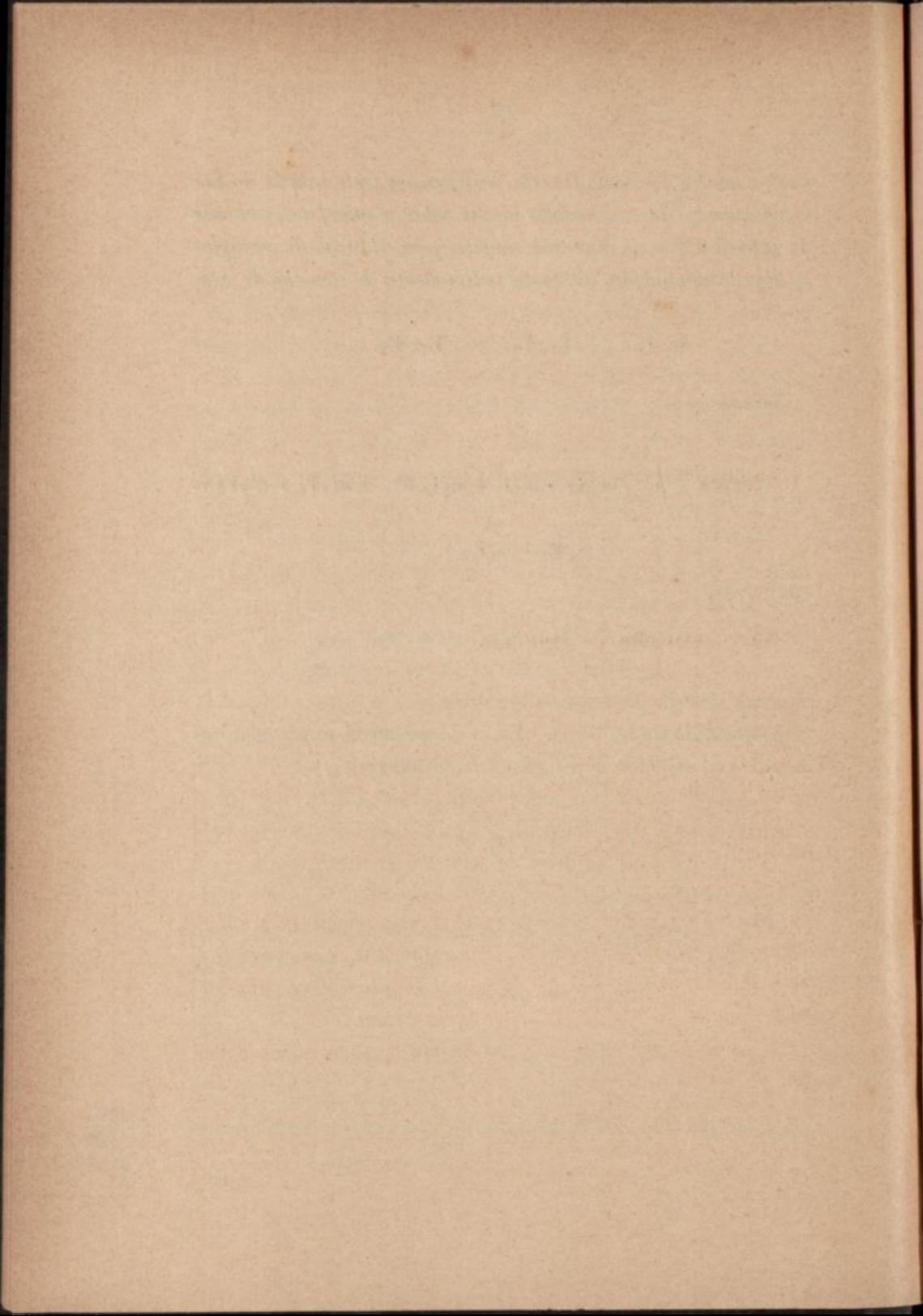
$$m_1, m_2, \dots, m'_1, m'_2, \dots, n_1, n_2, \dots,$$

numeros inteiros positivos ou negativos.

As quantidades $I_1, I'_1, \dots, E_1, \dots$ denominam-se *periodos elementares* ou *modulos de periodicidade* do integral

$$\int_{x_0}^x f(x) dx.$$

~~~~~



## IV

### INTEGRAES ELLIPTICOS SOBRE AS SUPERFICIES DE RIEMANN

---

**57.** Consideremos a expressão

$$w = \int f(x, \sqrt{R}) dx$$

em que  $f$  designa uma funcção racional de  $x$  e  $\sqrt{R}$  e em que é

$$R = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2p}).$$

Para fazer o estudo d'este integral construiremos em primeiro lugar a superficie de Riemann da funcção  $\sqrt{R}$ , que, em geral, será de connexão multipla e, por meio de *querschnitte*, transformal-a-hemos em seguida n'uma simples connexa.

A superficie em questão é claramente de duas folhas e tem por pontos de ramificação

$$a_1, a_2, \dots, a_{2p}.$$

Poder-se-hão, pois, executar os côrtes de ramificação (fig. 32)

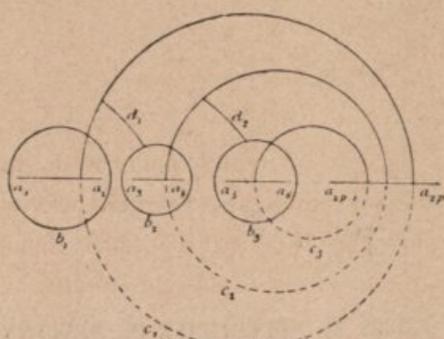


Fig. 32

ligando  $a_1$  com  $a_2$ ,  $a_3$  com  $a_4$ , etc., e obter-se-ha assim uma superfície que é o logar geométrico da variável da função  $\sqrt{R}$  tornada uniforme e igualmente (n.º 18) da função

$$f(x, \sqrt{R}).$$

Para executar a transformação relativa á ordem de conexão procedemos segundo o methodo acima indicado. Traça-se na folha superior uma linha fechada  $b_1$  que envolve os dois pontos de ramificação  $a_1, a_2$ ; de um ponto infinitamente proximo de  $b_1$  descreve-se uma outra linha fechada  $c_1$  para o ponto fronteiro do outro lado de  $b_1$ ; em seguida traça-se uma linha fechada  $b_2$  que envolve os dois pontos de ramificação  $a_3, a_4$ , e que com a linha  $d_1$  fórma um novo *querschnitt* da superfície; etc. Continuando assim transformar-se-ha, depois de traçados  $2p - 2$  *querschnitte*, a superfície n'uma simplesmente connexa.

Feito isto, encerrem-se os pontos para os quaes  $f(x, \sqrt{R})$  se torna infinita dentro de curvas infinitamente proximas d'elles; descrevam-se, partindo d'um ponto de cada uma d'aquellas linhas, traços continuos para os novos limites da superfície, que serão os *querschnitte* que reduzem de novo a uma superfície de conexão simples a superfície tornada de conexão multipla pela exclusão dos pontos de infinidade.

Teremos d'esta fórma obtido a superfície de Riemann, que é

o logar geometrico dos pontos de que depende d'uma maneira uniforme o integral

$$\int f(x, \sqrt{R}) dx.$$

Todos os valores d'elle para os differentes caminhos de integração, tomados entre os mesmos limites, se exprimirão pelo valor uniforme tomado entre aquelles pontos, e pelos periodos elementares do integral resultantes das passagens dos *querschnitte*.

58. Seja

$$w = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}$$

em que é

$$y = \sqrt{R} = \sqrt{\Lambda (x - a_1) (x - a_2) (x - a_3) (x - a_4)}$$

o integral que vamos considerar.

A construcção da superficie de Riemann da funcção  $y$  já foi estudada no n.º 15. É uma superficie  $S$  de duas folhas com quatro pontos de ramificação  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , ligados pelos córtes de ramificação  $\overline{a_1 a_2}, \overline{a_3 a_4}$ .

Tracemos uma linha (fig. 33) que comprehenda os dois pontos de ramificação  $a_1, a_2$ ; esta linha póde considerar-se um primeiro *querschnitt* da superficie e portanto será nos seus dois lados um limite d'ella: uma outra linha que passa pelo segundo cóрте de ramificação  $a_3 a_4$ , formará um novo *querschnitt*.

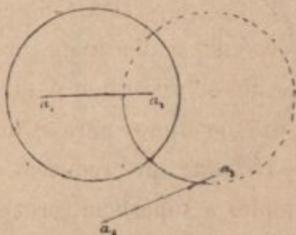


Fig. 33

Na superficie assim limitada, que designaremos por  $S'$ , qual-

quer linha fechada fórma, como é claro, o limite completo d'uma parte d'ella.

S é uma superficie de Riemann de connexão multipla de ordem 3, pois que ella se reduz por meio de dois *querschnitte* a S' que é de connexão simples.

59. Tomemos o integral

$$w(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}$$

na superficie S, estendido sobre um caminho qualquer de  $x_0$  a  $x$ . O valor do mesmo integral sobre um outro caminho de integração, entre os mesmos pontos inicial e final, só poderá differir de  $w(x)$  de quantidades dependentes do caminho percorrido e que se exprimem pelos multiplos inteiros de duas determinadas constantes.

Considerado na superficie S', é o integral

$$w(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}$$

uma função uniforme do logar da variavel. Sejam, pois,  $w(m'')$  e  $w(m')$  os valores de  $w(x)$  nos dois pontos  $m''$  e  $m'$  de S' (fig. 34), situados d'um e outro lado de  $B_1$ .

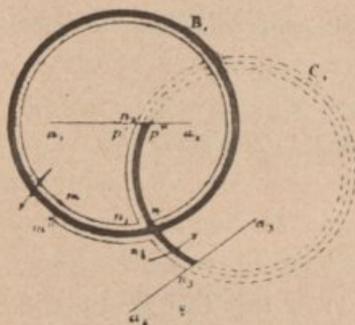


Fig. 34

Como o valor  $w(m'')$  é independente do caminho da integração na superficie S', poderemos estender o integral  $w(x)$  de  $x_0$  até  $m'$  e d'ahi até  $m''$ . Se o caminho seguido for

$$m' n_1 n_2 n_3 n_4 m''$$

ter-se-ha

$$w(m'') = w(m') + w(m' n_1) + w(n_1 n_2 n_3 n_4) + w(n_4 m'').$$

Mas  $\frac{dw(x)}{dx}$  tem o mesmo valor em  $m'$  e  $m''$ , portanto é

$$w(m' n_1) = w(m'' n_4) = -w(n_4 m''),$$

d'onde se segue

$$w(m'') = w(m') + w(n_1 n_2 n_3 n_4)$$

para todos os pontos situados d'um e d'outro lado de  $B_1$ .

Ponhamos

$$w(n_1 n_2 n_3 n_4) = \int_{C_1} \frac{dx}{y} = I_1$$

em que o integral ao longo de  $C_1$  é tomado no sentido  $n_1 n_2 n_3 n_4$ .

Se agora imaginarmos que a variavel  $x$  se desloca em  $S$  de  $m'$  para  $m''$  passando sobre  $B_1$  soffrerá o integral  $w(x)$  um augmento brusco de valor egual a  $I_1$ . N'uma direcção de movimento contraria á indicada pela setta será este augmento  $-I_1$ .

Da mesma maneira a passagem de  $C_1$  de  $p'$  para  $p''$ , pondo

$$w(n_1 m' n) = \int_{B_1} \frac{dx}{y} = I'_1,$$

dará

$$w(p'') = w(p') + I'_1.$$

Caminhando em  $S$  de  $p'$  para  $p''$  pela passagem de  $C_1$  terá o integral o augmento brusco de valor  $I'_1$ .

Portanto: o valor do integral

$$w(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}$$

tomado ao longo d'um caminho qualquer entre  $x_0$  e  $x$ , na superficie de Riemann  $S$  de  $y$ , compõe-se do integral uniforme tomado entre estes dois pontos, relativo á superficie connexa simples  $S'$  e de multiplos inteiros de duas determinadas constantes que representam os integraes  $w(x)$  tomados respectivamente ao longo dos dois querschnitte executados para a transformação de  $S$  em  $S'$ .

**60.** Consideremos aquellas constantes mais detidamente.

Para isso vejamos, em primeiro logar, os valores que toma o integral considerado nos pontos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , para os quaes é  $y=0$ .

Fazendo

$$x - a_1 = \rho e^{i\varphi}$$

em que  $\rho$  é uma constante, será, se designarmos por  $F(x)$  uma funcção que para  $x=a_1$  tem um valor finito,

$$y = \rho^2 e^{i\frac{\varphi}{2}} F(x);$$

e portanto

$$\int_{\hat{a}_1} \frac{dx}{y} = \rho^{-\frac{1}{2}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + i\pi} \frac{id\varphi e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{F(x)},$$

isto é, o integral tornar-se-ha infinitamente pequeno com  $\rho$ . Analogamente para  $a_2, a_3, a_4$ .

Para  $x = \infty$  facilmente se vê, pondo  $x = \frac{1}{x'}$ , que é

$$\int_{\infty} \frac{dx}{y} = 0.$$

Tomando agora o integral  $w(x)$  ao longo de  $C_1$  no sentido da seta (fig. 35), ter-se-ha

$$I_1 = - \int_{C_1} \frac{dx}{y}$$

ou manifestamente

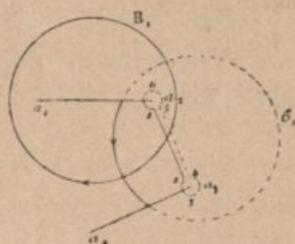


Fig. 35

$$-I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{y} + \int_{234} \frac{dx}{y} + \int_4^5 \frac{dx}{y} + \int_{561} \frac{dx}{y}.$$

Ora os integraes tomados ao longo dos círculos 234 e 561 são nullos com o raio d'este círculo: além d'isso nos pontos sobrepostos das linhas  $\overline{12}$  e  $\overline{45}$  tem  $y$  os mesmos valores absolutos, que só differirão quanto ao signal, e assim, designando por  $y$  o valor correspondente a  $x$  sobre a folha superior e por  $y'$  o valor relativo á folha inferior, será

$$\frac{dx}{y} = - \frac{dx}{y'},$$

d'onde

$$\int_1^2 \frac{dx}{y} = - \int_5^4 \frac{dx}{y'}$$

em que o primeiro integral é tomado na folha superior e o segundo na inferior. Será portanto

$$\int_1^2 \frac{dx}{y} = \int_4^5 \frac{dx}{y}.$$

Fazendo coincidir 1 e 5 com  $a_2$ , e do mesmo modo 2 e 4 com  $a_3$ , teremos a seguinte expressão, onde o integral se deve tomar sobre a folha superior

$$I_1 = -2 \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{y}.$$

Da mesma fórmula  $V_1$  é o integral tomado ao longo de 1234561, em que 5 e 4 estão respectivamente sobre 1 e 2 (fig. 36). N'esse caso é

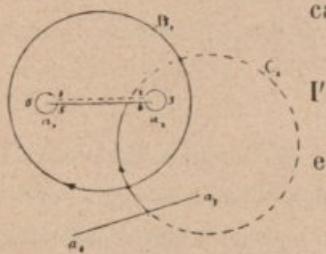


Fig. 36

$$V_1 = \int_1^2 \frac{dx}{y} + \int_{234} \frac{dx}{y} + \int_4^5 \frac{dx}{y} + \int_{561} \frac{dx}{y}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{y} = \int_4^5 \frac{dx}{y};$$

fazendo coincidir 1 e 2 com  $a_1$  e  $a_2$  será

$$\int_{234} \frac{dx}{y} = 0, \text{ e } \int_{561} \frac{dx}{y} = 0,$$

d'onde

$$V_1 = 2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{y},$$

sendo o integral tomado na folha superior.

61. Em vez de fazermos a transformação de  $S$  em  $S'$  por meio das linhas  $B_1$  e  $C_1$  poderíamos ter transformado  $S$  na superfície também simples connexa  $S'_1$  por meio d'outros *querschnitte*  $B'_1$ ,  $C'_1$  e teríamos então como períodos elementares

$$(I_1)' = \int_{C'_1} \frac{dx}{y}, \quad (I'_1)' = \int_{B'_1} \frac{dx}{y}.$$

A curva  $C'_1$  (fig. 37) conduz d'um lado de  $B_1$  ao fronteiro sem cortar  $B_1$  exactamente como a curva  $C_1$ , será portanto segundo o sentido em que  $C'_1$  for percorrida  $(I_1)' = \pm I_1$  e igualmente com referencia a  $B_1$  e  $B'_1$  será  $(I'_1)' = \pm I'_1$ .

Poderá, pois, ser

$$\int_{B_1} \frac{dx}{y} = \int_{B'_1} \frac{dx}{y},$$

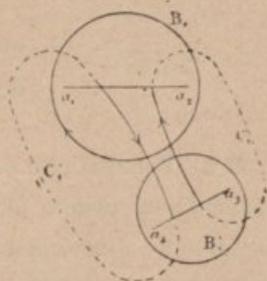


Fig. 37

ou, pelo que vimos acima,

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{y} = \int_{a_3}^{a_4} \frac{dx}{y}$$

tomados na folha superior e em sentidos oppostos relativamente aos côrtes de ramificação.

Do mesmo modo se substituirá  $C_1$  por  $C'_1$ , e suppondo esta percorrida no sentido opposto ao indicado pela setta na figura 37 vem

$$\int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{y} = \int_{a_4}^{a_1} \frac{dx}{y},$$

em que os integraes se devem tomar na folha superior em sentidos oppostos com relação aos córtes.

Vemos, pois, que se para construir a superficie de Riemann tomarmos (fig. 38) para córtes de ramificação em vez de  $\overline{a_1 a_2}$  e  $\overline{a_3 a_4}$  as rectas  $\overline{a_1 a_4}$ ,  $\overline{a_2 a_3}$ , os periodos elementares para as curvas  $B'_1$  e  $C'_1$  terão os valores

$$(I_1)' = -I_1, \quad (I_1')' = -I_1.$$

Concluimos d'isto que os periodos elementares são só essencialmente dependentes dos valores  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

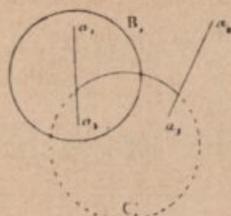


Fig. 38

**62.** Por isso que o integral  $w(x)$  é uma função da variável complexa  $x$ , poderá formar-se sobre um plano  $W$ , onde se represente  $w$ , a imagem da superficie de Riemann, cujos pontos correspondem aos valores de  $x$ .

Supponhamos limitada a superficie de Riemann  $S$  de que tratamos pelos dois *querschnitte* já anteriormente usados e cujos dois lados são considerados como limites de  $S'$ . Designemol-os respectivamente por  $B_1 B_2$  e  $C_1 C_2$  (fig. 39).

Supponhamos que  $w$  tem em  $m_1$  o valor  $w_1$ ; terá então em  $m_4$  o valor  $w_1 + I_1$ . Se  $x$  percorrer a linha  $B_1$ , descreverá  $w$  (fig. 40),

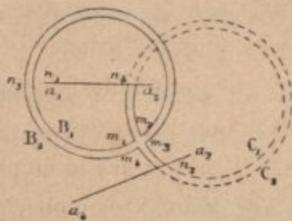


Fig. 39

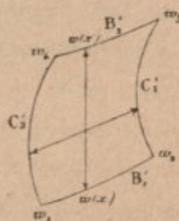


Fig. 40

no plano  $W$  e partindo de  $w_1$ , uma curva  $B'_1$  que irá até  $w_2$  se  $x$  chegar até  $m_2$ .

Se supozermos que, ao mesmo tempo que  $x$  caminha sobre  $B_1$ , um ponto  $x'$  se desloca também sobre  $B_2$ , descreverá  $w(x')$  uma outra curva  $B'_2$  que está ligada com a primeira, de modo que  $w(x)$  e  $w(x')$  distam constantemente um do outro de  $I_1$ .

Quando  $x$  chegar a  $m_2$  chegará  $x'$  a  $m_3$  e  $w$  adquire os valores  $w_2, w_3$ .

Façamos agora caminhar  $x$  de  $m_2$  até  $m_3$  pela linha  $m_2 n_2 m_3$ ; descreverá  $w(x)$  ao mesmo tempo, em  $W$ , uma curva  $C'_1$  entre  $w_2$  e  $w_3$ . Se o ponto  $x'$  percorre  $C_2$  por  $m_1 n_1 m_4$ , também  $w(x')$  descreve uma curva  $C'_2$  que dista de  $C'_1$  sempre de  $I_1$ .

O limite

$$m_1 n_1 m_2 n_2 m_3 n_3 m_4 n_4 m_1$$

de  $S'$  será portanto representado, no plano  $W$ , por

$$w_1 w_2 w_3 w_4 w_1,$$

que forma um parallelogrammo curvilineo que constitue a *imagem* da superficie transformada  $S'$ . Aos pontos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , de  $S'$  correspondem os pontos  $w_{a_1}, w_{a_2}, w_{a_3}, w_{a_4}$ , completamente determinados sobre o plano  $W$ .

Como a *imagem* das proximidades do ponto  $m$  onde se reúnem  $m_1 m_2 m_3 m_4$  é *isogonal* segue-se que os angulos do parallelogrammo curvilineo devem, junctos, valer quatro rectos.

Porém, se a variavel  $x$  atravessa  $B_1$  não estará  $w$  no parallelogramo  $w_1 w_2 w_3 w_4$ , mas por isso que  $x$  em  $S'$  caminharia por  $B_2$  e agora a atravessa, passará também  $w(x)$  a linha  $B'_2$  na direcção

indicada pela seta (fig. 41), e assim se quizermos de novo representar  $S'$  deveremos, partindo de  $w_4$  e por isso, no plano  $W$ , de  $w_4$ , formar o parallelogrammo  $w_4 w_3 w'_2 w'_1$ . Da mesma maneira a passagem de  $C_1$  em  $S$ , dá como *imagem* de  $S'$  o parallelogrammo  $w_2 w_3 w''_4 w''_1$ . Etc.

Será, pois, formada no plano  $W$  a *imagem* da superficie de Riemann  $S$  por um numero infinito de parallelogrammos que são contiguos uns aos outros e cobrem totalmente o plano  $W$ .

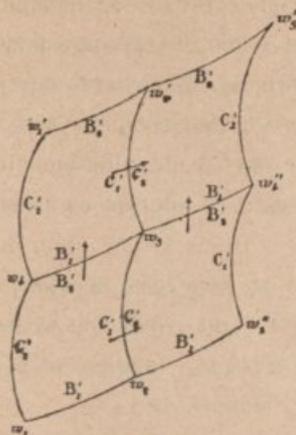


Fig. 41

**63.** Os limites dos parallelogrammos são, como acabamos de ver, em geral curvilineos. Isto porém não é essencial e o parallelogrammo curvilineo pôde transformar-se n'um rectilineo.

Com effeito, sejam (fig. 42)  $w_1 w_2 w_3 w_4$  os vertices do parallelogrammo cujos lados  $B'_1, B'_2, C'_1, C'_2$ , correspondem respectivamente aos lados  $B_1, B_2, C_1, C_2$  dos *querschnitte*  $B_1$  e  $C_1$  (fig. 43).

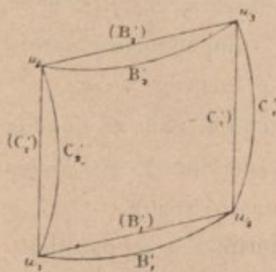


Fig. 42

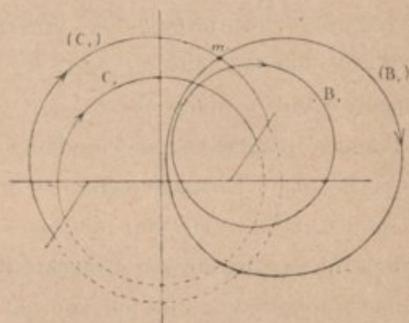


Fig. 43

Liguemos  $w_1$  e  $w_2$  por uma recta ( $B'_1$ ): a um ponto  $w$  d'esta linha corresponde um determinado ponto da superficie de Riemann.

Quando  $w$  percorre partindo de  $w_1$  a recta  $\overline{w_1 w_2}$  corresponderá a este caminho, sobre a superficie de Riemann, uma curva ( $B_1$ ) que partindo de  $m$  voltará ahi se o integral chegar a  $w_2$ .

A linha ( $B_1$ ), assim como  $B_1$ , conduz d'um ponto infinitamente proximo de  $C_1$  ao fronteiro do lado opposto, e poder-se-ha assim suppor que a superficie se tornou simples connexa por meio de ( $B_1$ ) e  $C_1$ , e terá então sobre o plano  $W$  uma *imagem* tal que os lados de ( $B_1$ ) são representados por duas rectas. Analogamente podemos fazer uma substituição semelhante de  $C_1$  pela linha ( $C_1$ ) que tem por *imagem*  $\overline{w_1 w_4}$ ,  $\overline{w_2 w_3}$ .

Suppondo, pois, que a superficie de Riemann foi transformada pelos *querschnitte* ( $B_1$ ), ( $C_1$ ), a *imagem* da superficie simplesmente connexa será formada por um parallelogrammo rectilineo ( $B'_1$ ) ( $B'_2$ ) ( $C'_1$ ) ( $C'_2$ ) cujos lados representam os *periodos elementares* do integral  $w$ .

**61.** Consideremos agora no integral

$$w = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y}$$

$w$  como variavel independente;  $x$  e  $y$  serão funcções de  $w$ .

Ponhamos então

$$x = \varphi(w), \quad y = \psi(w).$$

Pelo que temos dicto se vê que aos valores

$$w, \quad w + m_1 I_1 + m'_1 I'_1,$$

onde  $m_1$  e  $m'_1$  são numeros inteiros, correspondem o mesmo  $x$  e o mesmo  $y$  e portanto é

$$x = \varphi(w) = \varphi(w + m_1 I_1 + m'_1 I'_1)$$

$$y = \psi(w) = \psi(w + m_1 I_1 + m'_1 I'_1).$$

D'aqui concluímos, pois, que  $x$  e  $y$  são *funções duplamente periódicas de  $w$* .

Como além d'isso a cada valor de  $w$  n'um dos parallelogrammos corresponde *um unico* ponto de  $S$ , ao qual pertence um determinado valor de  $x$  e  $y$ , segue-se tambem que *são  $x$  e  $y$  funções duplamente periódicas uniformes de  $w$* .

~~~~~

65. Consideremos ainda o integral elliptico de primeira especie reduzido á fórma canonica

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \int \frac{dz}{y}.$$

A superficie de Riemann S da função y tem como pontos de ramificação

$$-\frac{1}{k}, -1, +1, +\frac{1}{k}.$$

Liguem-se (fig. 44) por córtex de ramificação os pontos $-\frac{1}{z}$

com -1 , $+1$ com $+\frac{1}{z}$; e tracem-se os *querschnitte* B_1 e C_1 que reduzem a superfície a uma simples connexa S' . Supponhamos ainda que na folha superior é, para $z=0$, $y=+1$ em quanto que na folha inferior é, para $z=0$, $y=-1$.

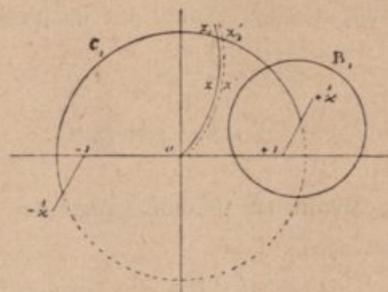


Fig. 44

Consideremos os pontos de ramificação -1 , $+1$ ligados por uma recta existente na folha superior; o integral tomado entre estes dois pontos, em S' , será igual ao integral tomado entre os mesmos pontos em S , diminuído do período elementar correspondente á passagem do *querschnitt* B_1 e teremos a expressão

$$\int_{S_{-1}}^{+1} \frac{dz}{y} - I_1 = \int_{S'_0}^{+1} \frac{dz}{y} - \int_{S'_0}^{-1} \frac{dz}{y}.$$

Liguemos agora os pontos de ramificação $+1$, -1 por uma recta existente na folha inferior. Ter-se-ha

$$\int_{S_{-1}}^{+1} \frac{dz}{y} = \int_{S'_0}^{+1} \frac{dz}{y} - \int_{S'_0}^{-1} \frac{dz}{y},$$

em que o integral do primeiro membro é tomado sobre a linha recta situada na folha inferior.

Ora o elemento $\frac{dz}{y}$ do integral tem, em pontos sobrepostos

da superficie de Riemann, valores eguaes e de signaes contrarios, pois que, para as duas folhas, é $z = z'$; mas na superior y tem o valor $+y$ em quanto que na inferior é $y' = -y$; portanto

$$\frac{dz}{y} = -\frac{dz'}{y'}$$

Sommando as duas expressões anteriores vem

$$-I_1 = 2 \int_0^1 \frac{dz}{y} - 2 \int_0^{-1} \frac{dz}{y}, \dots \dots \dots (A)$$

em que os integraes do segundo membro são funcções uniformes. Além d'isso é

$$\int_0^1 \frac{dz}{y} = \int_0^1 \frac{dz}{y} - I_1$$

e

$$\int_0^{-1} \frac{dz}{y} = \int_0^{-1} \frac{dz}{y} = - \int_0^1 \frac{dz}{y}$$

onde

$$\int_0^1 \frac{dz}{y}, \int_0^{-1} \frac{dz}{y}$$

são integraes rectilíneos tomados em S sobre a folha superior de 0 a $+1$ e de 0 a -1 .

De (A) resulta então

$$-I_1 = 2 \int_0^1 \frac{dz}{y} - 2 I_1 + 2 \int_0^1 \frac{dz}{y}$$

logo

$$I_1 = 4 \int_0^1 \frac{dz}{y}, \dots \dots \dots (a)$$

Supponhamos agora traçado na folha superior, á esquerda do córte de ramificação $+1$, $+\frac{1}{z}$, um caminho de integração rectilíneo entre $+1$ e $+\frac{1}{z}$: virá

$$\int_{S_1}^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} - V_1 = \int_{S'_0}^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} - \int_{S'_0}^1 \frac{dz}{y};$$

o caminho semelhante tomado na folha inferior dá

$$\int_{S_1}^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} = \int_{S'_0}^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} - \int_{S'_0}^1 \frac{dz}{y};$$

e portanto ter-se-ha

$$-V_1 = 2 \int_{S'_0}^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} - 2 \int_{S'_0}^1 \frac{dz}{y}.$$

Além d'isso temos

$$\int_{S'_0}^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} = \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{y} - I_1 - V_1$$

$$\int_{S'_0}^1 \frac{dz}{y} = \int_0^1 \frac{dz}{y} - I_1$$

o que dará

$$-V_1 = 2 \int_0^x \frac{dz}{y} - 2I_1 - 2V_1 - 2 \int_0^1 \frac{dz}{y} + 2I_1$$

ou

$$V_1 = 2 \int_0^x \frac{dz}{y} - 2 \int_0^1 \frac{dz}{y} \dots \dots \dots (b)$$

Exprimir-se-hão assim por (a) e (b) os periodos elementares do integral considerado, em integraes rectilineos tomados entre o ponto 0 e os dois pontos de ramificação 1 e $\frac{1}{x}$.

Se fizermos

$$\int_0^1 \frac{dz}{y} = K$$

e

$$\int_1^x \frac{dz}{y} = K'$$

teremos

$$I_1 = 4K, \quad V_1 = 2K'.$$

São, pois, z e y *funções duplamente periodicas uniformes* de

$$u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}$$

com os periodos $4K$ e $2K'$ e então

$$z = \varphi(u) = \varphi(u + 4mK + 2m'K')$$

$$y = \psi(u) = \psi(u + 4mK + 2m'K')$$

em que são m e m' numeros inteiros.

66. Tomemos o integral

$$u = \int_0^z \frac{dz}{y}$$

(de $z=0, y+1$) ao longo de $0zz_1$ (fig. 44), que no ponto z_1 terá o valor

$$u = \int_{0z_1} \frac{dz}{dy}.$$

Se designarmos por z e y os valores d'estas quantidades na folha superior e por z' e y' os valores d'ellas na folha inferior, será

$$z = z', \quad -y = y'.$$

E facilmente se vê que é

$$\int_{(0,1)}^{(z,y)} \frac{dz}{y} = - \int_{(0,-1)}^{(z,-y)} \frac{dz'}{y'},$$

em que o primeiro integral é tomado de $(z=0, y=1)$ a (z, y) , e o segundo de $(z'=0, y'=1) = (z=0, y=-1)$ até $(z, -y)$.

Fazendo

$$u = \int_{(0,1)}^{(z,y)} \frac{dz}{y}, \quad v = \int_{(0,1)}^{(z,-y)} \frac{dz'}{y'}$$

e se forem $z = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ as funcções duplamente periodicas de u , será

$$z = \varphi(v), \quad y = -\psi(v);$$

isto é, z tem para u e v os mesmos valores, y valores oppostos.

Mas supponhamos que o integral é tomado de modo que o caminho de integração seja (fig. 45), $(0, 1) \rightarrow (0, -1)$; virá

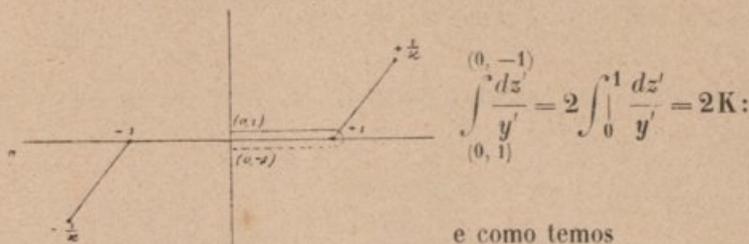


Fig. 45

$$\int_{(0,1)}^{(z,-y)} \frac{dz'}{y'} = \int_{(0,1)}^{(0,-1)} \frac{dz'}{y'} + \int_{(0,-1)}^{(z,-y)} \frac{dz'}{y'} = \int_{(0,1)}^{(0,-1)} \frac{dz'}{y'} - \int_{(0,1)}^{(z,y)} \frac{dz}{y}$$

será

$$v = 2K - u;$$

$z = (\varphi)(u)$ é, pois, uma função duplamente periódica, uniforme, que para u e $2K - u$ tem os mesmos valores.

67. Vamos ainda formar, n'um caso especial, a *imagem* da superfície de Riemann sobre um plano U por meio do integral u .

Consideremos z real e menor que a unidade.

Em quanto fôr $z^2 < 1$ e z tiver valores reais terá igualmente o integral

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-z^2 z^2)}}$$

valores reais.

Mas se, conservando-se z real, fôr $\frac{1}{x^2} > z^2 > 1$, ficará constante a parte real de u , e teremos

$$u = \int_0^1 \frac{dz}{y} + i \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-z^2z^2)}} =$$

$$= K + i \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-z^2z^2)}}.$$

K é real e

$$K' = \int_1^x \frac{dz}{y} = i \int_1^x \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-z^2z^2)}}$$

imaginário.

Os pontos de ramificação da superfície de Riemann acham-se, n'este caso, sobre o eixo das quantidades reaes. Traçaremos os *querschnitte* B_1, C_1 (fig. 46), sobre esse eixo. Em m tem u o valor real K correspondendo-lhe, no plano U , o ponto a . Se z , partindo de m , percorrer a linha C_1 , quando chegar de novo a m terá u passado de a para b , sendo

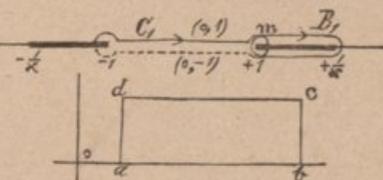


Fig. 46

$$b - a = 4K:$$

b forma a *imagem* de m considerado do outro lado de B_1 .

Se z , partindo de m , percorre um lado de B_1 , mudar-se-ha só o valor da parte imaginária de u e portanto a imagem d'este lado será uma recta $\bar{a}d$ ou $\bar{b}c$ paralela ao eixo das quantidades

imaginarias, recta cuja grandeza é $2K'$. A recta que une b e c constitue a imagem do segundo lado de C_1 .

Concluimos, portanto, que no nosso caso a superficie de Riemann tem para *imagem*, por meio do integral u , $abcd$; e que o *parallelogrammo dos periodos da funcção* $z = \varphi(u)$ é então um *rectangulo*.

FIM.

INDICE

	Pag.
I. PERMUTAÇÃO DOS VALORES DAS FUNÇÕES ALGEBRICAS EM VOLTA DOS PONTOS CRITICOS.....	1
II. SUPERFICIES DE RIEMANN	29
I. Definição das superficies de Riemann.....	29
II. Limites das superficies de Riemann	39
III. Connexão das superficies de Riemann	52
III. INTEGRAES SOBRE AS SUPERFICIES DE RIEMANN.....	67
IV. INTEGRAES ELLIPTICOS SOBRE AS SUPERFICIES DE RIEMANN	81

