
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

SOBRE A

EQUAÇÃO DE LAPLACE

A

TRES VARIAVEIS

POR

ALVARO JOSÉ DA SILVA BASTO.

COIMBRA,
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

1895

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O

ACTO DE CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA.

A

MEUS PAES

Na falta de processos geraes para integrar as equações ás derivadas parciaes de segunda ordem, um ponto da sua theoria tem, de preferencia, attrahido as attenções dos geometras.

Referimo-nos á classe das equações lineares, com especialidade ás de coefficientes constantes, que tão frequentemente apparecem na Physica Mathematica, na Geometria das superficies, na theoria geral das funcções. Graças aos estudos emprehendidos sob o ponto de vista especial dos problemas que ellas são chamadas a resolver, a theoria d'essas equações tem com effeito, sobretudo nos ultimos tempos, experimentado um avanço sensivel.

A nossa dissertação occupa-se do problema relativo á mais simples e tambem á mais celebre d'essas equações, queremos dizer, á equação de Laplace. Conhecido pelo nome de *problema de Dirichlet,* o seu objecto é determinar um integral d'essa equação, uniforme, finito e continuo num dominio dado e tomando sobre a fronteira d'esse dominio uma successão continua de valores dados.

Ocioso seria insistir na importancia do assumpto. No emtanto, não fallando mesmo no papel consideravel que a equação de Laplace desempenha em varios ramos das Mathematicas, uma coisa nos parece digna de menção: e é — que os resultados que lhe dizem respeito, tem servido de directriz a estudos d'equações mais geraes de segunda ordem, particularmente das lineares. Haja vista differentes Memorias que nos ultimos annos Picard, Poincaré, Schwarz e outros distinctos geometras teem publicado sobre as equações ás derivadas parciaes.

Démos á nossa dissertação uma feição didactica, a que julgamos mais adequada a trabalhos onde a exposição é quasi tudo.

Começamos por estabelecer, nos capitulos I e II, as proposições geraes relativas ás funcções harmonicas, integraes particulares da equação de Laplace, ennunciando em seguida o problema de Dirichlet e resolvendo-o para o caso da esphera (cap. III).

No capitulo seguinte (IV) mostramos como o emprego das coordenadas curvilineas orthogonaes podia, em muitos casos, facilitar a integração; e para exemplificar, resolvemos o importante problema de Lamé. Pareceu-nos pouco rigorosa a maneira porque se acha estabelecida a solução d'esse problema; cremos porém que o theorema d'Harnack nos permittiu pô-la a salvo de toda a duvida.

Tractamos no capitulo V da representação conforme no espaço e demonstramos, seguindo o processo de Painlevé simplificado, que tal representação só póde effectuar-se por meio de uma inversão.

Finalmente, consagramos os restantes capitulos (VI e VII) á exposição de dois methodos geraes para a resolução do problema de Dirichlet — o methodo de C. Neumann e o de Poincaré. Seja-nos permittido dizer, a proposito d'este ultimo, que, por uma extensão facil do theorema que lhe serve de base, reduzimos o principio de Dirichlet a uma hypothese muito simples.

Concluindo: tentámos escrever uma monographia, resumida, mas sufficientemente clara e rigorosa, do problema de Dirichlet. Oxalá o tenhamos conseguido!

Coimbra, 26 de setembro de 1895.

A. Basto.

I. FUNCÇÕES HARMONICAS.

1. Consideremos um volume limitado exteriormente por uma superficie fechada e interiormente por $n-1$ superficies tambem fechadas, mas exteriores umas ás outras. Um tal volume diz-se de *connexão multipla d'ordem n*. Se não ha superficies interiores, diz-se de *connexão simples*. Designaremos um tal volume ou espaço pela lettra E e a superficie terminal, simples ou multipla, pela lettra S.

Isto posto, sejam x, y, z as coordenadas rectangulares d'um ponto do espaço e consideremos a equação ás derivadas parciaes

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

conhecida com o nome de *equação de Laplace* por que foi este illustre geometra quem primeiro a encontrou nas suas investigações sobre a theoria da attracção.

Neste capitulo e no seguinte occupar-nos-hemos das propriedades geraes das funcções $V(x, y, z)$ que, num certo espaço E, além de satisfazerem á equação de Laplace, são uniformes, finitas e continuas, e admittem derivadas parciaes de primeira e segunda ordem da mesma natureza. Generalizando uma denominação introduzida pelos auctores inglezes para as funcções analogas de duas variaveis, diz-se que a funcção que satisfaz a estas condições, é *harmonica* no espaço considerado.

Para dar um exemplo d'estas funcções, lembraremos o potencial que é, como resulta d'uma propriedade conhecida, uma funcção harmonica em qualquer espaço que não contenha as massas. É assim (e este exemplo ser-nos-ha util adiante) que a funcção

$$U(x, y, z) = \frac{1}{r}, \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

onde a, b, c são tres constantes arbitrarias, é harmonica em qualquer região que não contenha o ponto (a, b, c). Se a verificação não fôsse immediata, bastaria notar que $\frac{1}{r}$ é o potencial da unidade de massa situada no ponto (a, b, c).

Devemos dizer que, neste breve esboço, não perdemos de vista a analogia que existe entre as funcções de tres variaveis reaes que satisfazem á equação $\Delta V = 0$ e as funcções de variavel imaginaria. Tal analogia, posta em evidencia como methodo de investigação numa Memoria interessante d'Appell [1], explica-se muito simplesmente por este facto, notado por Riemann e hoje bem conhecido, de que a theoria das funcções de uma variavel complexa se reduz ao estudo da equação de Laplace a duas variaveis.

2. Recordemos o *theorema de Green* de que teremos de fazer um uso constante.

Sejam U e V duas funcções quaesquer de x, y, z, finitas, continuas e admittindo derivadas parciaes primeiras e segundas em todos os pontos do espaço E e sobre a superficie S que o limita.

---

[1] *Sur les fonctions de trois variables satisfaisant à l'équation differentielle* $\Delta F = 0$ (*Acta Mathematica,* t. IV, p. 313).

Pondo

$$I = \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

teremos a relação preliminar, que tambem usaremos,

$$(1) \qquad I = -\iint U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \iiint U \Delta V\, dx\, dy\, dz,$$

da qual, permutando U e V, e subtrahindo, resulta a fórmula definitiva de Green

$$(2) \quad \iiint (U\Delta V - V\Delta U)\, dx\, dy\, dz + \iint \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0 \text{ [1]}.$$

Nestas relações o integral triplo estende-se a todo o volume E, o integral duplo a toda a superficie S; o symbolo $d\sigma$ designa um elemento de S, e as derivadas $\frac{\partial U}{\partial n}$ e $\frac{\partial V}{\partial n}$ devem ser tomadas segundo a normal interior a E.

Se U e V forem harmonicas no espaço considerado, da fórmula (2) deduz-se a egualdade

$$(3) \qquad \iint \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

que dá, pondo $U = 1$, uma primeira propriedade das funcções

---

[1] Veja-se para a demonstração d'esta fórmula, por ex., Gomes Teixeira, *Curso de Analyse*, t. II, p. 157.

Digamos que, chamando α, β, γ os cosenos directores da normal interior a E, se põe

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma \frac{\partial U}{\partial z}.$$

harmonicas:

$$(4) \qquad \iint \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

3. A fórmula (3) vae levar-nos a uma consequencia da mais alta importancia.

Consideremos um ponto qualquer, mas fixo, I(a, b, c), interior ao espaço E, e bem assim a funcção

$$U = \frac{1}{r}, \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Como U é discontinua no ponto I d'esse espaço, tracemos d'este ponto como centro, a fim de o isolar, uma esphera S′ de raio ρ bastante pequeno para que esta esphera fique no interior da superficie S que limita E.

Consideremos além d'isso uma funcção qualquer V harmonica em E.

A fórmula (3), applicada ao espaço limitado por S e S′, póde escrever-se

$$(5) \quad \iint_S \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma = \iint_{S'} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma$$

sob a condição de tomar as derivadas, no segundo membro, segundo a normal interior a S′.

Ora o segundo membro tem um valor muito simples. Com effeito, attendendo a que se tem, sobre S′,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{\rho^2}$$

por ser $r = \rho$; designando por $V(a, b, c)$ o valor de V no ponto

I e pondo $\epsilon = \mathrm{V} - \mathrm{V}(a, b, c)$, o segundo membro de (5) toma a fórma

$$\iint_{S'}\left(\frac{\mathrm{V}(a,b,c)}{\rho^2}+\frac{\epsilon}{\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)d\sigma$$

que se decompõe em tres integraes. D'estes o primeiro reduz-se evidentemente a $4\varpi\,\mathrm{V}(a, b, c)$, e o terceiro é nullo segundo a fórmula (4).

A respeito do segundo notemos que, em virtude da continuidade de V, a cada valor positivo de δ arbitrariamente pequeno, corresponde um numero ρ_1 tal que é

$$|\,\epsilon\,| < \delta \qquad \text{para} \qquad \rho < \rho_1.$$

Logo

$$\frac{1}{\rho^2}\left|\iint_{S'}\epsilon\, d\sigma\right| < \frac{1}{\rho^2}\iint_{S'}|\,\epsilon\,|\; d\sigma < 4\varpi\delta.$$

Por onde se vê que, dispondo de ρ, o integral em questão se póde tornar menor que qualquer grandeza; e como elle é independente de ρ, por isso que o primeiro membro de (5) tambem o é, será nullo.

Introduzindo estes resultados em (5), obtemos a *fórmula fundamental* da theoria das funcções harmonicas, a saber

$$\mathrm{V}(a,b,c)=\frac{1}{4\varpi}\iint_{S}\left(\mathrm{V}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)d\sigma. \tag{6}$$

Esta fórmula é devida a Green. É na presente theoria o que a conhecida fórmula de Cauchy

$$f(x)=\frac{1}{2i\varpi}\int_{c}\frac{f(z)}{z-x}\,dz, \qquad i=\sqrt{-1},$$

é na theoria das funcções analyticas.

4. A fórmula fundamental, applicada ao caso em que a superficie S se reduz a uma esphera de centro (a, b, c) e de raio R, conduz, segundo o calculo do numero precedente, á relação

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi R^2} \int\!\!\int_S V \, d\sigma$$

que exprime um notavel theorema de Gauss. Carl Neumann, que lhe deu o nome de *theorema da média arithmetica*, ennuncia-o assim: *quando uma funcção é harmonica no interior d'uma esphera, o seu valor no centro é a média arithmetica dos valores que toma á superficie.*

5. D'este theorema deduzem-se numerosas propriedades das funcções harmonicas, de grande utilidade nas applicações physicas.

I. *Se uma funcção tem um valor constante numa parte finita d'um espaço em que é harmonica, terá o mesmo valor na parte restante.*

Supponhamos que não era assim e chamemos α e β as duas regiões (fig. 1). Então é evidente que, dada a continuidade da funcção harmonica, se poderá sempre encontrar uma região γ, situada em β e contigua a α, em todos os pontos da qual a funcção tome, por exemplo, um valor maior que em α. Descrevamos d'um ponto de α uma esphera que tenha uma parte nesta região e outra em γ.

Resulta da nossa hypothese que o integral $\frac{1}{4\varpi R^2} \int\!\!\int V \, d\sigma$ estendido a essa superficie espherica será maior que o valor da funcção harmonica no centro, contra o principio da média.

II. *Uma funcção não póde ter maximo nem minimo em ponto algum do espaço em que é harmonica.*

Para fixar ideias supponhamos que no ponto (a, b, c) a funcção tinha um maximo. Então, tomando R sufficientemente pequeno, ter-se-hia, para um ponto qualquer (x, y, z) da esphera S,

$$V(x, y, z) < V(a, b, c).$$

D'onde se conclue, multiplicando por $\frac{d\sigma}{4\varpi R^2}$ e integrando ao longo de S,

$$\frac{1}{4\varpi R^2} \int\int_S V \, d\sigma < V(a, b, c)$$

o que é absurdo.

III. Supponhamos que V é harmonica num espaço que contém uma certa superficie fechada Σ. *Se* V *tem o mesmo valor em todos os pontos de* Σ *tel-o-ha egualmente em todos os pontos do interior,* como se vê pela fórmula fundamental ou ainda pelo ultimo theorema.

IV. Se V não é constante sobre S, os seus valores constituem um conjuncto finito que admitte um limite superior L e um limite inferior l. Digo que *em qualquer ponto interior a* S *se terá*

$$l < V < L.$$

Com effeito, a funcção não póde tomar valores maiores que L nem menores que l, aliás admittiria no interior um maximo ou um minimo. Além d'isso, em ponto algum interior se póde ter

$$V = l,$$

porque, se se descreve, d'um tal ponto como centro, uma esphera S′ de pequeno raio R, ter-se-ha

$$l = \frac{1}{4\varpi R^2} \int\int_{S'} V \, d\sigma:$$

resultado impossivel pois que, sobre S′, V não póde ser constantemente egual a l em virtude do theorema anterior. O mesmo se diz a respeito de L.

V. *Não podem existir duas funcções que sejam harmonicas no interior d'uma superficie e tomem sobre esta superficie os mesmos valores.*

Se existissem, como a equação de Laplace é linear, a sua differença W seria uma funcção harmonica que se annullaria sobre toda a superficie. Portanto (th. III) W annullar-se-hia tambem em todos os pontos do interior e as duas funcções seriam identicas. C. q. d.

Vamos dar d'este importante theorema uma outra demonstração em que intervem um integral de que adiante temos de lançar mão.

Fazendo na fórmula (1) $V = U$ e suppondo que U é a funcção W que vimos de considerar, resulta a relação

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial W}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{dy}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=0$$

que exige que se tenha, para todos os pontos do espaço considerado,

$$\frac{\partial W}{dx}=0, \qquad \frac{\partial W}{dy}=0, \qquad \frac{\partial W}{dz}=0.$$

Logo W é constante no interior d'esse espaço; e como é nulla á superficie, será nulla em todos os pontos.

6. A fórmula de Green, de que vimos de fazer algumas appicações, determina o valor d'uma funcção harmonica V num ponto interior, quando são conhecidos os valores que V e $\frac{\partial V}{dn}$ tomam sobre a superficie.

O elemento $\frac{\partial V}{dn}$ porém é superfluo, como o mostra o theorema V do ultimo numero. Mas a sua eliminação dá, em geral, origem a um problema difficil que adiante será tratado.

Por agora limitamo-nos ao caso em que a superficie S se reduz a uma esphera, porque não só um simples artificio permitte eliminar $\frac{\partial V}{\partial n}$, mas a fórmula que se obtem ser-nos-ha necessaria no estudo dos desenvolvimentos em series.

Sejam I(a, b, c) um ponto interior de esphera, E o conjugado harmonico de I a respeito dos pontos em que o diametro que passa por I encontra a esphera, M um ponto variavel da superficie da esphera e R o seu raio. Ponhamos (fig. 2)

$$\mathrm{MI} = r, \quad \mathrm{ME} = r_1, \quad \mathrm{OI} = d, \quad \mathrm{OE} = d_1.$$

As fórmulas (6) e (3) applicadas respectivamente ás funcções V, $\frac{1}{r}$ e V, $\frac{1}{r_1}$, dão as relações

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi} \iint_S \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma,$$

$$0 = \frac{1}{4\varpi} \iint_S \left(V \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma,$$

que, combinadas, bastam para eliminar $\frac{\partial V}{\partial n}$. Notando com effeito que a esphera é o logar dos pontos M para es quaes

$$\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{ME}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{MO}}$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{R}}{d} \cdot \frac{1}{r_1},$$

multiplicando a ultima das duas egualdadas anteriores por $\frac{R}{d}$ e subtrahindo-a da primeira, vem a fórmula

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi}\iint_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{R}{d}\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} \right) V\, d\sigma$$

qne resolve a questão.

Como a intervenção do ponto E foi apenas auxiliar, convem dar outra fórma a este resultado. Ora

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos \mathrm{IMO}}{r^2}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} = \frac{\cos \mathrm{EMO}}{r_1^2};$$

alem d'isso os triangulos IMO e EMO dão

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \mathrm{IMO},$$

$$d_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \mathrm{EMO}.$$

Tirando d'estas egualdades os valores dos cosenos, substituindo-os nas anteriores e attendendo ás relações $dd_1 = R^2$ e $\frac{r}{r_1} = \frac{d}{R}$, obtem-se facilmente a expressão

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} - \frac{R}{d}\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} = \frac{R^2 - d^2}{R\, r^3}.$$

Temos pois

$$(7) \qquad V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi R}\iint \frac{R^2 - d^2}{r^3} V\, d\sigma$$

onde, pondo $IOM = \phi$, convem fazer

$$r^2 = R^2 - 2dR\cos\phi + d^2.$$

Tal *é a fórmula de Green relativa á esphera.*

7. Como applicação immediata da fórmula (7) vamos demonstrar o theorema seguinte, comparavel ao de Liouville na theoria das funcções de variavel complexa: *se a funcção* $V(x, y, z)$ *é harmonica em todo o espaço, e se*

$$|V| < M \qquad \text{(M um numero fixo)}$$

em qualquer ponto por mais distante que esteja da origem, essa funcção reduz-se a uma constante (¹).

Da origem como centro, com um raio qualquer R, descrevamos uma esphera. A fórmula (7) dá, applicada ao ponto interior I e á origem,

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi R}\int\int\frac{R^2 - d^2}{r^3} V\, d\sigma,$$

$$V(0, 0, 0) = \frac{1}{4\varpi R}\int\int\frac{V\, d\sigma}{R},$$

e por conseguinte

$$V(0, 0, 0) - V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi}\int\int\left(1 - \frac{R(R^2 - d^2)}{r^3}\right)\frac{V}{R^2}\, d\sigma.$$

Orá neste integral duplo o coefficiente de $d\sigma$ póde tornar-se menor que qualquer grandeza. Basta, com effeito, reparar em

(¹) Este theorema é devido a Picard (*Comptes rendus*, t. xc, p. 601).

que se tem sempre $|V| < M$; e alem d'isso que, suppondo R muito grande, como o ponto I fica fixo, a fracção $\frac{R}{r}$ e portanto $\frac{R(R^2 - d^2)}{r^3}$ é muito visinha da unidade.

D'aqui conclue-se, notando que o integral deve ser independente de R e seguindo a marcha do n.º 3, que esse integral é nullo. Logo

$$V(a, b, c) = V(0, 0, 0).$$

A funcção V, tendo em qualquer ponto I o mesmo valor que na origem, é constante. C. q. d.

II. DESENVOLVIMENTO EM SERIE DAS FUNCÇÕES HARMONICAS.

8. Seja $f(x, y, z)$ uma funcção real, uniforme e continua das tres variaveis reaes x, y, z. Diremos que esta funcção é *analytica* no espaço E, quando na visinhança de cada ponto (a, b, c) do mesmo espaço, a funcção satisfaz ás condições: 1) póde ser representada pela serie

$$(1) \qquad f(x, y, z) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

onde u_n designa um polynomio homogeneo de grau n em $x - a$, $y - b$ e $z - c$; 2) esta serie é absoluta e uniformemente convergente no interior de um dominio espherico de centro (a, b, c) e de raio ρ sufficientemente pequeno.

A respeito d'estas funcções faremos algumas notas que nos serão uteis.

A derivada parcial d'uma ordem qualquer da funcção analytica $f(x, y, z)$ póde representar-se pela serie formada com as derivadas da mesma ordem das funcções u. Como a serie é absolutamente convergente, e por isso como é indifferente a ordem dos seus termos, podemos antes de cada differenciação ordená-la segundo as potencias da variavel com relação á qual se differencía: e então o theorema é uma consequencia immediata das propriedades conhecidas das series inteiras d'uma variavel.

Accrescentemos que, representando os coefficientes do desenvolvimento, á parte um factor numerico binomial, os valores das derivadas parciaes da funcção para $x = a$, $y = b$, $z = c$, um tal desenvolvimento não póde ser identicamente nullo sem que todas as funcções u o sejam.

Isto posto, uma propriedade notavel das funcções harmonicas é que *toda a funcção* V *que é harmonica num certo espaço* E, *é analytica no mesmo espaço.*

E o que vamos ver, mostrando que, sendo (a, b, c) um ponto qualquer do espaço E e descrevendo d'este ponto como centro uma esphera Σ de raio R tal que fique contida em E, a funcção V póde tomar dentro d'esta esphera a fórma (1).

Estabeleceremos primeiro, em o numero que segue, um desenvolvimento preliminar.

9. Sejam x, y, z as coordenadas d'um ponto qualquer interior a Σ, e r a distancia de (a, b, c) a esse ponto. Temos a fórmula (n.º 6)

$$(2) \qquad V(x, y, z) = \frac{1}{4\varpi R} \int\int \frac{(R^2 - r^2) V \, d\sigma}{(R^2 - 2rR\cos\phi + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

na qual, como se sabe, V é o valor que toma a funcção harmonica num ponto arbitrario (X, Y, Z) da superficie da esphera e ϕ o angulo que o raio d'esse ponto faz com o raio do ponto $(x, y. z)$.

Introduzamos as coordenadas polares

$$X = a + R\cos\Theta, \quad Y = b + R\operatorname{sen}\Theta\cos\Psi, \quad Z = c + R\operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Psi;$$

teremos

$$d\sigma = R^2 \operatorname{sen}\Theta \, d\Theta \, d\Psi.$$

Chamemos r, θ, ψ as coordenadas que se referem ao ponto (x, y, z).

Será

$$\cos\phi = \cos\Theta\cos\theta + \operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\theta\cos(\Psi - \psi).$$

Ponhamos, sobre Σ,

$$\mathrm{V} = f(\Theta, \Psi).$$

Então (2) toma a fórma

$$\mathrm{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\varpi\mathrm{R}}\int_0^{\varpi}\int_0^{2\varpi}\frac{(\mathrm{R}^2 - r^2)f(\Theta,\Psi)}{(\mathrm{R}^2 - 2r\mathrm{R}\cos\phi + r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{R}^2\operatorname{sen}\Theta\, d\Theta\, d\Psi,$$

ou

$$(3)\quad \mathrm{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\varpi}\int_0^{\varpi}\int_0^{2\varpi}\frac{(1-\alpha^2)f(\Theta,\Psi)}{(1 - 2\alpha\cos\phi + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{R}^2\operatorname{sen}\Theta\, d\Theta\, d\Psi,$$

pondo

$$(4)\qquad \frac{r}{\mathrm{R}} = \alpha.$$

Trata-se de desenvolver, segundo as potencias crescentes de α, o quebrado que está sob o integral. Consideremos primeiro a expressão

$$\frac{1}{(1 - 2\alpha\cos\phi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pondo

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = z,$$

o que dá

$$2\cos\phi = z + z^{-1},$$

resulta

$$1-2\,\alpha\cos\phi+\alpha^2=(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1}).$$

Ora, sendo as series, dadas pela fórmula do binomio,

$$(1-\alpha z)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha z+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2 z^2+\ldots,$$

$$(1-\alpha z^{-1})^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha z^{-1}+\frac{1.3}{2.3}\alpha^2 z^{-2}+\ldots,$$

absolutamente convergentes para $\alpha<1$ e ϕ arbitrario, o seu producto dará o desenvolvimento

$$\frac{1}{(1-2\alpha\cos\phi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}=P_0+P_1\,\alpha+\ldots+P_n\,\alpha^n+\ldots$$

onde

$$P_n=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}z^n+\frac{1}{2}.\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}z^{n-2}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-4)}z^{n-4}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}z^{-n}.$$

Este coefficiente é um polynomio real do grau n em $\cos\phi$: é um *polynomio de Legendre.* Sabe-se que $P_n=P_n(\cos\phi)$ attinge o seu maximo valor para $\phi=0$, sendo $P_n(\cos 0)=1$. Este facto era bastante para mostrar, se não fosse evidente, que o desenvolvimento que vimos de obter é absolutamente convergente em região egual á das series factores.

Temos pois o desenvolvimento

$$\frac{1}{(1-2\alpha\cos\phi-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^n\,\mathrm{P}_n(\cos\phi),\quad(\alpha<1),$$

do qual, derivando em relação a α e attendendo ás propriedades das series inteiras, deduzimos

$$\frac{\cos\phi-\alpha}{(1-2\alpha\cos\phi+\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{n=\infty}n\,\alpha^{n-1}\,\mathrm{P}_n(\cos\phi).$$

Combinando os dois ultimos resultados, obtem-se

$$(5)\qquad \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\phi+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\,\alpha^n\,\mathrm{P}_n(\cos\phi),\quad(\alpha<1),$$

que é o desenvolvimento pedido.

10. Agora é facil demonstrar o theorema do n.º 8.

A serie (5) póde considerar-se uma serie uniformemente convergente em θ e ψ. Por conseguinte as egualdades (3) e (4), pondo

$$(6)\qquad \mathrm{Y}_n(\theta,\psi)=\frac{2n+1}{\mathrm{R}^n}\iint \mathrm{P}_n(\cos\phi).f(\Theta,\Psi).\mathrm{R}^2\,\mathrm{sen}\Theta\, d\Theta\, d\Psi,$$

dão a serie

$$(7)\qquad \mathrm{V}(x,y,z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}r^n\,\mathrm{Y}_n(\theta,\psi)$$

convergente na esphera de raio R.

Reflectindo um pouco, via-se logo que esta convergencia é absoluta e uniforme. Mas é facil pô-lo em evidencia.

Designemos por L o limite superior da funcção continua $f(\Theta, \psi)$ sobre a esphera, e consideremos a serie de termos positivos

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)L\frac{r^n}{R^n}. \tag{8}$$

Esta serie é, como o mostra o desenvolvimento (5), convergente para $r<R$. Portanto, *à fortiori,* a serie (7) é absolutamente convergente em egual extensão.

Além d'isso nos pontos em que

$$\frac{r}{R} \leqq \epsilon, \quad \epsilon < 1,$$

a serie (7) é uniformemente convergente. Isto é, sendo δ um numero positivo arbitrariamente pequeno, póde-se determinar um inteiro positivo p tal que, na região indicada, se tenha

$$\left| \sum_{n=m}^{n=\infty} r^n Y_n(\theta, \psi) \right| < \delta, \quad m \geqq p.$$

Para o mostrar, Weierstrass (¹) procede assim: seja H um numero positivo menor que 1 mas maior que ϵ; a serie (8) é convergente para $\frac{r}{R} = H$; seja g um numero pelo menos egual á somma d'esta serie

$$g \geqq \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)LH^n,$$

(¹) Veja-se: Appell, log. cit., p. 317.

ter-se-ha evidentemente

$$g \geqq (2n+1)\mathrm{L}\mathrm{H}^n, \quad (2n+1)\mathrm{L} \leqq g\mathrm{H}^{-n}.$$

Mas, para $\frac{r}{\mathrm{R}} \leqq \epsilon$, tem-se

$$\left| \sum_{n=m}^{n=\infty} r^n \mathrm{Y}_n(\theta, \psi) \right| \leqq \sum_{n=m}^{n=\infty} (2n+1)\mathrm{L}\epsilon^n \leqq g \sum_{n=m}^{n=\infty} \left(\frac{\epsilon}{\mathrm{H}}\right)^n.$$

Ora a ultima somma é egual a $\frac{g}{1-\frac{\epsilon}{\mathrm{H}}}\left(\frac{\epsilon}{\mathrm{H}}\right)^m$; bastará pois determinar p pela condição

$$\frac{g}{1-\frac{\epsilon}{\mathrm{H}}}\left(\frac{\epsilon}{\mathrm{H}}\right)^p < \delta$$

para demonstrar a uniformidade da convergencia.

Voltemos ás coordenadas rectangulares. Attendendo á expressão de P_n e á de $\cos\phi$ concluimos que $\mathrm{Y}_n(\theta, \psi)$ é uma funcção inteira e de grau n de $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta\cos\psi$ e $\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi$. Ora como estas quantidades são de grau zero em ordem a $x-a$, $y-b$, $z-c$, segundo se vê das fórmulas

$$x = a + r\cos\theta, \quad y = b + r\operatorname{sen}\theta\cos\psi, \quad z = c + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi,$$

resulta que, pondo $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, o termo geral do desenvolvimento (7) é uma funcção inteira e homogenea de grau n de $x-a$, $y-b$, $z-c$.

Pondo por isso

$$(9) \qquad r^n \mathrm{Y}_n(\theta, \psi) = \mathrm{V}_n(x-a, y-b, z-c),$$

temos o desenvolvimento

$$(10) \qquad V(x, y, z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_n(x-a, y-b, z-c),$$

isto é, a funcção harmonica V desenvolvida numa serie de polynomios homogeneos, absoluta e uniformemente convergente numa *esphera de convergencia* para cujos pontos

$$\frac{r}{R} \leqq \epsilon, \quad \epsilon < 1. \qquad \text{C. q. d.}$$

Os polynomios V_n são harmonicos, como o mostram as notas do n.º 8.

Além d'isso exprimem-se, segundo a fórmula (9), em funcções muito notaveis. A funcção $Y_n(\theta, \psi)$ é chamada *funcção de Laplace* ou *funcção espherica d'ordem n*.

Sem querermos insistir nas importantes propriedades d'estas funcções [1], tão uteis na Mecanica Celeste e na Physica mathematica, diremos no emtanto que a funcção mais geral d'ordem n encerra $2n+1$ coefficientes arbitrarios (os quaes no nosso desenvolvimento têem valores particulares).

É facil reconhecê-lo partindo, para definir essa funcção, não do nosso polynomio V_n, mas do polynomio homogeneo mais geral e de grau n que satisfaz á equação de Laplace. Estes coefficientes têem um papel importante na solução do problema de Dirichlet relativo á esphera [2].

---

[1] Veja-se, por exemplo, Tisserand, *Mécanique Céleste*, t. II, cap. XVI e XVII. O livro classico para o estudo d'estas funcções é: Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1878.

[2] Painlevé, numa Memoria conhecida (*Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. II,

11. Inversamente, uma serie de polynomios harmonicos

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{V}_n(x, y, z)$$

representa uma funcção harmonica no interior de uma certa esphera, tendo por centro a origem das coordenadas.

Introduzindo as coordenadas polares, a serie considerada transforma-se nest'outra

$$(11) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n \mathrm{Y}_n(\theta, \psi).$$

Designemos por A_n o maior valor que toma Y_n quando θ varia de 0 a ϖ e ψ de 0 a 2ϖ, e consideremos a serie de termos positivos

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}_n r^n.$$

Esta serie converge para todos os valores de r inferiores a um numero determinado R; portanto a serie (11) converge absolutamente *à fortiori* no interior d'uma esphera de raio R.

Demonstra-se como anteriormente que a convergencia é uniforme no interior da mesma esphera.

Além d'isso seria facil de ver que a funcção representada pela serie admitte derivadas parciaes de todas as ordens que se obtem formando a serie das derivadas dos termos successivos. Temos

p. B), apresenta resultados mais geraes do que os que vimos d'obter, mostrando que toda a funcção harmonica se póde desenvolver d'uma infinidade de maneiras, numa serie de polynomios harmonicos. O que dissemos, porém, é sufficiente para o nosso ponto de vista.

pois

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}, \quad \ldots$$

e portanto

$$\Delta V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \Delta V_n = 0. \qquad \text{C. q. d.}$$

12. Terminaremos estas generalidades estabelecendo dois theoremas que adiante nos serão uteis e que estão para theoria das funcções harmonicas, como os theoremas de Abel para a theoria das series inteiras.

D'esses theoremas, o primeiro pelo menos está implicitamente contido nos trabalhos de Schwarz [1]. Entretanto foi Harnack quem primeiro os demonstrou.

I. Supponhamos que a serie

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + \ldots + U^{(n)} + \ldots,$$

cujos termos são funcções harmonicas positivas num certo espaço E, converge num ponto interior I d'este espaço. Digo que, *em qualquer região interior a* E, *a serie* U *convergirá uniformemente e representará uma funcção harmonica.*

Seja V uma funcção harmonica positiva numa esphera de centro I e de raio R; para um ponto interior P e para o centro I, tem-se

$$V_P = \frac{1}{4\varpi R} \iint \frac{(R^2 - d^2) V \, d\sigma}{r^3}, \quad V_I = \frac{1}{4\varpi R^2} \iint V \, d\sigma.$$

---

[1] Ver a these de Jules Riemann: *Sur le problème de Dirichlet*, p. 13. (Foi publicada nos *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1888).

Ora como V é positivo, e como

$$\frac{R-d}{(R+d)^2} < \frac{R^2-d^2}{r^3} < \frac{R+d}{(R-d)^2}$$

por isso que r está sempre comprehendido entre $R+d$ e $R-d$, será

$$\frac{R(R-d)}{(R+d)^2} V_I < V_P < \frac{R(R+d)}{(R-d)^2} V_I.$$

Suppondo a esphera interior ao espaço E e applicando a relação precedente á funcção

$$V = U^{(n)} + U^{(n+1)} + \ldots + U^{(n+m)},$$

resulta, quaesquer que sejam n e m,

$$\frac{R(R-d)}{(R+d)^2} \sum_{i=n}^{n+m} U_I^{(i)} < \sum_{i=n}^{n+m} U_P^{(i)} < \frac{R(R+d)}{(R-d)^2} \sum_{i=n}^{n+m} U_I^{(i)}.$$

Convergindo a serie U no ponto I, convergirá pois em todo o ponto P interior á esphera: e convergirá uniformemente como o mostra tambem a desegualdade anterior.

Resta-nos demonstrar que U representa uma funcção harmonica. Descrevamos de I como centro uma esphera de raio $R' < R$. A serie U é uniformemente convergente em toda a esphera R'; portanto podemos integrá-la ao longo da superficie da esphera formando a somma dos integraes dos seus termos, o que dá

$$\frac{1}{4\varpi R'} \iint \frac{R'^2 - d^2}{r^3} U d\sigma = U_P^{(0)} + U_P^{(1)} + \ldots + U_P^{(n)} + \ldots = U_P.$$

É facil agora provar que U_P, funcção das coordenadas (a, b, c)

do ponto P, é harmonica; basta provar que a expressão $Q=\frac{R'^2-d^2}{r^3}$ o é. Ora, attendendo ás relações

$$R'^2=x^2+y^2+z^2, \qquad d^2=a^2+b^2+c^2,$$
$$r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2,$$

temos successivamente

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=-\frac{2a}{r^3}-\frac{3(a-x)(R'^2-d^2)}{r^5},$$
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2}=-\frac{2}{r^3}+\frac{12a(a-x)}{r^5}-\frac{3(R'^2-d^2)}{r^5}+\frac{15(a-x)^2(R'^2-d^2)}{r^7},$$

....

D'onde se deduz

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial c^2}=-\frac{6}{r^3}+12\frac{a(a-x)+b(b-y)+c(c-z)}{r^5}$$
$$+\frac{6(R'^2-d^2)}{r^5}=0,$$

por ser

$$r^2=a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz$$

e portanto

$$a(a-x)+b(b-y)+c(c-z)=d^2+\frac{1}{2}(r^2-d^2-R'^2).$$

Isto posto, como por meio d'um numero limitado de espheras cortando-se successivamente podemos attingir um ponto qualquer, fica o theorema demonstrado para qualquer região comprehendida no espaço considerado.

II. Sejam $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$ funcções harmonicas no interior d'um espaço E limitado por uma superficie S, e supponhamos que $u_I^{(n)}$ tende para $U_M^{(n)}$ quando o ponto interior I tende para o ponto M da superficie por um caminho qualquer; supponhamos mais que a serie

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + \ldots + U^{(n)} + \ldots$$

é uniformemente convergente sobre a superficie. Digo que *a serie*

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} \ldots + u^{(n)} + \ldots$$

será uniformemente convergente em todo o espaço E *e representará uma funcção harmonica. Além d'isso* u_I *tenderá para* U_M *quando* I *tender para* M *por um caminho qualquer.*

Sendo U uniformemente convergente, poder-se-ha, dada a quantidade positiva ϵ arbitrariamente pequena, tomar n bastante grande para que, em qualquer ponto da superficie e para qualquer valor de p, se tenha

$$| U^{(n)} + \ldots + U^{(n+p)} | < \epsilon.$$

Ora, (n.º 5, th. IV), a quantidade

$$| u^{(n)} + \ldots + u^{(n+p)} |$$

no interior do espaço considerado é inferior ao maximo da expressão antecedente sobre a superficie; resulta d'aqui que a serie u é, no espaço E, uniformemente convergente.

Raciocinio egual ao empregado no theorema anterior mostra que u é harmonica.

Para demonstrar o ultimo ponto notemos que, pelas condições do theorema, se tem, suppondo I e M sufficientemente proximos e n arbitrario,

$$\left|\sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{U}_{\mathrm{M}}^{(i)} - \sum_{i=0}^{i=n} u_{\mathrm{I}}^{(i)}\right| < \epsilon.$$

Pondo $p = \infty$ nas ultimas quantidades consideradas, é facil de ver que se tem

$$\left|\sum_{i=0}^{i=\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{M}}^{(i)} - \sum_{i=0}^{i=\infty} u_{\mathrm{I}}^{(i)}\right| < 3\epsilon. \qquad \text{C. q. d.}$$

III. PRINCIPIO E PROBLEMA DE DIRICHLET.

16. Consideremos um espaço E limitado por uma superficie fechada, simples ou multipla, S. E supponhamos que sobre S era dada uma successão continua de valores, cada um associado a um ponto da superficie.

Eis o problema que vae occupar-nos:

Determinar uma funcção V *harmonica em todo o espaço* E *e tomando sobre a superficie* S *os valores dados.*

É o problema da integração da equação de Laplace por meio dos valores que o integral toma sobre a superficie.

O *principio de Dirichlet* affirma que o problema admitte sempre uma solução e uma unica, qualquer que seja a superficie dada. O *problema de Dirichlet* trata d'obter essa solução.

Estas denominações, introduzidas por Riemann na sua memoravel dissertação inaugural, são hoje correntes na Sciencia, embora mal escolhidas, por isso que o problema já havia preoccupado varios geometras anteriores a Dirichlet [1].

Riemann deu do principio uma demonstração que attribue a Dirichlet, muito breve, mas que não apresenta um rigor suffi-

---

[1] Sobre a historia do problema e mais indicações bibliographicas, veja-se: Duhem, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. I, p. 151 e seg.

ciente. Vamos porém expô-la porque ella reduz o principio a uma questão de minimo.

17. Principiemos por demonstrar os dois theoremas que seguem.

I. Sejam no espaço considerado: V uma funcção harmonica; U uma funcção uniforme, finita e contínua bem como as suas derivadas parciaes de primeira e segunda ordem, e tomando sobre a superficie que fecha o nosso espaço os mesmos valores que V. Nestas condições, o *integral*

$$(1) \quad \mathrm{I(U)} = \iiint \left[\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

é minimo para U = V.

Ponhamos, com effeito, $\mathrm{U} - \mathrm{V} = \omega$; ter-se-ha

$$\mathrm{I(U)} = \mathrm{I(V)} + \mathrm{I}(\omega) + 2\iiint \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Ora uma fórmula conhecida (n.º 2) mostra que

$$\iiint \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= -\iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\,\omega\, d\sigma - \iiint \omega \,\Delta \mathrm{V}\, dx\, dy\, dz:$$

expressão nulla por isso que, sobre a superficie, $\omega = 0$ e, no espaço, $\Delta \mathrm{V} = 0$. Por conseguinte

$$\mathrm{I(U)} = \mathrm{I(V)} + \mathrm{I}(\omega).$$

Como os dois termos do segundo membro são essencialmente positivos, $I(U)$ é minimo para $I(\omega)=0$, isto é, para $U=V$ visto que ω é nulla sobre a superficie.

II. Inversamente, *se o integral* $I(U)$ *é minimo para* $U=V$, *sendo* V *uma funcção analoga a* U *e que toma sobre a superficie os mesmos valores que* U, V *será harmonica.*

Façamos

$$U=V+\alpha\theta,$$

sendo α uma constante e θ uma funcção analoga a U e V, mas annullando-se sobre a superficie. Resulta

$$I(U)=I(V)+2\alpha\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{dV}{dx}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{d\theta}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{d\theta}{dz}\right)dx\,dy\,dz+\alpha^2 I(\theta).$$

Como I é minimo para $\alpha=0$, deve ser $\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}=0$, isto é, deve ser nullo o coefficiente de α: logo

$$(2)\qquad \int\!\!\int\!\!\int \theta\,\Delta V\,dx\,dy\,dz=0.$$

Ora θ não está sujeita a annullar-se em todo o espaço E. Supponhamos que, num ponto (a, b, c) do interior de E, ΔV não é nullo: será d'um signal invariavel numa certa extensão E' comprehendendo (a, b, c).

Definamos θ nos espaços $E-E'$ e E', respectivamente, pelas egualdades

$$\theta=0,\quad \theta=[\rho^2-(x-a)^2-(y-b)^2-(z-c)^2]^m,$$

sendo ρ o raio vector do ponto (x, y, z) prolongado até á superficie que termina E' e m um inteiro superior a 2: então as derivadas de θ conservarão a continuidade na passagem de E' para $E-E'$. Mas, para uma tal funcção, o integral (2) não póde ser nullo. Resulta que, em todo o espaço,

$$\Delta V = 0. \qquad \text{C. q. d.}$$

18. Postos estes dois theoremas, notemos que o integral (1) que vimos de considerar, sendo positivo e não podendo annullar-se, é limitado inferiormente.

Dirichlet considera evidente que, entre as funcções U, existe uma, V, que faz tomar ao integral I esse valor limite; sendo assim, segundo o ultimo theorema, V será harmonica e o principio de Dirichlet acha-se demonstrado.

Demais já se sabe que, se o problema admitte uma solução, essa solução será unica (n.º 5, th. V).

A affirmação de Dirichlet, porém, não passa de uma hypothese porque uma funcção limitada não toma forçosamente o seu valor limite [1]; de sorte que a demonstração que indicamos considera-se hoje insufficiente.

Veremos adiante que a Analyse possue actualmente methodos seguros para demonstrar em casos muitissimo extensos, mas apesar de tudo particulares, o principio de Dirichlet e simultaneamente para resolver o problema.

19. Parallelo ao problema precedente ha um outro, analogo, mas relativo ao espaço connexo *exterior* a uma superficie simples ou multipla. As considerações que seguem vão permittir-nos formular esse problema e reduzí-lo ao problema *interior*.

Transformemos a superficie S por meio de raios vectores reciprocos collocando num mesmo ponto interior a S a origem das coordenadas e o polo da transformação, a qual, nessas condições,

[1] Assim a funcção $y = x - [x]$, onde $[x]$ é o maior inteiro contido em x, admitte o limite superior 1 mas sem nunca lhe ser egual.

é definida pelas fórmulas conhecidas

$$x=\frac{k^2\xi}{\rho^2},\quad y=\frac{k^2\eta}{\rho^2},\quad z=\frac{k^2\zeta}{\rho^2},\quad \rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,\quad (k=\text{const.}).$$

Á superficie S fica correspondendo uma superficie S′; a todo o ponto interior a S um ponto exterior a S′; aos pontos infinitamente vizinhos da origem no primeiro espaço, os pontos infinitamente affastados da origem no segundo espaço.

William Thomson (1) foi quem introduziu este methodo de transformação no estudo das questões que nos occupam. Deve-se ao illustre physico inglez a seguinte importantissima nota: *se a funcção* V(x, y, z) *é harmonica no interior da superficie* S, *a funcção*

$$W(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{\rho}V\left(\frac{k^2\xi}{\rho^2},\ \frac{k^2\eta}{\rho^2},\ \frac{k^2\zeta}{\rho^2}\right)$$

será harmonica no exterior da superficie S′. É o que, com effeito, vamos verificar.

Formemos a expressão

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}=V\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{1}{\rho}+2\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\rho}\cdot\Sigma\frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\xi}$$

$$+\frac{1}{\rho}\sum\left[\frac{d^2V}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2+\frac{d^2V}{dx\,dy}\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\xi}+\frac{d^2V}{dx\,dz}\frac{dx}{d\xi}\frac{dz}{d\xi}+\frac{dV}{dx}\frac{d^2x}{d\xi^2}\right]$$

onde o signal $\sum$ se refere aos termos que se obtêem dos indicados por meio de permutações circulares de x, y, z. Expressões semelhantes se acham para as outras derivadas parciaes. A sua

(1) *Journal de Liouville*, t. XII, p. 256.

somma é

$$\Delta W = V . \Delta \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \sum \frac{dV}{dx} \Delta x$$

$$+ 2 \sum \frac{dV}{dx} \left(\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dx}{d\eta} + \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dx}{d\zeta} \right)$$

$$+ \frac{2}{\rho} \sum \frac{d^2V}{dx\,dy} \left(\frac{dx}{d\xi} \frac{dy}{d\xi} + \frac{dx}{d\eta} \frac{dy}{d\eta} + \frac{dx}{d\zeta} \frac{dy}{d\zeta} \right)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \sum \frac{d^2V}{dx^2} \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 \right]$$

onde $\sum$ tem a mesma extensão que na ultima egualdade.

É facil de ver que, neste resultado, são nullos o coefficiente de V e os das suas derivadas em ordem a x, y, z, xy, yz, zx, e que os das restantes derivadas têem o valor commum $\frac{k^4}{\rho^5}$. Logo

$$\Delta W = \frac{k^4}{\rho^5} \Delta' V = 0. \qquad \text{C. q. d.}$$

Das duas funcções V e W, uma diz-se a transformada da outra. Se, como temos supposto, $V(x, y, z)$ tem na origem um ponto ordinario, então W apresenta para $\rho = \infty$ os seguintes caracteres: 1) é finito o valor de lim. ρW e portanto nullo o de W; 2) é finito o valor de lim. $\rho^2 \frac{dW}{d\xi}, \ldots$, e portanto nullo o de $\frac{dW}{d\xi}, \ldots$, como se deduz da expressão

$$\rho^2 \frac{dW}{d\xi} = -\frac{\xi}{\rho} V + \frac{k^2}{\rho} \left(\frac{dV}{dx} \frac{\rho^2 - 2\xi^2}{\rho^2} - \frac{dV}{dy} \frac{2\eta\xi}{\rho^2} - \frac{dV}{dz} \frac{2\zeta\xi}{\rho^2} \right)$$

attendendo a que o limite das quantidades $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta\xi}{\rho^2}$ e $\frac{\zeta\xi}{\rho^2}$ é finito.

A funcção W apresenta pois no ∞ os caracteres da funcção potencial ([1]), o que se exprime muitas vezes dizendo que W se annulla no infinito como uma funcção potencial. Nós diremos que W *é regular no infinito.*

Podemos agora ennunciar o problema *exterior* de Dirichlet:

Determinar uma funcção que seja harmonica no exterior d'uma superficie S, *tome sobre esta superficie uma successão continua de valores dados e seja regular no infinito.*

Vemos ao mesmo tempo que, pelo methodo de Thomson, a sua resolução se reduz á do problema interior. Fica assim reconhecida, de uma maneira directa, a necessidade das condições que Picard (log. cit., t. I, p. 144) impõe no infinito á funcção harmonica.

19. Para completarmos o que diz respeito ao problema exterior vamos estabelecer a fórmula de Green relativa a este caso, seguindo o caminho que nos suggere a nota de Thomson.

Limitemos o espaço, exterior á superficie dada S, por uma esphera Σ descripta da origem como centro com o raio R, e appliquemos ao ponto (a, b, c) do espaço assim obtido, a fórmula do n.º 3.

A parte do integral relativa a Σ é nulla. Com effeito, o emprego das coordenadas polares e o facto da funcção ser regular no infinito mostram que essa parte tende para zero á medida que R augmenta; e como, por outro lado, é independente de R, será nulla.

Temos pois a fórmula

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi} \iint_S \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} \right) d\sigma,$$

([1]) Veja-se: Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 164.

onde as derivadas são tomadas segundo a normal exterior á superficie.

Partindo d'esta fórmula e seguindo uma marcha analoga á do capitulo ultimo, concluimos que uma funcção, harmonica no exterior d'uma esphera de raio R e de centro (a, b, c), e regular no infinito, é expressa pela serie

$$V(x,y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4\varpi}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \int\int P_n(\cos\phi) f(\Theta,\psi) R^2 \operatorname{sen}\Theta d\Theta d\psi$$

uniformemente convergente em todos os pontos que verificam a condição

$$\frac{R}{r} \leqq \epsilon, \quad \epsilon < 1.$$

Á expressão precedente póde dar-se a fórma

$$(2) \qquad V(x,y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Y_n(\theta,\psi)}{r^{n+1}}$$

onde $Y_n(\theta, \psi)$ é uma funcção espherica de ordem n.

Ora, como já vimos, é

$$r^n Y_n(\theta,\psi) = V_n(x-a, y-b, z-c),$$

sendo V_n um polynomio harmonico, homogeneo e de grau n. E como

$$V(x,y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n Y(\theta,\psi)}{r^{2n+1}},$$

ter-se-ha a fórmula

$$V(x,y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{V_n(x-a, y-b, z-c)}{r^{2n+1}},$$

que é de uso escrever

$$(3)\qquad V(x,y,z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} V_{-(n+1)}(x-a,y-b,z-c).$$

A funcção $V_{-(n+1)}(x-a,y-b,z-c)$ é harmonica, porque sendo o polynomio V_n harmonico, tambem o será, segundo o theorema de Thomson, a funcção

$$\frac{1}{r}V_n\left(\frac{x-a}{r^2},\frac{y-b}{r^2},\frac{z-c}{r^2}\right)=\frac{V_n(x-a,y-b,z-c)}{r^{2n+1}}.$$

A fórma (3) de desenvolvimento caracterisa, seria facil vê-lo, a regularidade da funcção no infinito.

20. Na integração da equação de Laplace, e bem assim de outras equações analogas que apparecem na Physica Mathematica, desempenha um papel importante uma funcção a que Riemann deu o nome de *funcção de Green* (¹).

Limitando-nos á equação de Laplace, diremos que foi pelo emprego d'essa funcção que primeiro se conseguiu resolver completamente o problema de Dirichlet no caso de duas variaveis, graças aos trabalhos de Harnack (²).

Sejam $P(x,y,z)$ e $I(a,b,c)$ dois pontos pertencentes ao espaço considerado E, um movel e outro fixo. Seja r a sua distancia.

A funcção de Green, $G(x,y,z)$, é assim definida: α) é har-

(¹) Vejam-se, por exemplo, varias Memorias recentes de Picard e Poincaré sobre equações ás derivadas parciaes, lineares e de 2.ª ordem.

(²) Veja-se: Harnack, *Die Grundlagen der theorie des logarithmischen potentiales*, p. 116; 1887. Póde vêr-se um esboço dos trabalhos de Harnack na these de Jules Riemann, log. cit., p. 65.

monica em todo o espaço E excepto no ponto I onde se torna infinita; β) annulla-se sobre a superficie S que limita E; γ) a differença $G - \frac{1}{r}$ é harmonica mesmo no ponto I a que, para abreviar, se dá o nome de *polo* da funcção de Green, apezar da accepção differente que essa palavra tem na theoria das funcções.

Se o problema de Dirichlet para o espaço considerado tem solução, a funcção de Green relativa a um polo I existe e é unica.

Com effeito, seja $\theta(x, y, z)$ uma funcção harmonica em E e tomando em cada ponto de S o valor $-\frac{1}{r}$. A expressão

$$G(x, y, z) = \theta(x, y, z) + \frac{1}{r}$$

será a funcção procurada. Não póde existir uma segunda porque, era facil vel-o, a differença das duas seria identicamente nulla.

Vê-se pois que, sabendo resolver o problema de Dirichlet, se sabe construir a funcção de Green.

Inversamente, *conhecida a funcção de Green, sabe-se resolver o problema de Dirichlet*. Consideremos, na verdade, uma funcção qualquer V, harmonica no espaço E. Temos a relação (n.º 2, fórm. 3)

$$\iint_S \left(V \frac{d\theta}{dn} - \theta \frac{dV}{dn} \right) d\sigma = 0$$

que, visto ser $\theta = -\frac{1}{r}$ sobre a superficie, se póde escrever

$$\iint_S V \frac{d\theta}{dn} d\sigma = -\iint_S \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Por outro lado tem-se, para o ponto I,

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi} \iint_S \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma,$$

ou, attendendo á ultima egualdade,

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi} \iint_S V \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \tag{4}$$

Notemos, de passagem, que por meio da funcção G se consegue eliminar da fórmula de Green a derivada $\frac{\partial V}{\partial n}$ (Cf. n.º 6).

Agora a questão reduz-se ao seguinte. Suppondo que a funcção V que está sob o integral é uma funcção contínua das coordenadas que fixam a posição d'um ponto sobre a superficie da esphera, provar: 1) que a funcção $V(a, b, c)$, definida pela fórmula (4), é integral da equação de Laplace; 2) que, quando o ponto interior G tende para o ponto N da superficie, o valor $V(a, b, c)$ tende para o valor V_N dado nesse ponto.

Relativamente ao primeiro ponto basta notar que da fórmula (4), que se póde escrever

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi} \iint_S V \frac{\partial}{\partial n} \left(\theta + \frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

tiramos

$$\Delta V(a, b, c) = \frac{1}{4\varpi} \iint_S V \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta \theta + \Delta \frac{1}{r} \right) d\sigma = 0$$

pondo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2}{\partial c^2}. \qquad \text{C. q. d.}$$

A demonstração do segundo ponto é longa e delicada; e como neste breve trabalho não empregamos a funcção de Green, limitamo-nos a citar, para o caso analogo das duas variaveis, o livro de Harnack [1] a quem a demonstração é devida.

21. Como applicação do que vimos de dizer, procuremos a solução do problema de Dirichlet no caso d'uma esphera. É uma das fórmas do *problema de Laplace.*

Adoptaremos a notação do n.º 6, apenas com a differença de representarmos pela lettra M um ponto qualquer da esphera e não simplesmente um ponto da superficie.

Afim de obtermos a funcção de Green relativa á esphera e ao polo $I(a, b, c)$, notemos que a quantidade

$$-\frac{R}{d}\cdot\frac{1}{r_1},$$

funcção das coordenadas x, y, z do ponto M, é harmonica em toda a esphera e toma sobre a sua superficie o valor $-\frac{1}{r}$, como se deprehende da relação $\frac{1}{r}=\frac{R}{d}\cdot\frac{1}{r_1}$ demonstrada em o n.º 6.

Segue-se d'aqui que a funcção de Green procurada é

$$(5)\qquad G(x, y, z)=\frac{1}{r}-\frac{R}{d}\cdot\frac{1}{r_1};$$

e portanto que a expressão (já obtida por outra via)

$$V(a, b, c)=\frac{1}{4\varpi}\iint V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{d}\cdot\frac{1}{r_1}\right)d\sigma$$

---

[1] Log. cit., p. 121. Póde vêr-se tambem sobre o assumpto: Jules RIEMANN, log. cit, p. 72.

fornece, segundo a fórmula (4), o *integral da equação de Laplace no caso da esphera.*

Supprindo uma lacuna do ultimo numero, vamos estabelecer directamente que, quando I tende para o ponto N da superficie, V_I tende para o valor de V nesse ponto.

Seguiremos, com Picard ([1]), uma marcha analoga á que usa Schwarz no caso de duas variaveis.

O integral anterior póde escrever-se (n.º 6)

$$(6) \qquad V(a,b,c) = \frac{1}{4\varpi R}\iint \frac{(R^2-d^2)\,V\,d\sigma}{(R^2-2dR\cos\phi+d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se notarmos que existe uma funcção harmonica que é egual á unidade em todos os pontos da esphera [é a funcção $V(a,b,c)=1$], teremos, segundo a fórmula fundamental (n.º 3, fórm. 6),

$$\frac{1}{4\varpi R}\iint \frac{(R^2-d^2)\,d\sigma}{(R^2-2dR\cos\phi+d^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

qualquer que seja o ponto interior (a, b, c). O que permitte dar a (6) a fórma

$$(7) \qquad V(a,b,c) = V_N + \frac{1}{4\varpi R}\iint \frac{(R^2-d^2)(V-V_N)\,d\sigma}{(R^2-2dR\cos\phi+d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vamos determinar um limite superior do termo que contém o integral.

Descrevamos, de N como centro, um pequeno circulo correspondente ao angulo t no centro da esphera. Esse circulo dividirá a superficie em duas calottes c e C: decomponhamos o

([1]) Log. cit., t. I, p. 150.

termo a estudar do segundo membro de (7) em duas parcellas, m e M, respectivas ás duas calottes.

Como a funcção V é contínua, poder-se-ha dispor de t de maneira que, em c, seja $|\mathrm{V}-\mathrm{V}_{\mathrm{N}}|<\epsilon$, sendo ϵ um numero positivo arbitrariamente pequeno. Tem-se então

$$|m|<\frac{\epsilon}{4\varpi\mathrm{R}}\iint_c \frac{(\mathrm{R}^2-d^2)\,d\sigma}{(\mathrm{R}^2-2d\mathrm{R}\cos\phi+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, *á fortiori*,

$$|m|<\epsilon.$$

Passemos á segunda parcella. Tem-se

$$(\mathrm{R}-d)^2>0$$

ou

$$\mathrm{R}^2+d^2>2d\mathrm{R},$$

e portanto, por ser, sobre C, $\cos\phi<\cos t$,

$$\mathrm{R}^2-2d\mathrm{R}\cos\phi+d^2>2d\mathrm{R}\,(1-\cos t).$$

Logo, designando por g o limite superior dos valores absolutos de V dados sobre a esphera, teremos

$$|\mathrm{M}|<\frac{2g}{4\varpi\mathrm{R}}\,\frac{\mathrm{R}^2-d^2}{[2d\mathrm{R}\,(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}}\iint_{\mathrm{C}} d\sigma.$$

Podemos pois escrever, segundo o que precede,

$$|\mathrm{V}(a,b,c)-\mathrm{V}_{\mathrm{N}}|<\epsilon+\frac{2g\mathrm{R}\,(\mathrm{R}^2-d^2)}{[2d\mathrm{R}\,(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Fazendo tender o ponto (a, b, c) para N, e portanto d para R, como ϵ é tão pequeno quanto se quer, resulta que $V(a, b, c)$ tende para V_N: é o que desejavamos demonstrar.

Dada pois uma successão contínua de valores V sobre a esphera, *a fórmula*

$$V(a,b,c) = \frac{1}{4\varpi R} \int\int \frac{(R^2 - d^2)\, V\, d\sigma}{(R^2 - 2dR\cos\phi + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dá o integral da equação de Laplace que toma sobre a superficie da esphera os valores dados.

Na pratica usa-se da serie já estudada

$$V(a,b,c) = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n\, Y_n(\theta, \psi).$$

Este resultado é susceptivel d'uma fórma mais elegante, mas que não podemos desenvolver aqui [1].

De maneira analoga se resolvia o problema exterior relativo á esphera. Digamos apenas que, quando o ponto (a, b, c) se suppõe fóra da esphera, a funcção de Green correspondente é dada ainda pela expressão (5).

---

[1] Veja-se: Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 413.

IV. TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE.

22. A theoria geral das coordenadas curvilineas orthogonaes é devida a Lamé. «O seu emprego, diz o illustre auctor, é especialmente importante nas questões relativas aos corpos cuja superficie, ou cujas differentes partes podem ser representadas por valores constantes de taes coordenadas» [1]. Tal é a origem da importancia d'esta theoria na solução do problema de Dirichlet.

Afim de effectuar a transformação da equação de Laplace, recordemos as noções indispensaveis.

Se designarmos por x, y, z as coordenadas cartesianas d'um ponto, e por λ, μ, ν tres parametros arbitrarios, as equações

$$f(x, y, z) = \lambda, \qquad \phi(x, y, z) = \mu, \qquad \psi(x, y, z) = \nu$$

definirão tres familias de superficies. Supponhamos que estas superficies são taes que tres d'ellas, cada uma de sua familia, tem em geral um só ponto commum. Como então este ponto fica determinado pelos valores particulares que os parametros tomam sobre as superficies que o contéem, os parametros λ, μ, ν denominam-se *as coordenadas curvilineas* do ponto (x, y, z).

---

[1] LAMÉ: *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § LII.

As tres superficies e suas linhas de intercepção dizem-se superficies e linhas coordenadas do ponto.

Supporemos o systema *orthogonal,* isto é, supporemos que as superficies coordenadas são, em cada ponto, perpendiculares entre si; neste caso succederá o mesmo ás linhas coordenadas.

Ao longo de cada linha coordenada varía unicamente um parametro. Segue-se d'aqui que os cosenos directores da tangente a uma das linhas coordenadas, (λ) por exemplo (fig. 3), valem

$$(1) \qquad \frac{1}{h_1}\frac{dx}{d\lambda}, \qquad \frac{1}{h_1}\frac{dy}{d\lambda}, \qquad \frac{1}{h_1}\frac{dz}{d\lambda},$$

se se põe

$$h_1^2 = \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2.$$

Analogamente os cosenos directores da normal á superficie ($\mu\nu$) são

$$(2) \qquad \frac{1}{k_1}\frac{d\lambda}{dx}, \qquad \frac{1}{k_1}\frac{d\lambda}{dy}, \qquad \frac{1}{k_1}\frac{d\lambda}{dz},$$

pondo

$$k_1^2 = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2.$$

Como a normal á superficie ($\mu\nu$) é tangente á curva (λ), os valores (1) são respectivamente eguaes aos valores (2). Multiplicando as egualdades assim obtidas por

$$\frac{d\lambda}{dx}, \qquad \frac{d\lambda}{dy}, \qquad \frac{d\lambda}{dz}$$

e sommando os resultados, encontra-se

$$k=\frac{1}{h_1}$$

e portanto

$$h_1\frac{d\lambda}{dx}=\frac{1}{h_1}\frac{dx}{d\lambda}.$$

Por meio de permutações circulares das coordenadas novas fórmulas se deduzem das que vimos de obter.

Tratemos agora de exprimir ΔV em coordenadas curvilineas. Ha muitas maneiras de effectuar a transformação (1). A que vamos expôr é fundamentalmente devida a Lamé.

Designemos, no calculo a fazer, as coordenadas cartesianas por $x_j, j=1,2,3$ e as curvilineas por $\lambda_i, i=1,2,3$.

Calculemos primeiro $\Delta\lambda_i$.

Da ultima egualdade que, na nossa notação, se escreve

$$h_i\frac{d\lambda_i}{dx_j}=\frac{1}{h_i}\frac{dx_j}{d\lambda_i},$$

deduz-se

$$\frac{d^2\lambda_i}{dx_j^2}=\frac{dx_j}{d\lambda_i}\frac{d}{dx_j}\frac{1}{h_i^2}+\frac{1}{h_i^2}\frac{d}{dx_j}\frac{dx_j}{d\lambda_i};$$

d'onde, fazendo $j=1,2,3$ e sommando,

$$\Delta\lambda_i=\frac{d}{d\lambda_i}\frac{1}{h_i^2}+\frac{1}{h_i^2}\sum_j\frac{d}{dx_j}\frac{dx_j}{d\lambda_i}.$$

---

(1) Cesàro, na sua *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità*, 1894, apresenta tres.

Para calcular o $\sum\limits_j$, formemos a egualdade

$$\frac{d}{dx_j}\frac{dx_j}{d\lambda_i}=\frac{d\lambda_1}{dx_j}\frac{d}{d\lambda_1}\frac{dx_j}{d\lambda_i}+\frac{d\lambda_2}{dx_j}\frac{d}{d\lambda_2}\frac{dx_j}{d\lambda_i}+\frac{d\lambda_3}{dx_j}\frac{d}{d\lambda_3}\frac{dx_j}{d\lambda_i}$$

$$=\frac{1}{h_1^2}\frac{dx_j}{d\lambda_1}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{dx_j}{d\lambda_1}+\frac{1}{h_2^2}\frac{dx_j}{d\lambda_2}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{dx_j}{d\lambda_2}+\frac{1}{h_3^2}\frac{dx_j}{d\lambda_3}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{dx_j}{d\lambda_3}.$$

Façamos $j=1,2,3$ e sommemos. O coefficiente de $\frac{1}{h_1^2}$ que é $\sum\limits_j \frac{dx_j}{d\lambda_1}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{dx_j}{d\lambda_1}$, reduz-se a $\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda_i}h_1^2=h_1\frac{dx_j}{d\lambda_i}$ segundo a expressão de h_1. Temos pois

$$\sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{dx_j}{d\lambda_i}=\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\lambda_i}+\frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\lambda_i}+\frac{1}{h_3}\frac{dh_3}{d\lambda_i}=\frac{d}{d\lambda_i}\log(h_1 h_2 h_3),$$

e por conseguinte, pondo $T=h_1 h_2 h_3$,

$$(3)\qquad \Delta\lambda_i=\frac{1}{T}\left(T\frac{d}{d\lambda_i}\frac{1}{h_i^2}+\frac{1}{h_i^2}\frac{dT}{d\lambda_i}\right)=\frac{1}{T}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{T}{h_i^2}.$$

Isto posto, tem-se

$$\frac{d^2V}{dx_j^2}=\sum_j\frac{dV}{d\lambda_i}\frac{d^2\lambda_i}{dx_j^2}+\sum_i\frac{d\lambda_i}{dx_j}\frac{d}{dx_j}\frac{dV}{d\lambda_i}.$$

Logo, fazendo $j=1,2,3$ e sommando, temos

$$\Delta V=\sum_i\frac{dV}{d\lambda_i}\Delta\lambda_i+\sum_i\sum_j\frac{d\lambda_i}{dx_j}\frac{d}{dx_j}\frac{dV}{d\lambda}.$$

Ora

$$\sum_j \frac{d\lambda}{dx_j}\frac{d}{dx_j}\frac{dV}{d\lambda_i}=\frac{1}{h_i^2}\sum_j \frac{dx_j}{d\lambda_i}\frac{d}{dx_j}\frac{dV}{d\lambda_i}=\frac{1}{h_i^2}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{dV}{d\lambda_i},$$

portanto

$$\Delta V=\sum_i\left(\frac{dV}{d\lambda_i}\Delta\lambda_i+\frac{1}{h_i^2}\frac{d^2V}{d\lambda_i^2}\right)$$

ou, attendendo a (3),

$$\Delta V=\frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{dV}{d\lambda_i}\frac{d}{d\lambda_i}\frac{T}{h_i^2}+\frac{T}{h_i^2}\frac{d^2V}{d\lambda_i^2}\right)=\frac{1}{T}\sum_i\frac{d}{d\lambda_i}\left(\frac{T}{h_i^2}\frac{dV}{d\lambda_i}\right),$$

ou ainda

$$\Delta V=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{d}{d\lambda_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{dV}{d\lambda_1}\right)+\frac{d}{d\lambda_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{dV}{d\lambda_2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d}{d\lambda_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{dV}{d\lambda_3}\right)\right].$$

Esta fórmula importantissima é devida a Lamé (log. cit., § XIV) [1].

Voltando á nossa notação e egualando a zero a expressão anterior de ΔV obtem-se a transformada da equação de Laplace, a saber

$$(4)\quad \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{dV}{d\lambda}\right)+\frac{d}{d\mu}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{dV}{d\mu}\right)+\frac{d}{d\mu}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{dV}{d\mu}\right)=0.$$

23. O problema de Dirichlet apresenta-se agora sob a fórma

[1] Sobre a importancia do parametro differencial ΔV na Physica Mathematica, leia-se: BOUSSINESQ, *Cours d'Analyse*, t. I, 2.º fasc., p. 71.

seguinte: achar uma funcção V de λ, μ, ν que verifique a equação (4) no espaço limitado pela superficie

$$\theta(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

e tome sobre esta superficie os mesmos valores que a funcção

$$\tau(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

sendo θ e τ as transformadas das funcções analogas do problema primitivo.

Façamos duas applicações d'esta doutrina.

24. Consideremos primeiro as coordenadas *esphericas* ou *polares* dadas pelas fórmulas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi, \qquad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi,$$

que definem tres familias de superficies: espheras concentricas, cones circulares d'eixo commum tendo por vertice o centro da esphera, e uma familia de planos tendo o mesmo eixo.

Formando as egualdades

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r, \qquad h_3 = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

reconhece-se que, neste systema, a equação de Laplace é

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2} = 0.$$

Foi sob esta fórma que Laplace descobriu a equação que traz o seu nome. D'ella podiamos partir [1] para obter o integral que

[1] Jordan, log. cit., t. III, p. 411.

se apresenta, como vimos, sob a fórma d'uma serie de que cada termo se compõe d'uma potencia do raio multiplicada por uma funcção espherica.

25. Depois do systema polar, o systema orthogonal mais simples é o das *coordenadas ellipticas,* descoberto por Lamé, as quaes, para cada ponto (x, y, z), são as tres raizes reaes da seguinte equação do 3.° grau em u^2:

$$\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2-b^2}+\frac{z^2}{u^2-c^2}=1 \tag{5}$$

onde b e c designam duas constantes $(b<c)$.

Essas raizes, que designaremos por λ^2, μ^2, ν^2, verificam as relações

$$0<\nu^2<b^2<\mu^2<c^2<\lambda^2$$

e correspondem: λ a um ellipsoide, μ a um hyperboloide d'uma folha e ν a um hyperboloide de duas folhas, superficies homofocaes de 2.ª ordem que se cortam orthogonalmente em cada ponto.

A transformada, neste systema, da equação de Laplace obtem-se muito simplesmente da maneira que segue.

Derivemos (5) parcialmente em ordem a $x, y, z,$ considerando u como funcção d'essas variaveis definida pela propria equação, e façamos em seguida $u=\lambda$. Resulta a egualdade

$$\left[\frac{x^2}{(\lambda^2)^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}\right]\lambda\frac{d\lambda}{dx}=\frac{x}{\lambda^2}$$

e mais duas analogas, das quaes se tira

$$\frac{1}{h_1^2}=\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2\left[\frac{x^2}{(\lambda^2)^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}\right]}.$$

Ora notando que o primeiro membro de (5) fornece a identidade

$$\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2-b^2}+\frac{z^2}{u^2-c^2}-1=\frac{(u^2-\lambda^2)(u^2-\mu^2)(u^2-\nu^2)}{u^2(u^2-b^2)(u^2-c^2)},$$

que, derivada em ordem a u, dá, depois de fazer no resultado $u=\lambda$,

$$\frac{x^2}{(\lambda^2)^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)},$$

teremos a primeira das fórmulas seguintes:

$$h_1^2=\frac{(\mu^2-\lambda^2)(\nu^2-\lambda^2)}{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)},$$

$$h_2^2=\frac{(\nu^2-\mu^2)(\lambda^2-\mu^2)}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)},\qquad h_3^2=\frac{(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}.$$

Por conseguinte

$$\left(\frac{h_2\,h_3}{h_1}\right)^2=-(\mu^2-\nu^2)\frac{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}.$$

Fazendo, para abreviar,

$$f(\mu)=(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2),$$

virá

$$\frac{h_2\,h_3}{h_1}=(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\frac{f(\lambda)}{-f(\mu)f(\nu)}}.$$

Introduzindo este valor e os valores analogos na equação (4), vem

$$
(6)\begin{cases}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{f(\lambda)}\,\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{f(\lambda)}\,\dfrac{dV}{d\lambda}\right)+(\nu^2-\lambda^2)\sqrt{f(\mu)}\,\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\,\dfrac{dV}{d\mu}\right)\\[2ex] \qquad +(\lambda^2-\mu^2)\sqrt{f(\nu)}\,\dfrac{d}{d\nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\,\dfrac{dV}{d\nu}\right)=0\end{cases}
$$

que é a egualdade desejada.

26. A equação (6) é o ponto de partida da Memoria (1) classica de Lamé *sobre o equilibrio das temperaturas num ellipsoide de tres eixos deseguaes.*

A questão analytica reduz-se ao problema de Dirichlet, assim posto: sendo a superficie do ellipsoide representada pela equação $\lambda=\lambda_0$, achar uma funcção V que, para $\lambda<\lambda_0$, verifique a equação (6) e que, para $\lambda=\lambda_0$, se reduza a uma funcção dada ω de μ e ν.

Vamos dar um rapido esboço da bella analyse de Lamé, notavel, entre outros titulos, por constituir «uma das primeiras applicações das funcções ellipticas de que, annos antes, Abel e Jacobi haviam lançado as bases».

Lamé, guiado por engenhosas considerações induzidas do caso então conhecido da esphera, ensaiou satisfazer á equação (6) pelo producto

$$V=LMN$$

onde L, M e N eram funcções que apenas dependiam, respectivamente, de λ, μ e ν.

Com essa funcção satisfaz-se á equação (6), se, chamando g e

(1) *Journal de Liouville,* 1.ª serie, t. IV, p. 126.

h duas constantes, pozermos

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{f(\lambda)}}{\mathrm{L}}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{f(\lambda)}\dfrac{d\mathrm{L}}{d\lambda}\right)=g\lambda^2+h, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{f(\mu)}}{\mathrm{M}}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=g\mu^2+h, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{f(\nu)}}{\mathrm{N}}\dfrac{d}{d\nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\dfrac{d\mathrm{N}}{d\nu}\right)=g\nu^2+h, \end{cases}$$

por isso que ella se reduz á identidade

$$(h+g\lambda^2)(\mu^2-\nu^2)+(h+g\mu^2)(\nu^2-\lambda^2)+(h+g\nu^2)(\lambda^2-\mu^2)=0.$$

A questão está pois em integrar uma das equações (7), a ultima por exemplo, que se póde escrever

$$(8)\qquad \frac{d^2\mathrm{N}}{d\nu^2}f(\nu)+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{N}}{d\nu}f'(\nu)-\mathrm{N}(h+g\nu^2)=0$$

e que é conhecida com o nome de *equação de Lamé*.

Este geometra demonstrou que, para $h=n(n+1)$, havia $2n+1$ valores de g, para os quaes a equação (8) admitte uma solução d'uma das fórmas

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}_n(\nu), \quad \sqrt{b^2-\nu^2}\,\mathrm{P}_{n-1}(\nu), \quad \sqrt{c^2-\nu^2}\,\mathrm{P}_{n-1}(\nu), \\[1ex] \qquad \sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\,\mathrm{P}_{n-2}(\nu), \end{cases}$$

onde os P são polynomios em ν, d'um grau egual ao seu indice e não contendo senão potencias da mesma paridade. São as *fun-*

cções de Lamé. Heine [1] fez um estudo profundo d'estas funcções mostrando a sua analogia com as funcções esphericas.

Sabemos pois formar o producto

$$LMN,$$

isto é, uma solução simples da equação (6). E como esta equação é linear, associando um numero qualquer de soluções simples, obtem-se uma nova solução.

Sejam $(L_n M_n N_n)$ uma solução simples qualquer, A_n uma constante arbitraria e L'_n o que se torna L_n para $\lambda = \lambda_0$. A serie

$$V = \sum_n \frac{A_n}{L'_n} L_n M_n N_n \tag{10}$$

satisfaz formalmente á equação (6), e, á superficie do ellipsoide, reduz-se a

$$\sum_n A_n M_n N_n.$$

Na exposição do problema de Lamé, nada mais se faz, que saibamos, do que mostrar a possibilidade do desenvolvimento

$$\omega(\mu, \nu) = \sum_n A_n M_n N_n, \tag{11}$$

isto é, do desenvolvimento d'uma funcção arbitraria de μ, ν segundo os productos das funcções M_n e N_n. E, quando muito, prova-se a convergencia do desenvolvimento (10). Ha evidentemente, nesta fórma de proceder, uma falta de rigor. Crêmos que, recordando o segundo theorema d'Harnack, é possivel concluir de (11) o desenvolvimento (10).

---

(1) Heine, log. cit.

A respeito d'este desenvolvimento e d'outros pontos que apenas indicamos, póde ler-se, além da Memoria de Lamé: Jordan, log. cit., t. III, p. 419, ou Laurent, *Traité d'Analyse,* t. VI, p. 307.

Como a solução do problema é unica, os integraes da equação de Lamé que empregamos, embora particulares, satisfazem plenamente.

Entretanto não deixaremos o assumpto sem dizer que a equação de Lamé, d'uma importancia capital nos methodos novos da Mecanica Celeste, tem sido objecto de profundas investigações.

Para lhe dar a fórma usual, introduzamos os argumentos ellipticos

$$(12) \quad \begin{cases} u=\displaystyle\int_c^\lambda \frac{cd\lambda}{\sqrt{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}, \quad v=\displaystyle\int_b^\mu \frac{cd\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}, \\ \qquad\qquad w=\displaystyle\int_0^\mu \frac{cd\mu}{\sqrt{(b^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}}. \end{cases}$$

Teremos

$$\frac{du}{d\lambda}=\frac{c}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad \frac{dv}{d\mu}=\frac{c}{\sqrt{-f(\mu)}}, \quad \frac{dw}{d\mu}=\frac{c}{\sqrt{f(\mu)}}.$$

Logo

$$\frac{d^2N}{dw^2}=\frac{d}{dw}\left(\frac{dN}{d\mu}\frac{d\mu}{dw}\right)=\frac{d^2N}{d\mu^2}\frac{f(\mu)}{c^2}+\frac{1}{2}\frac{dN}{d\mu}\frac{f(\mu)}{c^2},$$

e portanto a equação (8) torna-se

$$(13) \qquad c^2\frac{d^2N}{dw^2}=(g+h\mu^2)N.$$

A ultima das equações (12) dá, segundo a notação das funcções ellipticas,

$$\mu = b \operatorname{sn} w, \qquad \sqrt{b^2 - \mu^2} = b \operatorname{cn} w, \qquad \sqrt{c^2 - \mu^2} = c \operatorname{dn} w,$$

sendo $k = \frac{b}{c}$ o modulo.

Pondo em (13) $\frac{g}{c^2} = m$ e $n(n+1)$ em vez de h, vem a *equação de Lamé*

$$\frac{d^2 N}{dw^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 w + m]N.$$

Os integraes de Lamé correspondem a valores particulares de m. Podem exprimir-se nas funcções ellipticas, tendo por argumentos u, v e w; ex.:

$$P_n(\mu) = \operatorname{sn}^n w + m_1 \operatorname{sn}^{n-2} w + \dots$$

Actualmente conhece-se, para qualquer valor de m, o integral geral da equação de Lamé, graças aos admiraveis trabalhos de Hermite (1).

27. Eis o problema de Dirichlet resolvido para o interior d'um ellipsoide. O mesmo processo, exactamente como na esphera, dá a solução para o exterior — problema equivalente ao da distribuição da electricidade á superficie do ellipsoide.

Esta via, aberta por Lamé, permittiu estender consideravelmente o numero de casos de solubilidade do problema. É assim, para dar um exemplo, que desde ha muito se sabe resolver o

(1) *Comptes rendus* (1877). — Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 457.

problema para qualquer espaço, limitado ou illimitado, que tem por fronteira uma superficie de 2.ª ordem.

Digamos, todavia, que o methodo só é fecundo com as superficies que fazem parte d'um systema de coordenadas curvilineas orthogonaes e isothermicas.

V. METHODO D'INVERSÃO.

28. Depois da transformação que vimos d'estudar e que, interessando a equação de Laplace, deixa intacta a superficie de integração, trataremos d'uma outra que, ao invez da primeira, não altera a equação de Laplace, mas substitue a superficie.

Supponhamos que a transformação

$$(1) \qquad X = P(x, y), \qquad Y = Q(x, y)$$

estabelece uma correspondencia uniforme entre os pontos dos planos (X, Y) e (x, y) de sorte que a uma area S do primeiro plano corresponde uma area s do segundo. E consideremos uma funcção $W(X, Y)$ que, na area S, satisfaz á equação

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0.$$

Quando se procuram as condições para que as expressões (1) transformem a funcção $W(X, Y)$ numa funcção $V(x, y)$ que, na area s, satisfaça á equação

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

encontra-se que a transformação (1) deve conservar os angulos, ou, como se usa dizer, deve realisar a *representação conforme* do plano (X, Y) sobre o plano (x, y). E sabe-se que, para ser assim, as funcções P e Q devem satisfazer á relação

$$P(x,y) + i\,Q(x,y) = F(x+iy), \qquad i = \sqrt{-1}$$

onde F é uma funcção analytica.

Schwarz, fundado nesta nota, isto é, procurando as funcções analyticas capazes de effectuarem a representação conforme de differentes areas num circulo, fez avançar muitissimo a solução do problema de Dirichlet no caso de duas variaveis.

Painlevé [1] propoz-se uma questão egual no caso de tres variaveis. Póde enunciar-se assim: *supponhamos que* W(X, Y, Z) *é harmonica num certo espaço* E; *trata-se de determinar as fórmulas de transformação*

$$(2) \qquad X = P(x, y, z), \qquad Y = Q(x, y, z), \qquad Z = R(x, y, z)$$

e uma funcção F *de* (W, x, y, z), *de fórma que, se substituirmos* X, Y, Z *expressos em* x, y, z *na funcção* W (X, Y, Z), *a funcção*

$$(3) \qquad V(x, y, z) = F(W, x, y, z)$$

seja harmonica no espaço transformado de E *pelas fórmulas* (2).

Calculemos o parametro differencial

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

servindo-nos da relação (3).

[1] *Travaux & Mémoires des facultés de Lille*, t. I, p. 1, 1889.

Temos

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial W^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial W\,\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

onde [1]

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sum\frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\sum\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+2\sum\frac{\partial^2 W}{\partial X\,\partial Y}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x}+\sum\frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Para $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ tem-se valores analogos permutando x, y, z.

Pondo

$$h_1^2=\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2,\qquad h_2^2=\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2,\qquad h_3^2=\int\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2,$$

e

$$k_1=\int\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x},\qquad k_2=\int\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x},\qquad k_3=\int\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x},$$

---

[1] Em todo este numero o signal $\sum$ substitue os termos que se obtêem dos indicados permutando X, Y, Z, e o signal $\int$ os que se obtêem permutando x, y, z.

deduz-se

$$(4)\qquad \Delta V = \frac{\partial F}{\partial W}\left(\sum h_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2\sum k_1 \frac{\partial^2 W}{\partial Y\,\partial Z}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial W^2}\left[\sum h_1^2 \left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 + 2\sum k_1 \frac{\partial W}{\partial Y}\frac{\partial W}{\partial Z}\right]\cdot$$

$$+ \sum \frac{\partial W}{\partial X}\left(2\int \frac{\partial^2 F}{\partial W\,dx}\frac{dX}{dx} + \frac{\partial F}{\partial W}\Delta X\right).$$

Supponhamos que haviamos determinado X, Y, Z e F de maneira que a expressão anterior é nulla quando W verifica a equação

$$\Delta' W = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = 0.$$

Então, se em (4) substituirmos x, y, z em funcção de X, Y, Z, essa expressão deve tomar identicamente a fórma

$$(5)\qquad \lambda\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right];$$

aliás as funcções W que correspondem a um integral qualquer V da equação $\Delta V = 0$, verificariam uma equação differencial distincta de $\Delta' W = 0$. D'onde resultaria que, a um integral *qualquer* d'esta ultima equação não corresponderia um integral V da equação $\Delta V = 0$.

É claro que a expressão (4) deve ter a fórma (5) ainda que se não substituam as variaveis x, y, z que nada influem no parenthesis.

As funcções desconhecidas devem pois satisfazer ás relações:

$$(6)\qquad h_1^2 = h_2^2 = h_3^2, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = 0;$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial W^2}=0 \qquad \text{ou} \qquad F=g+hW$$

com as condições

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial X}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{g}{2}\Delta X=0, \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{g}{2}\Delta Y=0, \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial Z}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial z}+\dfrac{g}{2}\Delta Z=0, \\[2ex] \Delta g=0, \quad \Delta h=0 \quad \text{por ser} \quad \Delta F=0. \end{cases}$$

Póde suppôr-se g identicamente nullo; porque, se $g+hW$ responde á questão, é evidente que o mesmo succede a $F=hW$. O que vamos dizer dá-nos o valor de h e bem assim o de X, Y, Z.

É facil de ver que as equações (6) exprimem as condições para que a transformação (2) defina uma *representação conforme,* isto é, que conserva os angulos, dos dois espaços um no outro. Basta, com effeito, notarmos que a condição para a conservação dos angulos é

$$dx^2+dy^2+dz^2=\gamma\,(dX^2+dY^2+dZ^2) \text{ (1)},$$

e que, em geral, se tem (JORDAN, log. cit., t. I, p. 133).

$$dx^2+dy^2+dz^2=h_1^2\,dX^2+h_2^2\,dY^2+h_3^2\,dZ$$
$$+\,2k_1\,dY\,dZ+2k_2\,dZ\,dX+2k_3\,dX\,dY.$$

(1) Póde estabelecer-se seguindo a marcha de PICARD (log. cit., t. I, p. 421) na questão relativa ás superficies applicaveis.

Ora Liouville [1] demonstrou que a *inversão* (transformação por meio de raios vectores reciprocos seguida d'uma mudança de eixos rectangulares) é a transformação mais geral que, no espaço, conserva os angulos. Por outra fórma que as funcções X, Y, Z que satisfazem ás equações (6) definem uma inversão.

Sendo assim, a descoberta de Thomson dá-nos a solução completa do problema. Tomando a origem para polo da inversão e chamando k uma constante, temos

$$X=\frac{k^2x}{r^2}, \quad Y=\frac{k^2y}{r^2}, \quad Z=\frac{k^2z}{r^2}, \quad r^2=x^2+y^2+z^2$$

e

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r}\,W\left(\frac{k^2x}{r^2},\frac{k^2y}{r^2},\frac{k^3z}{r^2}\right).$$

Fica assim resolvida a questão.

Concluindo: vê-se que a solução do problema de Dirichlet para o espaço limitado por uma superficie S fornece a solução para o espaço limitado por uma superficie S′ transformada da primeira por meio de raios vectores reciprocos.

29. O methodo de Thomson, pelo illustre physico denominado *methodo das imagens,* augmenta notavelmente o numero de casos em que se sabe resolver o problema de Dirichlet. Mas apezar d'isso o seu alcance é limitado. Applica-se apenas a classes particulares de superficies.

Ha porém outros methodos, os mais importantes dos quaes trataremos nos capitulo seguintes, caracterisados por uma grande generalidade; applicam-se a superficies, não pertencentes a certas classes, mas sujeitas apenas a certas restricções.

[1] Veja-se: Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie,* nota VI, p. 609.

O problema foi tratado rigorosamente, pela primeira vez, pelo geometra allemão C. Neumann no caso das superficies convexas.

Em seguida as profundas investigações de Schwarz deram-lhe um grande avanço no caso de duas variaveis. De taes trabalhos, porém, apenas os chamados processos alternados, que Neumann descobriu quàsi ao mesmo tempo, se podem estender ao caso de tres variaveis.

Estes methodos são conhecidos ha já bastante tempo. Levam a representar a funcção procurada por uma serie de integraes estendidos á superficie considerada. Só o primeiro d'estes integraes depende directamente dos valores dados á superficie; cada um dos outros exige, para ser obtido, que se conheça o que o precede.

Recentemente appareceram dois novos methodos.

A um d'elles, devido a Harnack e por esse geometra exposto para o caso de duas variaveis, já nos referimos; baseia-se na consideração da funcção de Green.

Emfim, Poincaré deu um methodo extremamente original e d'uma extensa generalidade.

Qual o valor d'estes methodos?

São ao mesmo tempo methodos de demonstração destinados a estabelecer a possibilidade do problema e methodos de calculo destinados a resolvê-lo effectivamente.

«Como methodos de demonstração são bastante complicados, embora rigorosos. Como methodos de calculo pouco ou nada valem; levam a calculos inextricaveis, desde a segunda appromação. Entretanto não é inutil, sob o ponto de vista pratico, multiplicar os methodos; em cada caso particular, um analysta habil saberá escolher o melhor, ou combinal-os do melhor modo, de fórma a obter resultados convenientes, a obter, por exemplo, no problema do equilibrio electrico, as deseguualdades mais proximas relativas á capacidade dos conductores» (Poincaré.)

VI. METHODO DE CARL NEUMANN.

30. Vamos expôr, o mais resumidamente possivel, o methodo de Carl Neumann para a solução do problema de Dirichlet, methodo tambem chamado da *média arithmetica.*

Collocar-nos-hemos exactamente nas mesmas circumstancias em que se collocou o eminente geometra.

Supporemos que a superficie dada é simplesmente connexa, fechada e além d'isso *convexa.* Admittiremos que, salvo em certos pontos isolados ou ao longo de certas linhas isoladas, a superficie tem um plano tangente variando d'uma maneira continua d'um ponto a outro. Admittiremos mais que os pontos isolados são pontos conicos ordinarios, isto é, que existem, em cada um d'elles, tres ou mais planos tangentes formando cone; e que nas linhas isoladas existe um diedro tangente. Supporemos finalmente que a superficie não é, segundo a expressão do auctor, *bi estrellada,* isto é, que todos os planos tangentes não vão passar por dois pontos fixos, como succede, por ex., no octaedro.

Designemos por σ essa superficie.

O methodo repousa sobre a consideração do *integral de Neumann*

$$V(a, b, c) = \iint_\sigma \frac{\mu \cos \phi}{r^2} d\sigma,$$

onde μ é uma funcção continua definida sobre a superficie, r a distancia d'um ponto fixo $p(a, b, c)$ do espaço a um ponto $q(x, y, z)$ do elemento $d\sigma$ e ϕ o angulo da normal interior á superficie no ponto q com a semi-recta $\overline{pq}$.

Mas examinemos primeiro o *integral de Gauss*

$$I = \iint_\sigma \frac{\cos\phi}{r^2} d\sigma.$$

31. É facil de vêr que a expressão $\frac{\cos\phi}{r^2} d\sigma$ representa, em valor absoluto, o angulo sob o qual se vê do ponto p o elemento $d\sigma$.

D'onde se deduz logo que o integral de Gauss tem por valor zero ou 4ϖ conforme o ponto p é interior ou exterior á superficie. Quando p está sobre a superficie, o integral é egual a 2ϖ se p é um ponto ordinario; se, porém, é um ponto conico, ou está situado numa aresta, é α o seu valor, sendo α a abertura espherica do cone ou o dobro do rectilineo do diedro.

O integral de Gauss, considerado como funcção das coordenadas a, b, c do ponto p, experimenta uma discontinuidade quando p atravessa a superficie.

Eis agora uma desegualdade que nos será muito util.

Dividamos a area σ em duas areas parciaes σ_1 e σ_2, connexas ou não, e representemos por I_s^g o integral $\iint_g \frac{\cos\phi}{r^2} d\sigma$ relativo ao ponto s e estendido a uma porção g da superficie σ. Vamos mostrar que, *designando λ um numero fixo, se tem*

$$(1) \qquad 0 < \lambda < \frac{1}{4\varpi}\left(I_{s_1}^{\sigma_1} + I_{s_2}^{\sigma_2}\right) \leq 1$$

quaesquer que sejam, sobre a superficie, os pontos s_1 e s_2, distinctos ou coincidentes.

Em primeiro logar, é evidente que, sejam ordinarios ou singulares os pontos s_1 e s_2, se tem

$$I_{s_1}^{\sigma_1} \leqq 2\varpi, \qquad I_{s_2}^{\sigma_2} \leqq 2\varpi, \qquad I_{s_1}^{\sigma_1} + I_{s_2}^{\sigma_2} \leqq 4\varpi,$$

visto que é assim para $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ e visto que $\cos\phi$ nunca é negativo.

Em segundo logar, para estabelecer o outro ponto, supponhamos por um momento que s_1 e s_2 occupam posições determinadas sobre a superficie.

Póde acontecer que os pontos s_1 e s_2 sejam vertices de porções de superficies conicas; seja σ' a superficie parcial deduzida de σ tirando-lhe estas porções de superficies conicas. A area σ' não póde reduzir-se a zero: seria necessario para isso, se s_1 e s_2 coincidem, que a superficie fosse *uni-estrellada* e portanto *aberta,* e, se não coincidem, que fosse *bi-estrellada,* o que é contra a hypothese.

No caso indicado, em σ', e fóra d'este caso, em σ, só póde haver pontos e linhas isoladas onde seja $\cos\phi = 0$.

Chamemos: σ'' a area, differente de zero, que fica de σ' depois de lhe tirarmos as porções infinitesimaes que contêem pontos onde é $\cos\phi = 0$; m o menor valor de $\cos\phi$ sobre σ''; D o maximo de r, e σ_1', σ_2' as porções de σ_1, σ_2 contidas em σ''.

Teremos, como é facil de vêr, quaesquer que sejam σ_1 e σ_2 $(\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma)$,

$$I_{s_1}^{\sigma_1} \geqq \frac{m\sigma_1'}{D^2}, \qquad I_{s_2}^{\sigma_2} \geqq \frac{m\sigma_2'}{D^2}, \qquad I_{s_1}^{\sigma_1} + I_{s_2}^{\sigma_2} \leqq \frac{m\sigma''}{D^2}.$$

As quantidades m e σ'' dependem das posições de s_1 e s_2; mas, pelo que se disse, é claro que, sejam quaes forem essas posições, tanto m como σ'' não descem abaixo de certos limites, o que demonstra a desegualdade proposta.

32. Voltemos ao estudo das propriedades do integral

$$V(a, b, c) = \iint_\sigma \frac{\mu \cos \phi}{r^2} d\sigma.$$

I. *A funcção* $V(a, b, c)$ *é harmonica em qualquer espaço interior ou exterior á superficie* σ, como facilmente se verifica.

II. Na passagem pela superficie a funcção V experimenta uma discontinuidade. Para a estudar num ponto s d'essa superficie, onde μ toma o valor μ_s, consideremos, por um momento, a funcção

$$W p = \iint_\sigma \frac{(\mu - \mu_s) \cos \phi}{r^2} d\sigma, \quad [p = (a, b, c)].$$

Vamos provar que W é contínua na visinhança do ponto s, isto é, que, para todos os pontos s' interiores a uma esphera de centro s e de raio sufficientemente pequeno, se tem

$$|W_s - W_{s'}| < \epsilon,$$

sendo ϵ uma quantidade dada, arbitrariamente pequena.

Com effeito, escrevamos

$$W_s - W_{s'} = \iint \frac{(\mu - \mu_s) \cos \phi}{r^2} d\sigma - \iint \frac{(\mu - \mu_s) \cos \phi'}{r'^2} d\sigma$$

$$= \iint (\mu - \mu_s) \left(\frac{\cos \phi}{r^2} - \frac{\cos \phi'}{r'^2} \right) d\sigma.$$

De s como centro, tracemos um pequena esphera (Σ) e designemos por σ_1 a porção de σ que lhe é interior e por σ_2 a exterior; o ultimo integral póde decompôr-se em duas partes, correspondendo respectivamente a σ_1 e σ_2:

$$W_s - W_{s'} = \omega_{\sigma_1} + \omega_{\sigma_2},$$

$$\omega_{\sigma_1} = \iint (\mu_{\sigma_1} - \mu_s)\left(\frac{\cos\phi}{r^2} - \frac{\cos\phi'}{r'^2}\right) d\sigma_1,$$

$$\omega_{\sigma_2} = \iint (\mu_{\sigma_2} - \mu_s)\left(\frac{\cos\phi}{r^2} - \frac{\cos\phi'}{r'^2}\right) d\sigma_2.$$

sendo μ_{σ_1} e μ_{σ_2} variaveis em $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$.

Como a funcção μ é contínua, a quantidade $|\mu_{\sigma_1} - \mu_s|$ tende para zero com o raio ρ da esphera (Σ). Portanto, para um valor de ρ sufficientemente pequeno, tem-se

$$\omega_{\sigma_1} < \frac{\epsilon}{2}$$

qualquer que seja a posição do ponto s' no espaço.

Por outro lado

$$|\omega_{\sigma_2}| < G \iint \left|\frac{\cos\phi}{r^2} - \frac{\cos\phi'}{r'^2}\right| d\sigma_2$$

sendo G o maximo de $|\mu_{\sigma_2} - \mu_s|$. O integral tende para zero com $s - s'$. Logo, para qualquer ponto s' interior a uma esphera de centro s e de raio $\rho' < \rho$, ter-se-ha

$$|\omega_{\sigma_2}| < \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto

$$|W_s - W_{s'}| < \epsilon. \qquad \text{C. q. d.}$$

Isto posto, sejam: V_s o valor de V no ponto *s*; V_{is} o valor limite para que tende V quando o ponto *i*, interior, tende para *s*; V_{es} o valor para que tende V quando o ponto *e*, exterior, tende para *s*.

Sendo a funcção W contínua, temos que o limite dos valores de W, quando *i* e *e* tendem para *s*, é egual ao seu valor no ponto *s*. Logo

$$V_{is} - 4\varpi\mu_s = V_s - 2\varpi\mu_s = V_{es}.$$

Em resumo:

1.º *Se s é um ponto ordinario da superficie, temos as fórmulas*

$$(2) \qquad V_{is} = V_s + 2\varpi\mu_s, \qquad V_{es} = V_s - 2\varpi\mu_s.$$

Analogamente se via que

2.º *Se s é um ponto conico de abertura* α, *ou está na aresta d'um diedro de abertura* $\frac{\alpha}{2}$, se tem

$$(3) \qquad V_{is} = V_s + (4\varpi - \alpha)\mu_s, \qquad V_{es} = V_s - \alpha\mu_s.$$

III. Vamos, por ultimo, estabelecer uma proposição fundamental que está relacionada com o integral de Neumann.

Ponhamos

$$V_s = \frac{1}{2\varpi}\int\int \frac{\mu\cos\phi}{r^2}\,d\sigma,$$

$$\psi_s = 2\varpi - \int\int \frac{\cos\phi}{r^2}\,d\sigma,$$

e consideremos a funcção

$$W_s = V_s + \frac{\psi_s\mu_s}{2\varpi}.$$

Designando por M e m o maximo e o minimo de μ, provaremos que, *quaesquer que sejam os pontos s_1 e s_2 da superficie, se tem*

$$(4) \qquad W_{s_1} - W_{s_2} \leqq (M - m)\rho$$

sendo ρ um numero positivo menor que a unidade.

Dividamos a superficie em duas regiões σ_1 e σ_2 (que podem ser compostas de partes separadas) taes que o valor de μ fique comprehendido na primeira entre M e a *média arithmetica* $\frac{M+m}{2}$, e na segunda entre $\frac{M+m}{2}$ e m. Uma região onde μ seja egual $\frac{M+m}{2}$ inclue-se arbitrariamente em σ_1 ou σ_2.

Da definição de W_s deduz-se facilmente, introduzindo o symbolo I do numero anterior,

$$2\varpi W_s \leqq M\psi_s + M I_s^{\sigma_1} + \frac{M+m}{2} I_s^{\sigma_2},$$

$$2\varpi W_s \geqq m\psi_s + \frac{M+m}{2} I_s^{\sigma_1} + m I_s^{\sigma_2},$$

ou, attendendo á relação $I_s^{\sigma_1} + I_s^{\sigma_2} = 2\varpi - \psi_s$,

$$W_s \leqq M - \frac{M-m}{4\varpi} I_s^{\sigma_2},$$

$$W_s \geqq m + \frac{M-m}{4\varpi} I_s^{\sigma_1}.$$

Applicando estas fórmulas aos pontos s_1 e s_2, resulta

$$W_{s_1} \leqq M - \frac{M-m}{4\varpi} I_{s_1}^{\sigma_2},$$

$$W_{s_2} \geqq m + \frac{M-m}{4\varpi} I_{s_2}^{\sigma_1},$$

d'onde tiramos

$$W_{s_1} - W_{s_2} \leqq (M-m)\left(1 - \frac{I_{s_1}^{\sigma_2} + I_{s_2}^{\sigma_1}}{4\varpi}\right).$$

Segundo a desegualdade (1) tem-se, *à fortiori,*

$$W_{s_1} - W_{s_2} \leqq (M-m)(1-\lambda)$$

ou, pondo $1 - \lambda = \rho$,

$$W_{s_1} - W_{s_2} \leqq (M-m)\rho, \quad \rho < 1. \qquad \text{C. q. d.}$$

33. Seja U uma funcção continua definida sobre a superficie dada. Agora não é difficil *construir a funcção que é integral da equação de Laplace no interior da superficie e que toma sobre cada ponto da superficie o mesmo valor que* U.

Ponhamos successivamente

$$(5)\quad \begin{cases} V^{(1)} = \dfrac{1}{2\varpi}\displaystyle\iint \dfrac{U\cos\phi}{r^2}\,d\sigma, & U_s^{(1)} = V_s^{(1)} + \dfrac{\psi_s U_s}{2\varpi}, \\ V^{(2)} = \dfrac{1}{2\varpi}\displaystyle\iint \dfrac{U^{(1)}\cos\phi}{r^2}\,d\sigma, & U_s^{(2)} = V_s^{(2)} + \dfrac{\psi_s U_s^{(1)}}{2\varpi}, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ V^{(n)} = \dfrac{1}{2\varpi}\displaystyle\iint \dfrac{U^{(n-1)}\cos\phi}{r^2}\,d\sigma, & U_s^{(n)} = V_s^{(n)} + \dfrac{\psi_s U_s^{(n-1)}}{2\varpi}, \\ \dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

Devemos notar que, segundo o n.º 32, os valores $U^{(n)}$ formam sobre σ um conjuncto continuo.

Isto posto, vamos demonstrar:

1.º *As funcções* U, $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}, \ldots$ *teem por limite, para* $n = \infty$, *uma constante* C.

2.º *A serie*

$$(6) \qquad V = C + V^{(1)} - V^{(2)} + \ldots + (-1)^{n-1} V^{(n)} + \ldots$$

define uma funcção harmonica no interior da superficie dada que toma sobre esta superficie os mesmos valores que U.

Com effeito, chamemos M, $M^{(1)}, \ldots M^{(n)} \ldots$ e m, $m^{(1)} \ldots m^{(n)}, \ldots$ respectivamente os maximos e os minimos das funcções U, $U^{(1)}, \ldots U^{(n)}, \ldots$ sobre a superficie.

Teremos, segundo (4), quaesquer que sejam s e s',

$$U_s^{(1)} - U_{s'}^{(1)} \leqq (M - m)\rho$$

e portanto

$$M^{(1)} - m^{(1)} \leqq (M - m)\rho.$$

D'onde é facil concluir

$$(7) \qquad M^{(n)} - m^{(n)} \leqq (M - m)\rho^n.$$

Como ρ é menor que a unidade, vemos que a differença $M^{(n)} - m^{(n)}$ se póde tornar menor que qualquer grandeza. Por conseguinte, á medida que n augmenta, a quantidade $U_s^{(n)}$, qualquer que seja s sobre a superficie, tende para um limite constante C.

Podemos estabelecer o outro ponto lançando mão do segundo theorema d'Harnack.

Cada termo da serie (6) tende para um certo limite quando um ponto interior i a que refiramos o seu valor tenda para um ponto s da superficie.

Segundo as fórmulas (2) e (3), temos, com effeito,

$$V_{is}^{(n)} = V_i^{(n)} + \frac{2\varpi + \psi_s}{2\varpi} U_s^{(n-1)},$$

ou

$$V_{is}^{(n)} = U_s^{(n-1)} + U_s^{(n)},$$

visto que é, por definição,

$$U_s^{(n)} = V_s^{(n)} + \frac{\psi_s U_s^{(n-1)}}{2\varpi}.$$

Por conseguinte a serie (6), sobre σ, torna-se nest'outra

$$C + U + U^{(1)} - U^{(1)} - U^2 + \ldots + (-1)^n (U^{(n-1)} + U^{(n)}) + \cdots$$

ou

$$(8) \quad C + (U - U^{(1)}) + (U^{(1)} - U^{(2)}) + \ldots + (U^{(n-1)} - U^{(n)}) + \cdots$$

Segundo o alludido theorema d'Harnack, resta provar, para completar a nossa demonstração, que esta serie é uniformemente convergente sobre a superficie e representa a funcção dada U.

Isso é facil. A convergencia uniforme é attestada pela relação

$$| U^{(n-1)} - U^n | < 2(M - m)\rho^n, \qquad \rho < 1,$$

que se deduz de (7).

Além d'isso, como a somma dos seus n primeiros termos é

$$C + U - U^{(n+1)},$$

a somma da serie será

$$C + U - C = U,$$

isto é, a funcção dada.

O que dissémos é o bastante para saber o caminho a seguir na resolução do problema de Dirichlet em cada caso particular.

34. O methodo de Neumann fornece tambem a solução do problema de Dirichlet para o espaço *exterior* ás superficies convexas consideradas.

A marcha é identica á que vimos d'empregar. Sómente as condições de regularidade no infinito exigem uma leve modificação.

Seja T a funcção continua dada sobre a superficie σ. Colloquemos em qualquer ponto O, interior á superficie, uma massa K. E seja Q_M o potencial d'esta massa num ponto M do espaço. Chamando s um ponto arbitrario de σ, ponhamos

$$U = T + Q_s$$

e formemos as funcções resolventes como o indica o quadro (5). É facil de ver que as funcções $U, U^{(1)}, \ldots U^{(n)}, \ldots$ são lineares com relação a K e portanto, segundo o numero anterior, que terão, para $n = \infty$, um limite da fórma $L + PK$, sendo L e P duas constantes.

Consideremos agora a serie

$$(9) \qquad -(V^{(1)} + V^{(2)} + \ldots + V^{(n)} + \ldots).$$

Cada um dos seus termos, além de ser uma funcção harmonica no exterior da superficie σ, regular no infinito, tende para o termo correspondente da serie

$$(U - U^{(1)}) + (U^{(1)} - U^{(2)}) + \ldots + (U^{(n-1)} - U^{(n)}) + \ldots$$

quando o ponto exterior e tende para o ponto s da superficie. Com effeito, segundo as fórmulas (2) e (3), temos

$$V_{es}^{(n)} = V_s^{(n)} - \frac{(2\varpi - \psi_s)\, U_s^{(n-1)}}{2\varpi}$$

e por isso

$$-V_{es}^{(n)} = U_s^{(n-1)} - U_s^{(n)}.$$

Ora é facil de ver que o segundo theorema d'Harnack se applica tambem ao espaço exterior a uma superficie. E sendo assim, a marcha do ultimo numero demonstra que a serie (9) representa uma funcção harmonica no exterior de σ, regular no infinito e tomando sobre σ o valor

$$U - C = T + Q_s - L - PK.$$

Por conseguinte, se nas funcções $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, ... substituirmos K pelo valor $-\frac{L}{P}$ determinado pela relação

$$L + PK = 0,$$

a serie (9) tomará sobre σ o valor $T + Q_s$. E além d'isso, chamando R a distancia do ponto M ao ponto O, teremos

$$Q_M = -\frac{L}{P}\frac{1}{R}.$$

De tudo o que dissémos conclue-se que a serie

$$V = \frac{L}{P}\frac{1}{R} - [V^{(1)} + \dots + V^{(n)} + \dots]$$

resolve a questão.

35. C. Neumann fez conhecer os principios d'este methodo em 1870 e só mais tarde o expoz sob fórma didactica ([1]).

([1]) Carl Neumann, *Untersuchungen über des logarithmische und Newton'sche Potential.* Leipzig, 1877.

As singularidades que suppozémos na superficie tornam a exposição complicada e escondem algum tanto o espirito do methodo que, no fundo, é simples e elegante.

Como methodo de calculo é ainda hoje, em geral, o preferido. As approximações são rapidas.

Tem a recommendal-o o seu caracter puramente analytico e do qual resulta a fecundidade que o distingue.

Riquier [1] mostrou que elle se prestava a resolver o problema de Dirichlet relativo á equação de Laplace a mais de tres variaveis.

E ultimamente Poincaré [2], a quem o problema de Dirichlet tem merecido especiaes cuidados pelo emprego que d'elle tem feito nos seus trabalhos de Physica Mathematica de que é eminente professor na Faculdade de Sciencias de Pariz, mostrou que o methodo de Neumann tem ainda logar para as superficies não convexas.

Este resultado notavel e bem assim o de Riquier baseiam-se no estudo do integral de Neumann.

---

[1] Riquier, *Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann*, 1886.

[2] Poincaré, *Comptes rendus* de 18 de fevereiro de 1895, p. 347.

As singularidades que suppozémos na superficie tornam a exposição complicada e escondem algum tanto o espirito do methodo que, no fundo, é simples e elegante.

O methodo de calculo é ainda hoje, em geral, o preferido. As approximações são rapidas.

Tem o inconveniente de não ter caracter puramente analytico e do qual resulta a necessidade desta distincção.

Riquier (¹) mostrou que elle se prestava a resolver o problema de Dirichlet relativo á equação de Laplace a mais de tres variaveis.

E ultimamente Poincaré (²), a quem o problema de Dirichlet tem merecido especiaes cuidados pelo emprego que d'elle tem feito nos seus trabalhos de Physica Mathematica, depois d'eminente professor da Faculdade de Sciencias de Paris, mostrou que o methodo de Neumann tem ainda logar para as superficies não convexas.

Este resultado notavel é bem assim o de Riquier. Baseiam-se no estudo do integral de Neumann.

(¹) Riquier, Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann, 1886.

(²) Poincaré, Comptes rendus de 18 de fevereiro de 1895, p. 347.

VII. METHODO DE POINCARÉ.

36. Poincaré, um dos maiores geometras da nossa epoca, na primeira das duas grandes e notabilissimas Memorias que até hoje publicou *sobre as equações ás derivadas parciaes da Physica Mathematica* (1), fez conhecer um methodo novo, extremamente original e extremamente geral, para resolver o problema de Dirichlet.

O auctor expoz o seu methodo para o espaço exterior a uma superficie, determinando o equilibrio electrico á superficie d'um conductor isolado. A applicação do methodo de Thomson dá então, immediatamente, a funcção de Green relativa á superficie inversa, e falta, para acabar a solução, discutir um integral duplo. (Cf. n.º 20).

Mas Poincaré mostra ainda, embora mais summariamente, que o mesmo methodo se presta á solução directa sem passar pelo intermediario da funcção de Green.

D'harmonia com a orientação que demos ao nosso trabalho, seguiremos a via directa, expondo o methodo para o espaço interior a uma superficie.

---

(1) *American Journal of Mathematics*, t. XII, 1890, pp. 211 a 294.—*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. VIII, 1894, pp. 57 a 155.

37. O methodo de Poincaré baseia-se na theoria do potencial newtoniano, cujas propriedades fundamentaes são bem conhecidas. Por isso demonstraremos apenas o theorema seguinte, que na exposição do methodo desempenha um papel de capital importancia.

Collocando uma massa egual á unidade em um ponto P interior a uma esphera, e repartindo esta massa por toda a superficie de maneira que a densidade em um ponto qualquer M seja inversamente proporcional ao cubo de MP, *a camada espherica assim obtida terá o mesmo potencial que a massa primitiva em todo o ponto exterior, e um potencial menor em todo o ponto interior.* A essa camada dá-se o nome de *camada equivalente.*

Mostraremos tambem que, *nos pontos da superficie, a camada equivalente terá o mesmo potencial que a massa primitiva.* Esta nota permittir-nos-ha, como veremos, reduzir o principio de Dirichlet a uma hypothese muito simples.

Seja A um ponto exterior á esphera. Considerando, por um momento, A como fixo e P como variavel, a quantidade $\frac{1}{\mathrm{AP}}$ é uma funcção das coordenadas de P, harmonica em toda a esphera. Como em um ponto M da superficie ella toma o valor $\frac{1}{\mathrm{AM}}$, teremos, segundo a fórmula de Green relativa á esphera (n.º 6),

$$(1) \qquad \frac{1}{\mathrm{AP}} = \iint \frac{\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2}{4\varpi \mathrm{R}\,.\,\overline{\mathrm{MP}}^3}\, d\sigma.$$

Por outro lado, segundo a mesma fórmula, será (Cf. n.º 21)

$$(2) \qquad 1 = \iint \frac{\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2}{4\varpi \mathrm{R}\,.\,\overline{\mathrm{MP}}^3}\, d\sigma.$$

Das fórmulas (1) e (2) resulta o theorema.

Com effeito, a fórmula (2) prova que, se se tem sobre a superficie espherica uma camada attractiva cuja densidade, em cada ponto M, é a quantidade

$$\rho = \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{4\varpi R \, . \, \overline{MP}^3},$$

a massa total da camada será egual á unidade. E sendo assim, a fórmula (1) mostra que o potencial d'esta camada num ponto exterior A, é o mesmo que se toda a massa estivesse concentrada em P.

Além d'isso, como o potencial é uma funcção continua em todo o espaço, a fórmula (1) ainda tem logar quando A pertence á superficie espherica. E por conseguinte o potencial da camada em um ponto da superficie é o mesmo que se a massa estivesse reunida em P.

Procuremos emfim o que se torna o potencial da camada quando A é interior á esphera. O potencial é sempre dado pelo mesmo integral [segundo membro da fórmula (2)], mas a egualdade (1) deixa neste caso de ter logar. Ora a differença

$$\frac{1}{AP} - \iint \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{4\varpi R \, . \, \overline{MP}^3} \frac{1}{AM}$$

é uma funcção harmonica das coordenadas do ponto A, contínua em qualquer espaço interior que não contenha o ponto P. Como neste ponto se reduz a $+\infty$, e é nulla á superficie da esphera, temos (n.º 5, II), em todo o ponto interior A,

$$\iint \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{4\varpi R \, . \, \overline{MP}^3} \frac{1}{AM} < \frac{1}{AP}.$$

Está pois demonstrado o que desejavamos.

O theorema subsiste evidentemente se a massa primitiva, em logar de ser egual á unidade, fôr egual a m, e ainda se, em logar d'um ponto, tivermos varios ou mesmo uma camada.

38. Agora consideremos um espaço qualquer E limitado por uma superficie simples ou multipla S. E supponhamos que, em cada ponto da superficie, ha um plano tangente determinado. Esta restricção não é absolutamente indispensavel; ver-se-ha depois como podemos desembaraçar-nos d'ella.

Primeiro que tudo é facil ver que se póde encontrar uma succssão indefinida de espheras gosando das seguintes propriedades:

1) Estas espheras podem ordenar-se segundo uma serie linear $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$ correspondente á serie natural dos numeros;

2) Cada uma d'ellas é completamente interior á superficie S;

3) Todo o ponto interior a S é interior pelo menos a uma das espheras.

Consideremos com effeito, em E, uma região R, cujos pontos estejam todos a uma distancia de S superior á quantidade δ. Seja δ' um comprimento menor que δ; tracemos uma serie de planos parallelos aos coordenados, tendo entre si a distancia $\frac{\delta'}{2\sqrt{3}}$. Formamos assim um grupo de cubos cuja diagonal é δ'. D'estes cubos conservaremos apenas aquelles que forem total ou parcialmente interiores a R. Sejam n o numero, e $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ os centros d'estes cubos: de cada um d'estes pontos como centro, com um raio comprehendido entre $\frac{\delta}{2}$ e $\frac{\delta'}{2}$, descrevamos uma esphera. Como cada cubo é então interior á esphera respectiva, a qual é sempre interior a S, segue-se que cada ponto de R é interior a uma d'estas n espheras.

Sendo assim, imaginemos uma serie de comprimentos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ decrescendo e tendendo para zero. Chamemos R_0 a região formada pelo conjuncto dos pontos de E cuja distancia a S é superior a δ_1 e depois, em geral, R_i o conjuncto dos pontos de E cuja distancia a S é comprehendida entre δ_i e δ_{i+1}. Estas diversas regiões não são necessariamente connexas, o que não importa. Construamos em R_0 as espheras

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots \quad S_{n_0},$$

como acima em R; depois em R_1, as espheras

$$S_{n_0+1}, \quad S_{n_0+2}, \quad \ldots, \quad S_n,$$

e assim por deante. O conjuncto d'estas espheras fórma uma successão

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots$$

que satisfaz ás condições requeridas.

A maneira de traçar as espheras S_i e de as ordenar em serie linear é inteiramente arbitraria. Só para fixar ideias se indicou uma.

39. Isto posto, lembremos que, por hypothese, se dá sobre a superficie S uma successão continua U de valores, e que se tracta de estabelecer que existe uma funcção V, harmonica no espaço E, e reduzindo-se a U sobre S.

Tracemos uma esphera Σ que contenha o espaço E no seu interior, e admittamos que é possivel encontrar uma funcção $V_0(x, y, z)_{_3}$ continua, bem como as suas derivadas parciaes das tres primeiras ordens, no espaço $\mathfrak{E}$ que Σ limita, e reduzindo-se a U sobre S.

É partindo da funcção V_0, em certo modo como primeira approximação, que vamos chegar á solução do problema de Dirichlet.

Veremos em seguida como se reduz a este caso o caso geral.

,,

Supponhamos primeiro que ΔV_0 é constantemente negativo em $\mathfrak{S}$. Pondo

$$-\frac{\Delta V_0}{4\varpi}=\rho,$$

ρ será, em $\mathfrak{S}$, uma funcção positiva e admittindo derivadas parciaes de 1.ª ordem. Imaginemos, espalhada em $\mathfrak{S}$, uma massa tal cuja densidade em cada ponto seja ρ. Esta massa dá origem a um potencial W_0 gosando das propriedades conhecidas. (Notemos que, para ser assim, é essencial [1] que ρ admitta derivadas de 1.ª ordem, e por isso que V_0 as admitta de 3.ª)

Segundo a fórmula de Poisson conhecida da theoria do potencial, ter-se-ha pois, em toda a região $\mathfrak{S}$,

$$\Delta W_0=-4\varpi\rho=\Delta W_0$$

d'onde

$$\Delta(W_0-V_0)=0.$$

Logo, pondo $W_0-V_0=\Theta$, a funcção Θ será harmonica. Além d'isso é perfeitamente determinada, por isso que conhecemos W_0 e V_0 para todos os pontos de $\mathfrak{S}$; em particular conhecemos os valores $\Theta(S)$ que ella toma sobre a superficie S, a saber

$$\Theta(S)=W_0(S)-U.$$

Uma parte das massas que dão origem ao potencial W_0 é interior a S. Sobre estas faremos uma serie de operações que vamos definir. Consideremos as que são interiores á esphera S_i, e distribuamo-las á superficie d'esta esphera numa camada equi-

---

(1) Veja-se a este respeito, por exemplo, Appell, *Leçons sur l'attraction*, p. 51, 1892.

valente segundo a definição do n.º 37. Chamaremos a esta operação, com Poincaré, «varrer (*balayer*) a esphera S_i».

Esta operação não altera o potencial em ponto algum nem do exterior, nem da superficie da esphera em que se effectua; mas diminue-o em todo o ponto do interior.

Varramos então successivamente todas as espheras, de fórma tal que cada uma fique varrida uma infinidade de vezes. Basta varrel-as na ordem seguinte

$$1,2, \quad 1,2,3, \quad 1,2,3,4, \quad \ldots,$$

pondo, todavia, de lado, aquellas que não contenham nenhuma massa quando lhes toque a vez de serem novamente varridas. Assim, por exemplo, se depois da 7.ª operação, a esphera S_3 não contiver nenhuma massa, tomar-se-ha no seu logar a esphera S_4.

Chamemos W_k o que se torna o potencial depois de k operações d'esta natureza, e comparemos entre si, no mesmo ponto A de $\in$, os valores de W_k correspondentes aos diversos valores de k.

Se A é exterior ou está sobre a superficie da ultima esphera varrida, ter-se-ha

$$W_k = W_{k-1}$$

e portanto

$$W_k = W_0.$$

Se é interior

$$W_k < W_{k-1}.$$

Portanto, em todos os casos,

$$W_k \leqq W_{k-1}.$$

Esta desegualdade mostra que, quando k cresce, W_k decresce, ou pelo menos não cresce, isto para nenhum ponto de $\mathfrak{E}$. Por outro lado, como as operações que fizemos nem alteram a somma total das massas, nem introduzem massas negativas, será

$$W_k < 0.$$

Conclue-se d'aqui que W_k tende para um limite finito e determinado, W, em cada ponto A de $\mathfrak{E}$, resultado de que já vamos tirar consequencias importantes.

40. Esse limite W toma sobre S, como vem de ser demonstrado, o mesmo valor que W_0, isto é,

$$W_0(S) = U + \Theta(S). \tag{3}$$

Além d'isso demonstrar-se-ha adiante que a funcção W é harmonica no espaço que S limita.

Dando, por agora, este ponto como estabelecido, e recordando a propriedade da funcção Θ já definida, concluimos, attendendo á egualdade (3), que a funcção

$$W - \Theta$$

é harmonica em E e toma o valor dado U sobre a superficie S.

Parece, sem maior exame, que este raciocinio demonstra o principio de Dirichlet para qualquer superficie.

Não é porém exacto. Seja A_0 um ponto da superficie, A um ponto interior. Para estabelecer o principio de Dirichlet, seria preciso demonstrar que

$$\lim W(A) = U(A_0)$$

quando A se approxima indefinidamente de A_0, e não que

$$W(A_0) = U(A_0).$$

Entretanto este resultado não deixa de ser interessante. Reduz o principio de Dirichlet á hypothese da continuidade d'uma funcção, definida como limite d'uma funcção continua.

41. Completemos a exposição começada em o n.º 34, estudando as propriedades da funcção W cuja existencia ahi ficou estabelecida.

Provaremos em primeiro logar que W tende para

$$U_{A_0} + \Theta_{A_0}$$

quando o ponto interior A tende para o ponto A_0 da superficie S.

Construamos uma esphera σ, tangente á superficie S em A_0 e de raio bastante pequeno para que, inteiramente exterior a S, fique no emtanto interior a $\in$. Esta construcção exige que o ponto A_0 seja um ponto ordinario da superficie.

Nós sabemos formar uma funcção T, harmonica no exterior de σ e tomando sobre σ os mesmos valores que W_0. Quando A tende para A_0, a funcção T tende para o valor de W_0 nesse ponto, isto é, para $U_{A_0} + \theta_{A_0}$.

Comparemos T e W_n fóra da esphera σ.

Á superficie de σ, tem-se

$$T = W_n = W_0.$$

No infinito

$$T = W_n = 0.$$

Por outro lado W_n e T são dois potenciaes: o primeiro, sendo devido a massas das quaes algumas são exteriores a σ, póde, fóra de σ, ter maximos, mas não minimos; o segundo, devido a massas interiores a σ, não admitte, fóra de σ, maximos nem minimos (1).

(1) Appell, log. cit., p. 65.

Logo a differença $W_n - T$ póde ter maximos, mas não minimos; e como é nulla á superficie de σ e no infinito, será sempre positiva. Tem-se pois

$$W_0 > W_n > T$$

e por conseguinte, no limite,

$$W_0 > W > T.$$

Quando A tende para A_0, W_0 e T, e portanto W, tendem para $U_{A_0} + \Theta_{A_0}$.

Vamos emfim estabelecer que W é harmonica.

Consideremos uma das espheras, S_α por exemplo, e supponhamos que ella é varrida nas operações $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Depois de cada uma d'estas operações, não haverá massa alguma no interior de S_α; de sorte que se terá

$$\Delta W_{\alpha_i} = 0, \qquad (\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots).$$

Quando α_n cresce indefinidamente, W_{α_n} tende para W, de maneira que a serie

$$W_\alpha + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_1}) + \ldots + (W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n-1}}) + \ldots$$

converge e tem por somma W. Ora vimos de ver que cada um dos seus termos é harmonico; além d'isso é negativo, salvo talvez o primeiro. Logo, em virtude do 1.º theorema d'Harnack, a funcção W será harmonica na esphera S_α e por conseguinte em todo o espaço interior a S.

Do que temos dito resulta que, formando a expressão

$$W - \Theta,$$

se obterá uma funcção harmonica em E, *tomando sobre* S *o valor* U.

42. Suppoz-se, na demonstração precedente, que $\triangle V_0$ conservava um signal constante. Se assim não succeder, dividir-se-ha $\mathfrak{S}$ em duas regiões, connexas ou não, a primeira contendo todos os pontos para as quaes $\frac{\triangle V_0}{-4\varpi}$ é positivo, a segunda todos aquelles para os quaes a mesma quantidade é negativa.

Sejam $W_0^{(1)}$ e $W_0^{(2)}$ os potenciaes correspondentes ás massas positivas, e ás negativas tomadas positivamente.

Notando que, por ser

$$\triangle(W_0^{(1)} - W_0^{(2)}) = -4\varpi\rho = \triangle V_0$$

ou

$$\triangle(W_0^{(1)} - W_0^{(2)} - V_0) = 0,$$

a funcção

$$\Theta = W_0^{(1)} - W_0^{(2)} - V_0$$

é harmonica; e notando mais que as funcções $W_0^{(1)}$ e $W_0^{(2)}$ geram respectivamente as funcções $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$, harmonicas em E e taes que tomam sobre a superficie os mesmos valores que $W_0^{(1)}$ $W_0^{(2)}$, concluimos que a funcção

$$W^{(1)} - W^{(2)} - \Theta$$

resolve o problema de Dirichlet para o caso em questão.

43. É tempo de resumir os resultados obtidos. Mas, como temos supposto que em cada ponto da superficie considerada ha um plano tangente determinado, convém examinar o caso de haver pontos singulares.

Notemos já este resultado notavel: *a existencia de pontos singulares não impede* W *de tender para* W_0 *quando o ponto interior* A *tende para um ponto não singular.*

Tambem não esqueçamos que a supposição de ser ordinario o ponto considerado da superficie teve em vista sómente a possibilidade de traçar a esphera σ, isto é, uma esphera tendo um ponto commum com a superficie, e sendo-lhe, de resto, completamente exterior. De sorte que, para todo o ponto singular pelo qual se possa fazer passar uma esphera satisfazendo ás condições de σ, a demonstração tem ainda logar. É o que succede, por exemplo, com os pontos conicos salientes a respeito do espaço para o qual se pretende resolver o problema.

Mas póde-se ir mais longe. Supponhamos o principio de Dirichlet demonstrado para uma certa superficie S'. Supponhamos em seguida que a superficie dada, S, apresenta um ponto singular A_0, e que se póde construir uma superficie S'', semelhante a S', passando por A_0 e sendo, de resto, inteiramente exterior a S. A demonstração póde então, evidentemente, estender-se ao ponto singular A_0. (Ver a fig. 4).

Applicando esta nota, que dá ao methodo uma elasticidade extraordinaria, e lançando mão de superficies para as quaes o problema já está resolvido, vê-se que *o numero e a natureza das singularidades da superficie póde prolongar-se successiva e indefinidamente.*

Assim: imaginemos que a superficie tinha um certo numero de pontos conicos ordinarios reintrantes, isto é, que alguns pontos eram vertices de porções de cone de revolução dirigidas para o interior do espaço em que se pretende resolver o problema. Para estender o methodo a estes pontos, construamos uma superficie S'' formada d'uma esphera e d'um cone de revolução circumscripto, tendo por vertice um dos pontos a que vimos de referir-nos, e tomemos o angulo do vertice d'este cone e o raio da esphera sufficientemente pequenos para que S'' seja por completo exterior a S. Ora, como o principio de Dirichlet está estabelecido para S'' (1), que é exterior a S, fica estabelecido para esta superficie.

---

(1) Poincaré (Mem. cit., p. 229) demonstra este ponto, seguindo a via indirecta que indicamos (n.º 36). Nós consideramo-lo demonstrado pelo

Podemos pois dizer, com Poincaré, *que o principio de Dirichlet está estabelecido para todo o espaço cuja fronteira admitta um plano tangente em cada ponto, excepto em um numero limitado de pontos conicos ordinarios.* Este é o caso mais frequente e interessante; mas a verdade é que o principio se póde considerar estabelecido em casos muito mais extensos.

Vê-se quanto é original o methodo de Poincaré: emquanto que nos outros methodos de approximações successivas, o de Neumann por exemplo, se parte d'uma funcção harmonica, no actual parte se de qualquer funcção que tome sobre a superficie terminal os valores dados.

O alcance do methodo avalia-se pelas seguintes palavras do seu illustre auctor:

«Teria sido interessante substituir os methodos actuaes de calculo por outros menos defeituosos. Não o pude fazer, limitei-me a procurar um methodo de demonstração mais simples que os que teem sido propostos até'qui e directamtnte applicavel a todos os casos».

44. A exposição que vimos de fazer, suppõe a possibilidade de construir uma funcção V_0, continua no espaço $\in$, bem como as suas derivadas parciaes das tres primeiras ordens, e tomando sobre a superficie terminal S a successão continua de valores dados U.

Se U admittisse, na fronteira do espaço considerado, as tres primeiras derivadas, então evidentemente era possivel, e isto de uma infinidade de maneiras, construir uma funcção V_0 satisfazendo ás condições requeridas.

Mas fazendo sobre U a unica hypothese da continuidade, é indispensavel completar o methodo.

Neste ponto, é Poincaré extremamente conciso.

---

methodo de Neumann: o que é legitimo porque a superficie em questão é convexa e não é bi-estrellada.

Paraf [1], para o caso analogo de duas variaveis, reduziu d'um modo simples o caso geral ao caso particular em que U admitte derivadas.

Vamos indicar a sua marcha, adquada porém ao caso das tres variaveis. Constroe, o que é sempre possivel, uma funcção $\psi(x, y, z)$, continua na região $\in$ e reduzindo-se a U sobre S. Em seguida mostra que se póde formar uma infinidade de polynomios

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_n, \quad \ldots,$$

crescentes e tendendo uniformemente para ψ em todo o espaço $\in$. Sejam

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

os valores d'estes polynomios sobre S; estes valores crescem e tendem uniformemente para U. Como se sabe resolver o problema de Dirichlet para cada um dos valores U_i dados sobre a superficie, tem-se meio d'obter uma succcessão de funcções, harmonicas em E,

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots$$

que, como o mostra Paraf, convergem para a funcção procurada V.

Seguindo esta via, seja $\psi(x, y, z)$ uma funcção, continua na região $\in$ e que, sobre S, se reduz a U. Suppomos a funcção ψ positiva; se o não fosse, raciocinariamos sobre a funcção $\psi + C$, sendo C uma constante conveniente.

Seja mais

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

---

(1) Veja-se a sua these: *Sur le problème de Dirichlet*, 1892, p. 24. (Foi publicada nos *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VI).

uma successão infinita de numeros positivos crescentes, tendendo para a unidade e taes que, pondo

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \delta_i,$$

a successão

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \ \delta_n, \ \ldots$$

seja decrescente: condições que serão realisadas, por exemplo, com $\lambda_i = 1 - 2^{-i}$.

E notemos que se póde sempre encontrar um polynomio que represente uma funcção contínua com um erro inferior a uma grandeza arbitraria dada, isto qualquer que seja o numero de variaveis da funcção (1).

D'onde se conclue que podemos construir uma successão de polynomios

$$F_1, \ F_2, \ \ldots, \ F_n, \ \ldots,$$

representando cada um a funcção correspondente da successão

$$\lambda_1\psi, \ \lambda_2\psi, \ \ldots, \ \lambda_n\psi, \ \ldots$$

---

(1) Este theorema foi demonstrado pela primeira vez por Weirstrass, para o caso d'uma variavel. (A sua Memoria foi traduzida no *Journal de Liouville*, 1886.)

Picard deu uma nova demonstração do mesmo theorema fundada nas propriedades do integral que fornece a solução do problema de Dirichlet para o caso do circulo. O mesmo geometra, no seu *Traité d'Analyse* (t. I, p. 262), estende o theorema, por um methodo analogo, ao caso de duas variaveis.

Ora o caso que nos interessa é o de tres variaveis. A este respeito diremos que Picard, nesse mesmo siito, affirma que o theorema subsiste para qualquer numero de variaveis. É o que, com effeito, se verifica facilmente, lançando mão dos resultados obtidos por Riquier na sua thése, já citada, sobre a resolução do problema de Dirichlet no caso do hyperespaço.

com um erro menor que o termo respectivo d'est'outra successão

$$\frac{1}{2}\delta_1 m, \quad \frac{1}{2}\delta_2 m, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}\delta_n m, \quad \ldots,$$

onde m designa o limite inferior de ψ.

Esses polymonios formam uma successão crescente como se deduz das relações

$$F_{i+1} > \lambda_{i+1}\psi - \frac{1}{2}\delta_{i+1} m, \quad F_i < \lambda_i \psi + \frac{1}{2}\delta_i m,$$

$$\begin{aligned} F_{i+1} - F_i &> \lambda_{i+1}\psi - \lambda_i \psi - \frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1}) m \\ &> \delta_i m - \frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1})\, m = \frac{1}{2}\, m(\delta_i - \delta_{i+1}) \\ &> 0, \end{aligned}$$

successão que tende uniformemente para ψ.

Por conseguinte, chamado U_i o valor de F_i sobre S, os U_i formarão tambem uma successão crescente, tendendo uniformemente para U.

Ora nós sabemos, por meio de cada funcção auxiliar F_i, construir uma funcção V_i, harmonica em E e reduzindo-se a U_i sobre S.

Somos assim levados a uma successão de funcções harmonicas

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots:$$

crescentes por isso que a differença $V_{i+1} - V_i$, que é harmonica em E, toma sobre S valores positivos; e tendendo para um limite V por isso que V_i é sempre inferior ao limite superior de ψ.

É facil mostrar, finalmente, que V é a funcção procurada. Com effeito, a serie de termos harmonicos

$$V_1 + (V_2 - V_1) + \ldots + (V_n - V_{n-1}) + \ldots$$

é convergente no espaço E, e representa a funcção V. Além d'isso essa serie reduz-se, sobre S, á serie

$$U_1 + (U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1}) + \dots$$

que converge uniformemente para U em toda a superficie S. Por isso, conforme o segundo theorema de Harnack, a funcção V é harmonica em E e reduz-se a U sobre S. C. q. d.

FIM.

INDICE

I. Funcções harmonicas.

II. Desenvolvimento em serie das funcções harmonicas.

III. Principio e problema de Dirichlet.

IV. Transformação da equação de Laplace.

V. Methodo d'inversão.

VI. Methodo de C. Neumann.

VII. Methodo de Poincaré.

ADVERTENCIA: — Previne-se o leitor de que, por erro de revisão na enumeração dos paragraphos, se passou do n.º 12 para 16 e se repetiu o n.º 19.

Outros erros haverá que facilmente serão corrigidos.

Fig. 1.

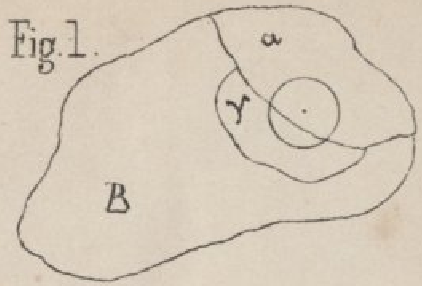


Fig. 2.

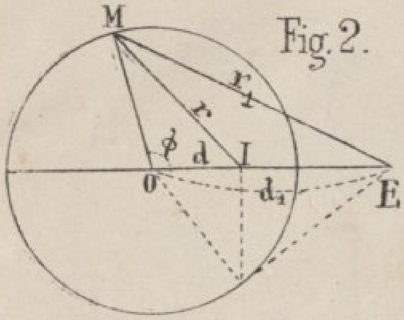


Fig. 3.

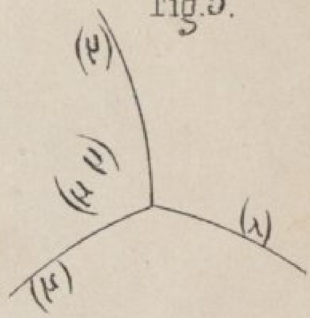
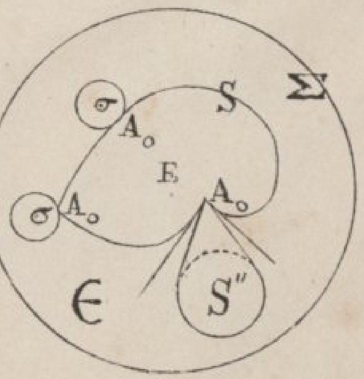


Fig. 4.



1895

S. BASTO - DISSERTAÇÃO INAUGURAL

MATHEMATICA