equações (1) que dá máximo para o limite da probabilidade de que o êrro, que a afecta, pertença ao intervalo arbitrário $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ver-se há que tal combinação é independente de ε. Esta solução aproxima-se da solução ideal impossível tanto mais quanto maior fôr n.

Uma combinação linear qualquer das equações (1) é da forma

$$(2) \qquad \alpha = q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + \ldots + q_n \alpha_n,$$

com

$$q_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

os q_i estão pois ligados pela equação

$$(3) \qquad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

O êrro possível da equação (2) é a variável aleatória

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n.$$

Façamos

$$\operatorname{esp} x_i^2 = b_i;$$

teremos

$$\operatorname{esp}(q_i x_i) = 0, \quad \operatorname{esp}(q_i x_i)^2 = q_i^2 b_i,$$

$$\operatorname{esp}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n) = 0.$$

A equação (2) não tem pois êrro constante.

Seja $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ um intervalo arbitràriamente dado, e consideremos a equação

$$\varepsilon = t\sqrt{2(q_1^2 b_1 + q_2^2 b_2 + \ldots + q_n^2 b_n)}$$

com as variáveis $t, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Vejamos que sistema de valores destas variáveis torna máximo o integral

$$(4) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2} dz,$$

considerado por ora como simples valor aproximado da probabilidade da desigualdade

$$(5) \qquad |q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_n x_n| < \varepsilon.$$

É claro que o integral é máximo para t máximo, e que t é máximo quando a soma

$$(6) \qquad q_1^2 b_1 + q_2^2 b_2 + \ldots + q_n^2 b_n$$

fôr mínima. As condições de mínimo desta função, em virtude de (3), obtêm-se igualando a zero as derivadas parciais de

$$f = q_1^2 b_1 + \ldots + q_n^2 b_n - 2\mu (q_1 + \ldots + q_n - 1),$$

considerando μ como constante; são portanto

$$q_i b_i - \mu = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou, pondo

$$\frac{1}{b_i} = g_i$$

e atendendo a (3),

$$(7) \qquad q_i = \frac{g_i}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}$$

Há realmente um mínimo de (6) para estes valores dos q_i, por ser

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} = \begin{cases} 2b_i > 0 & \text{se} \quad j = i, \\ 0 & \text{se} \quad j \gtrless i. \end{cases}$$

Para os valores (7) dos q_i, que tornam máximo o integral (4), a desigualdade (5) pode escrever-se, como é fácil de ver,

$$(8) \quad |g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n| < t\sqrt{2(g_1 + g_2 + \ldots + g_n)}.$$

Por ser

$$\operatorname{esp}(g_i x_i) = 0, \quad \operatorname{esp}(g_i x_i)^2 = g_i^2 b_i = g_i,$$

a expressão $g_1 + g_2 + \ldots + g_n$ é a soma das esperanças dos quadrados das variáveis aleatórias $g_i x_i$.

No § precedente demos o enunciado do teorema de Liapunoff. Mencionaremos aqui um corolário dêste teorema que nos vai ser útil.

Com as notações daquele §, suponhamos que as variáveis aleatórias independentes $x_i - a_i$ são limitadas superiormente em valor absoluto por um mesmo número M, e suponhamos além disso que a soma $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ cresce infinitamente com n. Será

$$b_i^{(2+\delta)} = \operatorname{esp}|x_i - a_i|^{2+\delta} < M^\delta b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

e também

$$\frac{b_1^{(2+\delta)} + \ldots + b_n^{(2+\delta)}}{(b_1 + \ldots + b_n)^{1+\frac{\delta}{2}}} < \frac{M^\delta}{(b_1 + \ldots + b_n)^{\frac{\delta}{2}}} \to 0$$

para $n \to \infty$. As condições de Liapunoff são verificadas.

Êste corolário permite afirmar, voltando à questão que nos ocupa, que a probabilidade da desigualdade (8) tem por limite o integral (4) para $n \to \infty$, se fôr

$$|g_i x_i| < M, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

e

$$g_1 + g_2 + \ldots g_n \to \infty .$$

Ora estas condições verificam-se desde que seja

$$|x_i| < N,$$
$$0 < l < g_i < L,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

i. é, desde que os valores absolutos dos êrros possíveis não possam exceder um certo número e que os números g_i, proporcionais aos pesos das observações, não possam tornar-se inferiores a certo limite positivo nem superiores a outro. É o que se dá efectivamente com as boas observações.

Resulta daqui que, para os valores (7) dos q_i, o integral (4) não só é um valor aproximado da probabilidade da desigualdade (5), mas é também o limite para que tende esta probabilidade quando o número de observações cresce infinitamente; e portanto a combinação linear (2) correspondente a êsses valores dos q_i é a combinação mais conveniente que procurávamos.

Observando que se tem

$$\operatorname{esp}(q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n)^2 = \operatorname{esp}(q_1^2 x_1^2 + \ldots + q_n^2 x_n^2 + 2 q_1 q_2 x_1 x_2 + \ldots) =$$
$$= q_1^2 b_1 + \ldots + q_n^2 b_n$$

por serem independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e ser conseqüentemente

$$\text{esp}\,(x_i x_j) = \text{esp}\,x_i \,.\, \text{esp}\,x_j = 0, \quad i \lesseqgtr j,$$

conclui-se que a combinação linear mais conveniente das observações dadas é a que torna mínima a esperança do quadrado do êrro possível da incógnita. É o princípio que Gauss postulou na sua segunda teoria da combinação das observações (¹) e que conduz, como é sabido, ao método dos menores quadrados.

A combinação mais conveniente é independente de ε, como tínhamos afirmado. Além disso, por ser

$$q_1^2 b_1 + \ldots + q_n^2 b_n = \frac{1}{g_1 + \ldots + g_n},$$

pondo

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_n = 2h^2$$

tem-se a igualdade

$$t = h\varepsilon,$$

e portanto a probabilidade da desigualdade (5), quando n é suficientemente grande, é pràticamente igual a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\varepsilon}^{+h\varepsilon} e^{-z^2}\, dz.$$

Fazendo a substituïção

$$z = h\xi,$$

vê-se que a probabilidade de que o êrro possível da in-

(¹) *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae: Pars prior*, 1821; *Pars posterior*, 1823; *Supplementum*, 1826. In-*Werke*, Bd. IV, 1873.

cógnita, na combinação mais conveniente dum grande número de observações, seja um número do intervalo $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ é dada pràticamente pelo integral

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2 \xi^2} d\xi,$$

e satisfaz por conseguinte à lei exponencial que Gauss, na sua primeira teoria do método dos menores quadrados, pretendia impôr ao êrro de cada observação.

56. Consideremos agora o caso das observações indirectas. Para simplificar a escrita, suporemos o número de incógnitas igual a três. Mas o método é geral.

Como no n.º anterior, admitimos que as observações são independentes e desprovidas de êrros constantes.

Suponhamos que n observações nos forneceram as equações aproximadas

$$(1) \qquad \begin{cases} H_1 \alpha + K_1 \beta + L_1 \gamma \neq \delta_1, \\ H_2 \alpha + K_2 \beta + L_2 \gamma \neq \delta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_n \alpha + K_n \beta + L_n \gamma \neq \delta_n, \end{cases}$$

onde $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ são os resultados directos das observações, α, β, γ as incógnitas, H_i, K_i, L_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ números conhecidos e $n > 3$. Para obter a combinação mais conveniente das n observações, procuraremos três sistemas de factores

$$\begin{array}{c} h_1, h_2, \ldots, h_n \\ k_1, k_2, \ldots, k_n \\ l_1, l_2, \ldots, l_n \end{array}$$

pelos quais se devam multiplicar sucessivamente as equações (1) afim de que as três equações resultantes da adição dos produtos das equações dadas pelos factores de cada sistema dêem para as incógnitas valores aproximados tais, que seja máximo o limite para $n \to \infty$ da probabilidade de que o vector aleatório, cujas componentes são os êrros possíveis dêstes valores aproximados, tenha a extremidade dentro dum certo elipsoide de volume arbitrário ε, concêntrico à origem do vector. Ver-se há que os sistemas de factores encontrados são independentes de ε.

Sejam

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

os êrros possíveis das equações (1). Tem-se

$$\operatorname{esp} x_i = 0,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

por não existirem êrros constantes.

As três equações formadas como indicámos a partir de (1) dão para α, β, γ valores aproximados da forma

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha \neq q_1 \delta_1 + \ldots + q_n \delta_n , \\ \beta \neq r_1 \delta_1 + \ldots + r_n \delta_n , \\ \gamma \neq s_1 \delta_1 + \ldots + s_n \delta_n , \end{cases}$$

com

$$q_i = \frac{D_i'}{D},\qquad r_i = \frac{D_i''}{D},\qquad s_i = \frac{D_i'''}{D},$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

onde D representa o determinante, suposto diferente de zero,

$$\begin{vmatrix} \Sigma h_i H_i & \Sigma h_i K_i & \Sigma h_i L_i \\ \Sigma k_i H_i & \Sigma k_i K_i & \Sigma k_i L_i \\ \Sigma l_i H_i & \Sigma l_i K_i & \Sigma l_i L \end{vmatrix}$$

e D'_i, D''_i, D'''_i são os determinantes que se obtêm substituindo em D, respectivamente, a primeira, a segunda, a terceira colunas por uma coluna formada pelos números h_i, k_i, l_i.

Entre os coeficientes q_i, r_i, s_i existem as relações evidentes

$$(3) \qquad \begin{cases} \Sigma\, q_i H_i = 1, & \Sigma\, q_i K_i = 0, & \Sigma\, q_i L_i = 0, \\ \Sigma\, r_i H_i = 0, & \Sigma\, r_i K_i = 1, & \Sigma\, r_i L_i = 0, \\ \Sigma\, s_i H_i = 0, & \Sigma\, s_i K_i = 0, & \Sigma\, s_i L_i = 1. \end{cases}$$

Os êrros possíveis das equações aproximadas (2) são respectivamente

$$(4) \qquad \begin{cases} q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n, \\ r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n, \\ s_1 x_1 + \ldots + s_n x_n. \end{cases}$$

Façamos

$$b_i = \operatorname{esp} x_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

e consideremos os n vectores independentes

$$(q_1 x_1,\ r_1 x_1,\ s_1 x_1), \ldots, (q_n x_n,\ r_n x_n,\ s_n x_n);$$

teremos

$$\operatorname{esp}(q_i x_i) = 0, \ \ldots, \quad \operatorname{esp}(q_i x_i)^2 = q_i^2 b_i, \ \ldots,$$
$$\operatorname{esp}(q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n) = 0, \ \ldots$$

Sabe-se [1] que a probabilidade de que a soma dêstes vectores, aplicada à origem das coordenadas cartesianas ortogonais t, t', t'', tenha a extremidade dentro dum vo-

[1] Cf. p. ex. Markoff, *op. cit.*, Kap. v, § 33. Markoff só considera vectores de duas componentes.

lume V, é aproximadamente igual a

$$(5) \qquad \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3\sqrt{\Delta}}\iiint\limits_{V} e^{-\frac{R(t,t',t'')}{2\Delta}}\,dt\,dt'\,dt'',$$

onde $R(t, t', t'')$ é a forma quadrática definida positiva

$$Mt^2 + M't'^2 + M''t''^2 + 2Nt't'' + 2N't''t + 2N''tt',$$

cujos coeficientes são os complementos algébricos dos elementos A, A', A'', B, B', B'' do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} A &= q_1^2 b_1 + \dots + q_n^2 b_n, & B &= r_1 s_1 b_1 + \dots + r_n s_n b_n, \\ A' &= r_1^2 b_1 + \dots + r_n^2 b_n, & B' &= s_1 q_1 b_1 + \dots + s_n q_n b_n, \\ A'' &= s_1^2 b_1 + \dots + s_n^2 b_n, & B'' &= q_1 r_1 b_1 + \dots + q_n r_n b_n. \end{aligned}$$

A equação

$$(6) \qquad \frac{R(t, t', t'')}{2\Delta} = u,$$

onde u é um parâmetro variável nulo ou positivo, representa uma família de elipsóides reais com o centro na origem das coordenadas; o volume dum dêstes elipsóides é, como se sabe, expresso por

$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{(2\Delta u)^3}{\Delta_1}},$$

onde Δ_1 é o determinante adjunto de Δ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} M & N'' & N' \\ N'' & M' & N \\ N' & N & M'' \end{vmatrix}.$$

A relação conhecida

$$\Delta_1 = \Delta^2$$

dá à expressão do volume do elipsóide a forma

$$\frac{8}{3}\pi\sqrt{2\Delta}\,u^{\frac{3}{2}}. \tag{7}$$

Suponhamos que o volume V é a camada compreendida entre as superfícies infinitamente vizinhas dos dois elipsóides correspondentes aos valores u e $u+du$ do parâmetro. Atendendo a que a função integranda da expressão (5) é igual a

$$e^{-u}$$

nesta camada infinitesimal, e a que o volume da mesma camada é

$$4\pi\sqrt{2\Delta}\sqrt{u}\,du,$$

como se reconhece diferenciando (7), vê-se fàcilmente que a probabilidade de que o vector êrro das equações (2), cujas componentes são as somas (4), tenha a extremidade na camada considerada é dada aproximadadamente pela expressão

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u}\sqrt{u}\,du.$$

Portanto, a probabilidade de que a extremidade do vector êrro esteja dentro do elipsóide correspondente ao valor u do parâmetro tem por valor aproximado

$$(8) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u} \sqrt{u}\, du.$$

Seja ε um número positivo arbitràriamente dado e consideremos a equação

$$\frac{8}{3} \pi \sqrt{2\Delta}\, u^{\frac{3}{2}} = \varepsilon,$$

com as variáveis u, q_i, r_i, s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. A expressão (8) dá a probabilidade aproximada de que o vector êrro tenha a extremidade dentro do elipsóide da família (6) de volume ε. Esta probabilidade é evidentemente máxima quando u fôr máximo; mas u será máximo quando Δ fôr mínimo, e portanto a combinação linear das equações (1) que dá máximo à probabilidade aproximada (8) é aquela em que os q_i, r_i, s_i tornam mínimo o determinante

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

Ora, não é difícil mostrar que a combinação, que torna mínimo êste determinante, torna também mínimas as funções A, A', A''.

As condições de mínimo de Δ obtêm-se com efeito, por virtude de (3), igualando a zero as derivadas parciais da função

$$\begin{aligned}\Delta &- 2\lambda(\Sigma q_i H_i - 1) - 2\lambda' \Sigma q_i K_i - 2\lambda'' \Sigma q_i L_i \\ &- 2\mu \Sigma r_i H_i - 2\mu'(\Sigma r_i K_i - 1) - 2\mu'' \Sigma r_i L_i \\ &- 2\nu \Sigma s_i H_i - 2\nu' \Sigma s_i K_i - 2\nu''(\Sigma s_i L_i - 1),\end{aligned}$$

onde λ, λ', λ'', μ, μ', μ'', ν, ν', ν'' devem considerar-se como constantes, o que dá as equações

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Delta}{\partial q_i} - 2\lambda H_i - 2\lambda' K_i - 2\lambda'' L_i = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial r_i} - 2\mu H_i - 2\mu' K_i - 2\mu'' L_i = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial s_i} - 2\nu H_i - 2\nu' K_i - 2\nu'' L_i = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered}$$

Encontra-se sem dificuldade que as derivadas $\frac{\partial \Delta}{\partial q_i}, \frac{\partial \Delta}{\partial r_i}, \frac{\partial \Delta}{\partial s_i}$ valem respectivamente

$$\begin{gathered}2b_i(M q_i + N'' r_i + N' s_i), \\ 2b_i(N'' q_i + M' r_i + N s_i), \\ 2b_i(N' q_i + N r_i + M'' s_i),\end{gathered}$$

e assim as condições de mínimo encontradas podem escrever-se, pondo $\frac{1}{b_i} = g_i$,

$$\begin{gathered}M q_i + N'' r_i + N' s_i = g_i(\lambda H_i + \lambda' K_i + \lambda'' L_i), \\ N'' q_i + M' r_i + N s_i = g_i(\mu H_i + \mu' K_i + \mu'' L_i), \\ N' q_i + N r_i + M'' s_i = g_i(\nu H_i + \nu' K_i + \nu'' L_i), \\ i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered}$$

Destas equações resultam imediatamente as equações equivalentes

$$
(9)\qquad \begin{cases} q_i = \dfrac{g_i}{\Delta^2}(\zeta\, H_i + \zeta'\, K_i + \zeta''\, L_i), \\[2ex] r_i = \dfrac{g_i}{\Delta^2}(\eta\, H_i + \eta'\, K_i + \eta''\, L_i), \\[2ex] s_i = \dfrac{g_i}{\Delta^2}(\theta\, H_i + \theta'\, K_i + \theta''\, L_i), \end{cases}
$$

onde ζ, η, θ se obtêm substituindo respectivamente em Δ_1 a primeira, a segunda, a terceira colunas por uma coluna formada pelos elementos λ, μ, ν; e ζ', η', θ', ζ'', η'', θ'' têm expressões semelhantes com as letras λ, μ, ν acentuadas uma e duas vezes.

Em virtude das três primeiras equações (3), a primeira (9) fornece as três seguintes

$$
(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\zeta}{\Delta^2}\Sigma g_i H_i^2 + \dfrac{\zeta'}{\Delta^2}\Sigma g_i H_i K_i + \dfrac{\zeta''}{\Delta^2}\Sigma g_i H_i L_i = 1, \\[2ex] \dfrac{\zeta}{\Delta^2}\Sigma g_i H_i K_i + \dfrac{\zeta'}{\Delta^2}\Sigma g_i K_i^2 + \dfrac{\zeta''}{\Delta^2}\Sigma g_i K_i L_i = 0, \\[2ex] \dfrac{\zeta}{\Delta^2}\Sigma g_i H_i L_i + \dfrac{\zeta'}{\Delta^2}\Sigma g_i K_i L_i + \dfrac{\zeta''}{\Delta^2}\Sigma g_i L_i^2 = 0, \end{cases}
$$

que dão os valores que as fracções

$$
\frac{\zeta}{\Delta^2}, \frac{\zeta'}{\Delta^2}, \frac{\zeta''}{\Delta^2}
$$

possuem na combinação que torna Δ mínimo, os quais, substituídos na primeira (9), fornecem o valor procurado de q_i; verifica-se fàcilmente, com efeito, que o determinante do sistema (10) é positivo.

Procuremos agora as condições de mínimo de A. Devemos igualar a zero as derivadas parciais da função

$$A - 2\rho(\Sigma q_i H_i - 1) - 2\rho' \Sigma q_i K_i - 2\rho'' \Sigma q_i L_i,$$

considerando ρ, ρ', ρ'' como constantes, o que dá as equações

$$\frac{\partial A}{\partial q_i} - 2\rho H_i - 2\rho' K_i - 2\rho'' L_i = 0,$$

ou

$$(11) \qquad q_i = g_i(\rho H_i + \rho' K_i + \rho'' L_i),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Verifica-se como no número anterior que estas equações dão efectivamente um mínimo para A. Quanto ao mínimo de Δ, é evidente que êle existe em virtude das considerações com que o introduzimos.

Das equações (11) resultam, pelas três primeiras equações (3), as seguintes

$$\rho \Sigma g_i H_i^2 + \rho' \Sigma g_i H_i K_i + \rho'' \Sigma g_i H_i L_i = 1,$$
$$\rho \Sigma g_i H_i K_i + \rho' \Sigma g_i K_i^2 + \rho'' \Sigma g_i K_i L_i = 0,$$
$$\rho \Sigma g_i H_i L_i + \rho' \Sigma g_i K_i L_i + \rho'' \Sigma g_i L_i^2 = 0,$$

que, confrontadas com (10), provam que, para Δ mínimo, os valores de

$$\frac{\zeta}{\Delta^2}, \quad \frac{\zeta'}{\Delta^2}, \quad \frac{\zeta''}{\Delta^2}$$

são iguais a ρ, ρ', ρ'' respectivamente; e portanto, pelo confronto de (11) com a primeira (9), que os valores dos q_i relativos ao mínimo de Δ tornam mínimo A.

Procedendo do mesmo modo com A' e A'' chegariamos a resultado análogo. A combinação das equações (1) que torna máxima a probabilidade aproximada (8) é portanto a que torna mínimos A, A', A'', como tinhamos afirmado; verifica-se que ela é independente de ε.

Ora A, A', A'' são as esperanças dos quadrados dos êrros (4). Por outro lado, Castelnuovo demonstrou recentemente [1] que, sob certas condições análogas às do corolário de Liapunoff e que podem admitir-se como realizadas nas boas observações, o integral (5), e portanto o integral (8) que resulta de (5) rigorosamente, não só é um valor aproximado da probabilidade mas é mesmo o limite para que tende a probabilidade quando n cresce infinitamente. Conclui-se que a combinação que acabamos de encontrar é a combinação mais conveniente que procurávamos, e que ela torna mínimas as esperanças dos quadrados dos êrros possíveis das incógnitas. É o princípio de Gauss, do qual êste geómetra deduziu o método dos menores quadrados.

Como observámos no começo deste número, a análise precedente é geral. Partindo do integral

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{\Delta}} \int\int_{V} \cdots \int e^{-\frac{R(t_1, t_2, \ldots, t_m)}{2\Delta}} dt_1\, dt_2 \ldots dt_m,$$

limite da probabilidade de que a soma de n vectores independentes de m componentes, com esperanças nulas, tenha a extremidade dentro dum supervolume V do espaço eu-

(1) *Calcolo delle Probabilità*, vol. II, 2.ª ed., Bolonha, 1928; Apendice, art. IV, pág. 218. O autor considera vectores de duas componentes, mas o seu método generaliza-se sem dificuldade.

clidiano m-dimensional, e utilizando a expressão

$$\frac{(\pi u)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\sqrt{|a_{ij}|}}$$

do volume do hiperelipsóide

$$a_{11}\,t_1^2+\ldots+a_{mm}\,t_m^2+2\,a_{12}\,t_1\,t_2+\ldots+2\,a_{m-1,m}\,t_{m-1}\,t_m=u,$$

na qual $|a_{ij}|$ é o discriminante da forma quadrática definida positiva do primeiro membro desta equação e Γ representa a função euleriana de segunda espécie, acha-se como precedentemente que o limite da probabilidade, de que o vector êrro duma combinação linear de n equações com m incognitas $(n>m)$ tenha a extremidade dentro do hiperelipsóide

$$\frac{R(t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_m)}{2\,\Delta}=u,$$

é igual ao integral

$$(12)\qquad \frac{m}{2\,\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}\int_0^u e^{-z}\,z^{\frac{m}{2}-1}\,dz.$$

Fazendo o volume dêste hiperelipsóide igual a um número positivo arbitrário ε, i. é, pondo

$$(13)\qquad \frac{(\sqrt{2\,\pi})^m\,\sqrt{\Delta}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}\,u^{\frac{m}{2}}=\varepsilon,$$

conclui-se que o limite da probabilidade de que a extremidade do vector êrro esteja dentro do hiperelipsóide de volume ε é máxima quando u fôr máximo, e isto dá-se quando Δ fôr mínimo. Sem dificuldade se prova depois que os sistemas de factores, que tornam mínimo o determinante Δ e que dão portanto a combinação mais conveniente, tornam também mínimos os elementos da sua diagonal principal, i. é, as esperanças dos quadrados dos êrros possíveis das incógnitas, o que é o princípio de Gauss.

A fórmula (12) permite calcular aproximadamente a probabilidade de que o vector êrro da combinação mais conveniente tenha a extremidade dentro do hiperelipsóide considerado de volume ε, quando o número de observações é muito grande. Se, em (13), fazemos igual a $\frac{1}{k}$ o coeficiente de $u^{\frac{m}{2}}$, obtemos

$$u = (k\varepsilon)^{\frac{2}{m}}$$

para limite superior do integral (12); fazendo ainda neste integral a substituïção

$$z^{\frac{m}{2}} = k\varphi,$$

encontra-se para valor aproximado da probabilidade considerada o integral

$$\frac{k}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\varepsilon} e^{-\sqrt[m]{k^2\varphi^2}}\, d\varphi,$$

que contém para $m=1$ a fórmula análoga do número precedente, como é fácil de ver.

CORRECÇÕES MAIS IMPORTANTES

Pág. 4, nota (1):	1820	em vez de 1920.
» 34, linha 12:	$\sum_{j}$	em vez de Σ
» 48, » 20:	conjunto mensurável	em vez de: consurável.
» 65, » 11:	$A' B$	em vez de: $A' B'$.
» 67, » última:	$\overline{B'}$	em vez de: $\overline{B}$.
» 77, » 13:	numerável	em vez de: finito, numerável.
» 77, » 19:	ser	em vez de: ser finito ou.
» 108, » 6:	$+ g_n$	em vez de: g_n.

ÍNDICE

DISSERTAÇÃO

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

M. DOS REI