si l'on désigne par $m'l$ ce que devient la valeur de δn donnée par la formule (g), au point de l'orbite d'où nous comptons maintenant le temps t, il est clair qu'on aura

$$\delta' n = \delta n - m' l;$$

les valeurs précédentes de δn, δf, $\delta f'$ donnent d'ailleurs cette relation très-simple,

$$\frac{\delta n}{n} + \frac{2 \cos u + e}{1 - e^2} \delta f + \frac{2 \sin u}{\sqrt{1 - e^2}} \delta f' = \frac{m'}{a^2 n \sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{x dy' - y dx' + y' dx - x' dy}{dt} \right);$$

équation qu'il est facile de vérifier en remplaçant δn, δf, $\delta f'$, par leurs valeurs et en comparant dans les deux membres les coefficients de x', y', $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ après les avoir préalablement exprimés en fonction de u.

L'expression de $d.\delta\zeta$ deviendra donc, en y substituant pour $\delta' n$, δe, $e\delta\omega$ leurs valeurs, et en l'intégrant ensuite,

$$\delta\zeta = - m' l t + \frac{m' (x y' - x' y)}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} - \frac{\delta f \sin u (2 - e^2 - e \cos u)}{1 - e^2}$$
$$- \frac{\delta f' (1 - e \cos u)^2}{e \sqrt{1 - e^2}} + \text{const.}$$

Cette formule, remarquable par sa simplicité, a été donnée pour la première fois par Lagrange. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris; Savants étrangers*, tome X.)

On aura l'altération de l'anomalie moyenne, depuis un point de l'orbite jusqu'à un autre point donné, due à la partie de R indépendante de R', en retranchant la valeur de $\delta\zeta$ au premier de ces points de sa valeur au second.

38. Considérons maintenant les altérations des éléments de l'orbite dépendantes de R′. Lorsque la comète se trouve dans la partie supérieure de son orbite, R′ étant une très-petite quantité, les valeurs de ces variations sont aussi très-peu considérables. Si pour les obtenir on substitue R′ à la place de R dans les formules (1) et (2), ce changement n'altérant en rien leur forme, il est clair qu'elles s'intégreront encore par la méthode exposée n° **34**, et comme la fonction R′ est beaucoup plus petite que R, on pourra écarter davantage les ordonnées de la courbe parabolique, ce qui rendra l'application de la méthode plus facile. Mais dans le cas où la comète s'éloigne beaucoup de la planète perturbatrice, et où il est avantageux de partager ainsi R en deux parties, ces formules peuvent se développer en suites convergentes, et l'on obtient leurs intégrales par une méthode d'approximation beaucoup plus expéditive que celles des quadratures mécaniques.

Pour le faire voir, reprenons la valeur de R′, n° **29**,

$$R = \frac{1}{2} m' \left[-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^5} + \frac{5(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^7} + \ldots \right].$$

Si l'on différentie cette valeur par rapport aux variables x, y, z et que, pour abréger, on fasse

$$P = \frac{3}{2}\frac{r'^2}{r^5} - \frac{15}{2}\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^7} - \frac{35}{2}\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^9} - \ldots,$$

$$P' = \frac{3(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)}{r^5} + \frac{15}{2}\frac{(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^7} + \ldots,$$

il est aisé de s'assurer qu'on aura

$$\frac{dR'}{dx} = m'(Px + P'x'), \quad \frac{dR'}{dy} = m'(Py + P'y'),$$

$$\frac{dR'}{dz} = m'(Pz + P'z').$$

Substituons ces valeurs dans les formules (1), (2), (5), après y avoir changé R en R', nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
da &= -2m'a^2[P(xdx + ydy) + P'(x'dx + y'dy)],\\
df &= m'P'(x'y - xy')dy + m'(xdy - ydx)(Py + P'y'),\\
df' &= m'P'(x'y - xy')dx + m'(ydx - xdy)(Py + P'y'),\\
d\varepsilon &= df'\left(\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right) - 2andt[P(x^2+y^2) + P'(xx'+yy')],\\
dp &= \frac{m'}{\sqrt{a(1-e^2)}}P'yz'dt,\\
dq &= \frac{m'}{\sqrt{a(1-e^2)}}P'xz'dt.
\end{aligned}\right\} \quad (F)$$

Si l'on remplace, dans ces formules, P et P' par les séries que ces lettres représentent; qu'on substitue ensuite pour x, y, z et r leurs valeurs

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad z = 0, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

et pour x', y', z', r' leurs valeurs données, n° **32**, en fonction des sinus et cosinus de v'; qu'on observe que, par les formules du mouvement elliptique, on a

$$\left.\begin{aligned}
r^2\,dv &= dt\sqrt{a(1-e^2)},\\
r'^2\,dv' &= dt\sqrt{a'(1-e'^2)},
\end{aligned}\right\} \quad (n)$$

il est évident que chacune des expressions précédentes pourra se développer en une suite de termes de cette forme,

$$H\cos(iv + i'v' + K)\,dv, \quad (p)$$

i et i' étant des nombres entiers, H et K des constantes fonctions des éléments des orbites de la comète et de la planète perturbatrice.

Ces termes s'intègrent sans difficulté dans le cas où $i' = 0$; ils ne sont plus intégrables généralement lorsque i' n'est pas nul; mais quand la comète est dans la partie supérieure de son orbite, les termes de cette espèce sont considérablement plus petits que les précédents, en sorte qu'on peut presque toujours les négliger sans scrupule. Au reste, si l'on juge convenable de pousser plus loin l'approximation, on pourra le faire de la manière suivante.

Les deux équations (n) donnent

$$dv = \frac{r'^2\,dv'}{r^2}\,\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}.$$

Le terme qu'il s'agit d'intégrer devient, en substituant cette valeur,

$$H\,\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}\int\frac{r'^2\,dv'}{r^2}\cos(iv + i'v' + K).$$

Si, dans cette intégrale, on met pour $\frac{r'^2}{r^2}$ sa valeur

$$\frac{a'^2(1-e'^2)^2\,(1+e\cos v)^2}{a^2(1-e^2)\,[1+e'\cos(v'-\omega')]^2},$$

et qu'on remarque que e' est une très-petite quantité, il est clair qu'on pourra la développer en une suite de termes de cette forme,

$$H'\int\cos(lv + l'v' + K')\,dv'.$$

Ce terme peut encore s'écrire ainsi :

$$\frac{H'}{l'}\int \cos(lv + K')\, d.\sin l'v' + \frac{H'}{l'}\int \sin(lv + K')\, d.\cos l'v' ;$$

on aura donc, en intégrant,

$$H'\int \cos(lv + l'v' + K')dv' = \frac{H'}{l'}\sin(lv + l'v' + K')$$
$$- \frac{H'l}{l'}\int \cos(lv + l'v' + K')\, dv.$$

Si, dans le dernier terme, on substitue pour dv sa valeur, il devient

$$-\frac{H'l}{l'}\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}\int \frac{r'^2\, dv'}{r^2}\cos(lv + l'v' + K').$$

Ce terme est beaucoup plus petit que l'intégrale

$$H'\int \cos(lv + l'v' + K')\, dv',$$

puisque $\frac{r'}{r}$ est supposé une très-petite fraction, et que le facteur $\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}$ est aussi très-petit ; car $a(1-e)$ est la distance périhélie de la comète, et cette distance est beaucoup moindre que a' relativement aux trois planètes supérieures, les seules dont on ait ordinairement à considérer l'action. On pourra donc supposer l'intégrale $H'\int \cos(lv + l'v' + K')\, dv'$, à très-peu près égale à $\frac{H'}{l'}\sin(lv + l'v' + K')$, et négliger l'autre partie de sa valeur. Si l'on voulait cependant y avoir égard, comme cette partie est absolument de même forme que l'intégrale $H\int \cos(iv + i'v' + K)dv$, on pourrait la développer comme elle en une suite de termes semblables au suivant :

$$H'' \int \cos(sv + s'v' + K')\,dv',$$

que l'on intégrerait par la méthode que nous venons d'indiquer. En continuant ainsi on diminuera à volonté l'erreur résultante des intégrales négligées, et l'on approchera d'aussi près que l'on voudra de la valeur de l'intégrale

$$H \int \cos(iv + i'v' + K)\,dv.$$

Il ne s'agit donc, pour appliquer aux équations (F) la méthode d'intégration précédente, que de développer ces formules, ce qui ne demande plus que des substitutions faciles. En joignant les valeurs de δa, δf, $\delta f'$, $\delta\zeta$, δp, δq, qui en résulteront, à celles qui se rapportent à la partie de R indépendante de R′, on aura les altérations totales des éléments elliptiques de la comète dans la partie supérieure de son orbite.

39. Voici donc, d'après les résultats précédents, la marche qu'il faudra suivre pour déterminer généralement les perturbations d'une comète et fixer à l'avance l'époque de son retour au périhélie. Prenons pour exemple la comète de 1759. Les observations faites pendant ses apparitions, en 1682 et en 1759, ont fourni toutes les données nécessaires pour déterminer les éléments de son orbite à ces deux époques. Elles ne donnent point directement, il est vrai, la valeur du grand axe ; cette valeur dépend, comme nous l'avons vu, des perturbations que la comète a subies pendant la révolution de 1682 à 1759; mais on peut, dans le calcul de ces perturbations, regarder l'orbite comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée observée de cette révolution; les quantités négligées seront de l'ordre du carré des forces perturbatrices. Partant donc des éléments de 1682, on déterminera leurs altérations, ainsi que celle de l'anomalie moyenne, pour les six premiers signes d'anomalie excentrique, c'est-à-dire depuis $u=0$ jusqu'à $u=180°$; pour les six autres signes, il sera préférable de fixer l'origine de l'angle u au périhélie de 1759 et de remonter vers 1682, en faisant u négatif et en employant les éléments déduits des observations de 1759. Dans le troisième et le quatrième quart de son ellipse, la comète étant beaucoup plus éloignée des planètes perturbatrices que dans les deux autres, on pourra prendre cette seconde moitié de l'orbite pour ce que nous avons nommé la *moitié supérieure* et employer avec sûreté les formules qui s'appliquent à ce cas. Dans les deux autres quarts on fera usage, pour calculer les altérations des éléments de l'orbite, de la méthode des quadratures mécaniques.

On déterminera, par ce moyen, le grand axe de l'orbite qui répond au périhélie de 1682, et l'on en conclura celui qui se rapporte au périhélie de 1759. On recommencera ensuite les mêmes opérations depuis 1759 jusqu'au prochain retour de la comète au périhélie; mais comme l'époque de ce passage est inconnue, on pourra, pour plus d'exactitude, rectifier l'orbite de 30 en 30 degrés, en employant pour chaque signe les éléments de l'ellipse qui résulte des calculs précédents. Lorsqu'on aura ainsi déterminé les variations de l'anomalie moyenne et des autres éléments de l'orbite depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 360°$, on en conclura l'époque du prochain retour de la comète à son périhélie et les éléments de son orbite à cette époque.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX COMÈTES PÉRIODIQUES DE 1682, DE 1819 ET DE 1825.

40. Le système du monde renferme aujourd'hui (*) trois comètes dont le retour périodique est constaté. La plus anciennement connue est la comète de 1682. Halley, qui avait le premier remarqué son identité avec les comètes aperçues en 1531 et 1607, par une évaluation approximative et purement conjecturale des altérations qu'elle devait éprouver dans la période suivante, en vertu de l'action de Jupiter et de Saturne, annonça son retour pour la fin de l'année 1758 ou le commencement de 1759. Clairaut tenta de soumettre à des calculs rigoureux cette importante question ; il appliqua à la détermination des perturbations de cette comète la solution qu'il avait donnée du problème des trois corps, et après un travail immense qui embrasse trois révolutions de la comète, il fixa l'époque de son passage par le périhélie au 4 avril 1759. On sait que la prédiction du géomètre se réalisa à quelques jours près; et encore l'écart des résultats de l'observation et de la théorie, aurait-il été diminué sans doute, si Clairaut eût employé dans ses calculs la

(*) Toutes les dates dans ce chapitre se rapportent à la première édition de l'ouvrage qui a paru en 1829.

valeur de la masse de Saturne, telle que nous la connaissons aujourd'hui, et s'il avait eu égard à l'action de la planète Uranus, dont on ignorait de son temps l'existence.

Les deux autres comètes, à l'égard desquelles s'est reproduit, de nos jours, le phénomène si remarquable de leur réapparition au périhélie après une ou plusieurs révolutions, parcourent des ellipses beaucoup moins allongées que la précédente. La première accomplit sa révolution en 1204 jours à peu près. Ce fut en 1819 qu'elle fut reconnue, pour la première fois, comme comète périodique. En examinant les éléments d'une comète qu'on venait d'observer au commencement de cette année, un membre du Bureau des Longitudes remarqua qu'ils avaient une grande analogie avec ceux d'un astre de même nature aperçu en 1805. La même observation fut faite, en Allemagne, par M. Olbers, qui reconnut en outre que cette comète avait déjà été vue précédemment en 1759 et 1789. D'après cela, le temps périodique de cet astre ne pouvait être que d'un petit nombre d'années. M. Encke, astronome de Gotha, entreprit de représenter par une orbite elliptique les observations de 1805 et 1819, et les éléments qu'il détermina, se trouvèrent avoir entre eux plus d'analogie encore que les éléments paraboliques; alors il ne resta plus de doute qu'ils n'appartinssent à une même comète, dont la période était de trois ans et trois mois à peu près, et qui, dans l'intervalle de 1805 à 1819, avait accompli quatre révolutions entières pour revenir à son périhélie. D'après la rapidité de cette révolution, on aurait pu considérer cet astre comme une nouvelle planète; mais on a continué à le ranger parmi les comètes, tant à raison de ses apparences physiques, que parce qu'il n'est pas visible pour nous dans toutes les parties de son orbite. Depuis cette importante découverte, plusieurs géomètres se sont occupés de la détermination des dérangements que cette comète a dû éprouver dans ses diverses révolutions depuis 1805 jusqu'à 1829, époque de sa dernière apparition, et ils sont parvenus à représenter sa marche dans cet intervalle avec une précision à laquelle il paraissait difficile que la théorie pût atteindre. Mais le même succès n'a pas couronné leurs efforts lorsqu'ils ont tenté de remonter aux passages antérieurs à 1805, et les orbites elliptiques résultant du calcul des perturbations n'ont pu que satisfaire imparfaitement aux observations de 1795 et 1786. M. Encke a pensé que pour représenter la marche de la comète dans cet intervalle, il fallait recourir à l'hypothèse d'un milieu éthéré dont la résistance altère insensiblement les éléments de son orbite, et cette idée a donné encore à la théorie de cet astre un plus haut degré d'intérêt. Sans doute, si les corps célestes étaient soumis à cette nouvelle force perturbatrice, dont aucun autre phénomène ne nous a révélé l'existence, son influence serait beaucoup plus sensible sur les comètes que sur les planètes, à cause du peu de densité de la matière qui les compose, de même que nous voyons, à la surface de la Terre, la résistance de l'air altérer d'autant plus les mouvements des corps pesants, que leur densité est plus petite; mais les résultats des calculs qu'on a faits à cet égard, et les hypothèses sur lesquelles ils sont fondés, nous paraissent les premiers trop peu concluants, et les secondes trop arbitraires pour décider une pareille question, et ce n'est qu'après un grand nombre de révolutions de la comète de 1819, et lorsque sa théorie aura été suffisamment approfondie, qu'un point aussi important de la physique céleste pourra être établi avec quelque certitude.

Enfin, c'est dans ces derniers temps seulement que le système du monde s'est enrichi d'une nouvelle comète périodique dont la révolution est de six ans trois quarts à peu près. Elle fut aperçue d'abord le 27 février 1826, en Bohême, par M. Biela; le 9 mars suivant, à Marseille, par M. Gambart, et le 10 à Altona, par M. Clausen. Les éléments paraboliques conclus des premières observations de cet astre, avaient une ressemblance remarquable avec ceux de deux comètes observées en 1772 et 1806. MM. Clausen et Gambart, qui paraissent se partager l'honneur d'avoir fait simultanément ce rapprochement, tentèrent alors de calculer le mouvement de ces trois comètes en leur appliquant une orbite elliptique, et après quelques essais, ils trouvèrent, chacun de leur côté, une ellipse qui en représentait les observations assez exactement pour ne plus laisser aucun doute sur leur identité.

Tel est l'état actuel de l'Astronomie relativement aux comètes dont la révolution est connue. Il n'est pas douteux que l'attention assidue qu'on apporte maintenant aux observations astronomiques, n'en augmente encore le nombre dans la suite; mais il est à présumer que la découverte des comètes à longue période, comme celle de 1682, sera toujours trèsrare, surtout si l'on remarque qu'on n'observe ces astres avec assez de soin et assez de précision que depuis deux siècles. Les incertitudes dont les observations précédentes sont affectées, doivent même souvent tromper les conjectures qu'elles ont fait naître; c'est ce qui est arrivé, en effet, pour la comète de 1532, observée par Appien. Les rapports qui existent entre ses éléments et ceux d'une comète observée en 1661, par Hévélius, avaient fait penser qu'ils appartenaient à un même astre dont la révolution était de 128 années environ, et en conséquence on attendait le retour de cette comète vers 1789; mais elle n'a pas reparu.

Nous regrettons que les bornes de cet ouvrage ne nous permettent pas de développer, dans toute leur étendue, les résultats de l'application de la théorie exposée dans le chapitre précédent aux trois comètes dont nous venons de tracer l'histoire; mais du moins, en présentant le résumé de ces calculs, nous en indiquerons la marche avec assez de détails pour éviter tout embarras à ceux qui voudraient les vérifier ou les pousser plus loin, en considérant de nouvelles révolutions de ces comètes.

Détermination du prochain retour au périhélie de la comète de 1759.

41. Les premières observations un peu certaines qu'on ait de cette comète se rapportent à son apparition en 1531; elle repassa depuis à son périhélie en 1607, 1682 et 1759. Les durées de ces trois révolutions sont, comme on voit, très-inégales. La première période, en effet, était de 76 ans et 2 mois à peu près, ou de 27811 jours; la seconde, de 27352 jours, et plus courte, par conséquent, de 459 jours que la précédente; enfin, la dernière, la plus longue des trois, était de 27937 jours. Il serait donc impossible de rien conclure sur les retours futurs de cette comète à son périhélie sans le secours de la théorie, et la détermination des perturbations qu'elle éprouve par l'action des planètes peut seule nous mettre en état de prédire l'instant de sa prochaine apparition.

Il faut, pour cela, commencer, comme nous l'avons vu n° **39**, par déterminer le moyen mouvement diurne de la comète au périhélie de 1759, ce qui exige que l'on calcule les altérations qu'ont subies les éléments de son orbite, pendant la période de 1682 à 1759. Les seules planètes, dont l'action sur la comète ait pu être sensible dans cette révolution, sont Jupiter, Saturne et Uranus. Les mêmes planètes ont encore influé sur son mouvement dans la révolution subséquente; mais dans l'année 1759, la comète s'étant beaucoup approchée de la Terre, il est devenu indispensable d'avoir égard à cette nouvelle planète dans le calcul des perturbations, et l'on verra, en effet, qu'il en résulte une diminution de plusieurs jours dans la durée de la période que nous nous proposons de déterminer. Nous n'aurons donc à nous occuper, dans ce qui va suivre, que de l'action perturbatrice de ces quatre planètes : les calculs qui en résultent exigent des développements très-étendus; je me bornerai ici à indiquer la marche de ces calculs, et je renverrai pour les détails au Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences en 1828 (*) et qui a été couronné par cette Académie qui avait proposé la question *de la détermination des perturbations des comètes*, pour sujet du grand prix de mathématiques de l'année 1829. Je n'ai apporté d'autre changement à ce vaste travail, publié six ans avant le retour de la comète en 1835, que de faire subir aux résultats qu'il renferme des corrections correspondantes à celles qu'ont éprouvées dans ces derniers temps les valeurs des masses de Jupiter et de Saturne. Ces corrections ont eu pour effet de rapprocher beaucoup les résultats de la théorie de ceux de l'observation.

42. Dans le calcul des perturbations qui se rapportent à la révolution de 1682 à 1759, nous regarderons l'orbite de la comète comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée observée de cette révolution, que nous supposerons de 27937 jours. En nommant donc $2a$ cet axe et N le moyen mouvement diurne qui lui correspond, on aura $N = \frac{360^\circ}{27937}$ et l'on en déduira la valeur de a exprimée en parties de la distance moyenne du Soleil à la Terre, au moyen de l'équation $a = N^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{365,25638}{360^\circ}\right)^{-\frac{2}{3}}$, on trouvera ainsi :

$$N = 46'',39009, \quad a = 18,0186.$$

Les autres éléments de l'orbite qui se rapportent

(*) Voir *Savants étrangers*, tome VI, et la *Connaissance des Temps* pour 1838.

tant au périhélie de 1682 qu'à celui de 1759, résultent directement des observations faites à ces deux époques. Nous supposerons, d'après les réductions de ces observations faites avec grand soin par Burchkardt (*) :

En 1682.

Instant du passage au périhélie 1682.	15$^{sept.}$,24002 (**)
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe.	0,967676
Lieu du périhélie.	302° 3′ 45″
Longitude du nœud.	51.17.10
Inclinaison de l'orbite.	17.48

Sens du mouvement, rétrograde.

En 1759.

Instant du passage au périhélie 1759.	13$^{mars.}$,08976
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe.	0,967557
Lieu du périhélie.	303° 10′ 1″
Longitude du nœud ascendant.	53.50.11
Inclinaison de l'orbite.	17.37.12

Sens du mouvement, rétrograde.

Pour apporter dans les calculs le plus de précision possible, il sera bon d'employer, dans la première moitié de la révolution de 1682 à 1759, les éléments de l'orbite relatifs au périhélie de 1682, et dans la seconde les éléments qui se rapportent au périhélie de 1759.

(*) *Connaissance des Temps* pour 1819.

(**) Le temps est partout exprimé en jours moyens comptés de minuit au méridien de Paris.

Il ne s'agit plus maintenant, pour déterminer le prochain retour au périhélie de la comète de 1759, que de substituer, dans les formules du chapitre troisième, les valeurs numériques précédentes, à la place des quantités qui les représentent, ainsi que celles qui se rapportent uniquement aux planètes perturbatrices, et qui seront données par les Tables astronomiques. Lorsqu'on aura ainsi déterminé les altérations différentielles qu'éprouve chacun des éléments de l'orbite par l'action des forces perturbatrices, on aura, par la formule (P), les altérations totales de ces éléments, correspondantes à une variation donnée de l'anomalie excentrique. Dans l'application de cette formule, on fera varier l'anomalie excentrique de degré en degré pour Jupiter; mais comme les autres planètes que nous considérons exercent sur la comète des actions beaucoup moins sensibles, nous écarterons davantage, dans ce cas, les ordonnées de la courbe parabolique, et nous ferons varier cette anomalie de deux degrés en deux degrés pour Saturne, et de cinq degrés en cinq degrés pour Uranus (*).

(*) On pourrait faciliter encore le calcul des perturbations en appliquant à la partie supérieure de l'orbite la méthode d'approximation exposée n° 56; mais nous avons préféré, dans l'espoir d'obtenir une détermination plus exacte de l'instant du passage au périhélie, 1835, employer la méthode des *quadratures paraboliques* au calcul des variations des éléments pendant les deux révolutions successives de la comète que nous avons eues à considérer. On trouvera, au reste, une application des formules dont il s'agit dans un Mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps* pour 1838.

43. Pour donner un exemple de ces calculs, proposons-nous de déterminer les altérations des divers éléments de l'orbite résultant de l'action de Jupiter sur la comète pendant la période de 1682 à 1759, et correspondant à un arc donné de l'anomalie excentrique.

Par les Tables de Bouvard, on aura

Anomalie moyenne de ♃ au moment du périhélie de la comète en 1682..	111° 16′ 1″
Lieu du périhélie..................	9. 16.45
Longitude du nœud..................	97. 18.39
Inclinaison de l'orbite............	1. 19

En considérant le triangle intercepté sur la sphère céleste, par l'écliptique et les orbites de Jupiter et de la comète, on trouvera aisément, d'après les données précédentes,

Lieu du nœud ascend. de ♃ sur l'orbite de la comète.....	54° 14′
Lieu du nœud ascend. de la comète sur l'orbite de ♃.....	54. 6
Inclinaison mutuelle des deux orbites................	18. 44

d'où l'on conclura d'abord

$$\lambda \ldots\ 112^\circ 10', \quad \gamma \ldots\ 18^\circ 44'.$$

Si de la longitude du périhélie de Jupiter, on retranche l'angle 54° 6′, la différence sera la quantité qu'il faut ajouter aux anomalies vraies de cette planète, comptées du périhélie, pour avoir sa longitude comptée du nœud ascendant de son orbite sur celle de la comète; cet angle sera donc ainsi de $315^\circ\ 11'$.

Cela posé, on aura pour déterminer les coordonnées de la comète rapportées au plan et au grand axe de son orbite, ainsi que le temps écoulé depuis le passage au périhélie de 1682, les formules suivantes :

$$x = 18{,}01861 \cos u - 17{,}43532, \quad y = 4{,}54494 \sin u,$$
$$t = (4446^{j}{,}3071)\,(u - 0{,}967676 \sin u);$$

et pour déterminer les cordonnées de la planète perturbatrice, rapportées au même plan et au même axe, on aura

$$\begin{aligned} x' &= -\,(0{,}37730)\, r' \cos v' - (0{,}87703)\, r' \sin v', \\ y' &= -\,(0{,}92609)\, r' \cos v' + (0{,}35732)\, r' \sin v', \\ z' &= (0{,}32116)\, r' \sin v'. \end{aligned}$$

Ces formules donneront les valeurs des coordonnées x, y, x', y', z' et du temps t correspondant à un arc quelconque d'anomalie excentrique compris entre 0 et 180°. Supposons qu'il s'agisse de déterminer ces valeurs relatives à l'époque qui répond au neuvième degré de cette anomalie, en faisant $u = 9^\circ$, dans les premières formules, on aura d'abord

$$x = 0{,}36059, \quad y = 0{,}71099, \quad t = 25^{j}{,}35.$$

On calculera ensuite le lieu de la planète relativement à la même époque.

On aura, par les Tables de Bouvard, en n'ayant égard qu'à l'équation du centre et à la variation séculaire,

Anomalie moy. ♃ au périh....	111°16′	
Mouv. m. p. 9° d'ano. exc...	2. 6	
Ano. moy. ♃ pour l'ins. don.	113.22	r'... 5,32198
Équation du centre.........	4.44	
Anomalie vraie de ♃........	118. 6	
Const. à ajout. aux anom. vr..	315.11	
v'....	73.17	

Si dans les formules qui déterminent les coordonnées de la planète perturbatrice, on substitue ces valeurs, on trouvera

$$x' = -5{,}04785, \quad y' = 0{,}40359, \quad z' = 1{,}63699.$$

A l'aide de ces valeurs et de celles de x et y, on formera aisément les suivantes :

$$\rho = 5{,}65908, \quad \mathrm{X} = 0{,}00365, \quad \mathrm{Y} = -0{,}00437.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à la place de x, y, X et Y leurs valeurs numériques dans les formules du n° **32**, après les avoir réduites en nombres. Reprenons d'abord la formule (7) qui détermine l'altération du moyen mouvement, m' désignant ici la masse de Jupiter; on aura, d'après les dernières recherches de M. Airy,

$$m' = \frac{1}{1048{,}69},$$

et cette formule, en y substituant 1° ou 0,017453 à la place de du, et multipliant tous les termes par

$\frac{360 \times 3600''}{365,25638}$ pour les réduire en secondes, deviendra

$$dn = (0'',75200) \sin u \mathrm{X} - (0'',18965) \cos u \mathrm{Y}.$$

Si l'on fait les mêmes substitutions numériques dans les formules qui donnent les altérations du périhélie et de l'époque, et qu'on réduise en secondes tous les termes, on aura

$$d\omega = (14'',06554)\, y(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) - (16'',12074)\, r\mathrm{X},$$
$$d\varepsilon - d\omega = -(0,25219) d\omega - (6'',86571)\, r(x\mathrm{X} + y\mathrm{Y}).$$

Au moyen de ces formules, en faisant $u = 9^\circ$, on trouve

$$dn = +\,0'',00125939, \qquad tdn = +\,0'',0319886,$$
$$d\omega = -\,0\ ,0895356 \qquad d\varepsilon - d\omega = +\,0\ ,0324884.$$

44. On pourra calculer, de cette manière, les valeurs successives de dn, $d\omega$, $d\varepsilon$, depuis 0 jusqu'à 180 degrés d'anomalie excentrique ; en partant ensuite des éléments de 1759, et faisant u négatif, on calculera les mêmes valeurs depuis $u = 0^\circ$ jusqu'à $u = -179^\circ$; on répétera la même suite d'opérations par rapport aux deux autres planètes dont on considère l'action pendant la première révolution, en supposant pour les valeurs des masses m'' et m''' de Saturne et d'Uranus,

$$m'' = \frac{1}{3500,2}, \quad m''' = \frac{1}{17918}.$$

On substituera ensuite ces quantités dans la formule (P), et des résultats ainsi obtenus on formera le tableau suivant :

Résultats de l'intégration par quadratures des altérations différentielles du moyen mouvement, du périhélie, et de l'anomalie moyenne, présentant les altérations totales de ces éléments, depuis 1682 jusqu'à 1759.

PLANÈTES	$\int dn$	$\mathrm{T}\int dn$	$\int t\,dn$	$\int dt \int dn$	$\int d\varpi$	$\int d\varepsilon - \int d\varpi$	$\int d\zeta$
♃	$+0'',298444$	$+8337'',63$	$-5540'',21$	$+13877'',84$	$-262'',62$	$+2134'',05$	$+16011'',89$
♄	$+0,028546$	$+\ 797,49$	$+\ 743,05$	$+\ \ 54,44$	$-\ 97,06$	$+\ 346,06$	$+\ \ 400,50$
♅	$+0,013958$	$+\ 389,94$	$+\ 149,89$	$+\ \ 240,05$	$-\ 11,03$	$+\ 102,05$	$+\ \ 342,10$
Total..	$+0,340948$	$+9525,06$	$-4647,27$	$+14172,33$	$-370,71$	$+2582,16$	$+16754,49$

A l'aide de ces valeurs, il est facile de déterminer le moyen mouvement diurne de la comète à l'instant du passage au périhélie de 1759. En effet, si dans l'équation

$$\zeta = \mathrm{N}t + \int d\zeta,$$

on suppose

$$\zeta = 1296000'',\ t = \mathrm{T} = 27937^{\mathrm{j}},\ \int d\zeta = +\,16754'',49,$$

on aura

$$\mathrm{N} = 45'',79038.$$

C'est la valeur du moyen mouvement diurne au périhélie de 1682 ; en nommant N′ cette valeur au périhélie de 1759, on aura

$$\mathrm{N}' = \mathrm{N} + \int dn = 46'',13133.$$

De là il est aisé de conclure les valeurs des demi-grands axes a et a' qui répondent aux mêmes époques; on trouvera ainsi

$$a = 18{,}17560, \quad a' = 18{,}08593.$$

45. Avec cette valeur de a, on pourrait recommencer le calcul des altérations des éléments de l'orbite pendant la période de 1682 à 1759, et l'on obtiendrait sans doute des résultats plus exacts encore que les précédents; mais la longueur de ces opérations, et le peu d'effet qu'on en doit attendre, font qu'il y a bien peu de calculateurs qui soient tentés de l'entreprendre. La valeur de a', jointe aux valeurs des autres éléments de l'orbite relatifs au périhélie de 1759, fournit toutes les données nécessaires à la détermination des perturbations de la comète pendant la période qui s'écoulera de 1759 jusqu'à sa prochaine apparition.

La comète s'étant beaucoup approchée de la Terre pendant l'année 1759, elle en a éprouvé des perturbations considérables auxquelles il était indispensable d'avoir égard. L'action de la Terre sur la comète, antérieurement au passage au périhélie de 1759, n'a pu avoir aucune influence sur la durée de la révolution suivante, mais cette action est devenue très-sensible après le passage au périhélie, époque à laquelle la comète s'est trouvée dans sa plus grande proximité de la Terre, et elle aura pour effet de diminuer de *douze* jours environ la durée de la révolution actuelle. Les altérations qui en résultent, sont surtout sensibles sur les valeurs du grand axe et du moyen mouvement diurne, nous les avons calculées avec le plus grand soin, en resserrant même les ordonnées de la courbe parabolique pendant tout le temps où la comète s'est trouvée très-voisine de la Terre.

En déterminant ensuite les altérations des éléments de l'orbite, dues à l'action des planètes perturbatrices Jupiter, Saturne et Uranus, pendant la période commencée en 1759, par des opérations semblables à celles qui ont servi à calculer leurs valeurs pendant la période de 1682 à 1759, et en rectifiant, pour plus d'exactitude, l'ellipse de la comète, de 30 degrés en 30 degrés d'anomalie excentrique, pendant le dernier quart de la révolution, nous avons obtenu les résultats suivants :

Résultats de l'intégration par des quadratures des altérations différentielles du moyen mouvement, du périhélie et de l'anomalie moyenne, présentant les altérations totales de ces éléments depuis 1759 jusqu'au prochain retour de la comète.

PLANÈTES perturbatr.	$\int dn$	$t\int dn$	$\int t dn$	$\int dt \int dn$	$\int d\varpi$	$\int d\varepsilon - \int d\varpi$	$\int d\zeta$
♃	+0″,390178	+10923″,23	+11370″,90	− 447″,67	− 903″,41	+1667″,40	+1219″,73
♄	−0,093061	− 2605,30	− 3823,19	+1217,89	− 84,86	+ 765,80	+1983,69
♁	+0,009408	+ 263,38	+ 151,92	+ 111,46	− 22,94	+ 119,42	+ 230,88
♅	+0,020765	+ 581,32	+ 1,45	+ 579,87	+ 1,19	+ 1,56	+ 581,43
Alter. tot.	+0,327290	+ 9162,63	+ 7701,08	+1461,55	−1010,02	+2554,18	+4015,73

46. Il est facile maintenant de fixer l'époque du prochain retour de la comète à son périhélie; en effet, si, dans l'équation

$$\zeta = N't + \int d\zeta,$$

on suppose

$\zeta=360^\circ$, $t=T'$, $N'=46'',13133$ et $\int d\zeta=+4015'',73$,

on aura

$$T'=\frac{360^\circ-4015'',73}{N'}=28093^j,69-87^j,05=28006^j,64.$$

Ainsi l'intervalle compris entre le passage au périhélie en 1759 et le passage suivant sera de $28006^j,64$, ce qui, à compter du 13,09 mars 1759, donne le 16,73 novembre 1835 pour l'instant de ce passage (*).

(*) Depuis que les calculs précédents ont été effectués, la comète est revenue à son périhélie, et les observateurs les plus habiles ont fixé l'instant de ce passage au 16,45 novembre 1835. Il n'y aurait donc, en définitive, qu'une différence de *six heures* à peu près entre l'époque assignée d'avance par la théorie et l'instant véritable de ce passage. On ne pouvait guère espérer un résultat plus satisfaisant, surtout si l'on considère le grand nombre de quantités négligées dans les méthodes d'approximation et l'incertitude qui peut rester encore sur quelques-unes des données employées dans le calcul.

Voici, du reste, le tableau des éléments de la comète déduits par M. Rosemberger des observations faites pendant la durée de la dernière apparition en 1835.

Passage au périh. novem.	$16^j,4454$	long. du pér.	$304^\circ35'49''$
Demi-grand axe supposé.	17, 98791	*id.* du nœud.	55. 9.47
Excentricité...........	0, 967389	inclinaison...	17.45.17

Sens du mouvement, rétrograde.

La plus grande différence entre ces valeurs et celles qui résultent de la théorie, se rapporte à l'inclinaison de l'orbite sur

Si l'on compare la durée de la révolution que nous venons d'examiner, à celle de la révolution qui l'a précédée, on voit qu'elle la surpasse de 70 jours à peu près; en sorte que la révolution actuelle de la comète est la plus longue de celles qui ont été observées depuis 1531.

47. Déterminons maintenant les éléments de l'orbite à l'époque du passage de la comète au périhélie en 1835.

En désignant par N'' le moyen mouvement diurne à cette époque et par a'' le demi-grand axe qui lui correspond, on aura d'abord

$$N'' = N' + \int dn = 46'',45862, \quad a'' = 18,00091.$$

En calculant ensuite, d'après les principes précédents, les altérations de l'excentricité, de l'inclinaison et du nœud, dues à l'action des forces perturbatrices pendant la période de 1759 à 1835, on forme le tableau suivant :

---

l'écliptique, ce qui peut tenir simplement à ce que l'inclinaison que nous avons adoptée pour l'époque de 1759 était un peu trop faible; car la précision des éléments qui servent de base au calcul, peu importante quand il ne s'agit que de fixer l'instant du passage au périhélie, le devient beaucoup quand il s'agit en même temps de déterminer les éléments de son orbite à cette époque. L'accord des autres éléments est presque complet, ce qui prouve suffisamment la précision de la méthode et l'exactitude des calculs. (*Note écrite en* 1853.)

Altérations de l'excentricité et des quantités qui déterminent la position de l'orbite, pendant la période de 1759 à 1835.

PLANÈTES perturbatrices.	$\int de$	$\int dp$	$\int dq$
♃	− 0,00035974	− 0,00122610	− 0,00164973
♄	+ 0,00010786	− 0,00009947	− 0,00031204
♅	− 0,00002652	− 0,00000766	+ 0,00002672
Altérations totales.	− 0,00027840	− 0,00133323	− 0,00193505

En partant donc des éléments relatifs au périhélie de 1759 qui ont été rapportés n° **45**, et en nommant e' le rapport de l'excentricité au demi-grand axe en 1835, on aura

$$e' = e + \int de = 0{,}9672786,$$

et la distance périhélie sera 0,58901, à la même époque.

Les deux équations

$$\text{tang}\,\varphi \sin\alpha = p, \quad \text{tang}\,\varphi \cos\alpha = q,$$

donneront ensuite, en observant que $\sin\alpha$ doit être de même signe que p, et $\cos\alpha$ de même signe que q,

$$\varphi = 8'4'', \quad \alpha = 214^\circ 34'.$$

Les angles φ et α représentent l'inclinaison de l'orbite vraie de la comète et la longitude de son nœud ascendant sur le plan de son orbite en 1759; pour en conclure la position de cette orbite, par rapport à l'écliptique, considérons le petit triangle formé par les plans de l'écliptique, de l'orbite de la comète en 1759, et de son orbite vraie; désignons par A, B, $180^\circ - C$ les trois angles de ce triangle, et par a, b, c les côtés opposés à ces angles, C étant l'inclinaison de l'orbite vraie de la comète à l'écliptique et b l'arc compris sur ce plan, entre cette même orbite et l'orbite fixe de 1759. On aura dans ce triangle

$$\cos C = \cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B.$$

L'angle B représentant, d'apres l'hypothèse, l'inclinaison de l'orbite vraie sur l'orbite fixe, B sera une très-petite quantité, et l'on aura, à très-peu près,

$$\cos C = \cos(A + B \cos c),$$

et, par conséquent,

$$C = A + B \cos c;$$

on aura ensuite

$$\sin b = \frac{B \sin c}{\sin C}.$$

Observons maintenant que l'angle α, déterminé précédemment, est supposé compté du périhélie de la comète et dans le sens de son mouvement; la longitude du nœud ascendant de l'orbite vraie de la comète sur son orbite fixe, comptée du même point dans l'ordre des signes, sera donc $144^\circ 26'$. Si l'on ajoute cet arc à la longitude du périhélie en 1759 et qu'on en retranche la longitude du nœud à la même époque, l'angle qui en résultera sera la longitude du nœud ascendant de l'orbite vraie de la comète sur son orbite fixe, comptée du nœud ascendant de cette dernière orbite sur l'écliptique, angle que nous avons désigné par c; on aura ainsi

$$A = 17^\circ 37' 12'', \quad c = 34^\circ 45' 50'', \quad B = 8' 4'';$$

d'où l'on conclura :

Inclinaison de l'orbite sur l'écliptique en 1835, ou C. . . . . $17^\circ 43' 50''$;
Mouvement direct du nœud ascendant sur l'écliptique, ou b . . . . $15'\ 7''$.

En ajoutant à l'altération du nœud $1^\circ 4' 5''$, pour la précession des équinoxes dans l'intervalle de 76 ans, on aura sa variation par rapport à l'équinoxe mobile.

Nous avons trouvé précédemment, pour la variation de la longitude du périhélie,

$$\int d\omega = -1010'',02.$$

Cet angle est compté, comme l'angle α, du périhélie de la comète et en sens inverse des signes; la longitude du périhélie, comptée du nœud ascendant de l'orbite, est donc augmentée de $1010'',02$ par le mouvement propre de ce point pendant la période de 1759 à 1835; mais dans cet intervalle la ligne des nœuds se rapproche du périhélie, et la même longitude est diminuée du mouvement du nœud ascendant sur l'écliptique projeté sur l'orbite primitive de la comète.

En désignant donc par g la variation totale du périhélie par rapport au nœud et en employant les dénominations précédentes, on aura

$$g = -\int d\omega - b\cos A;$$

d'où l'on conclura :

Distance du nœud ascendant au périhélie	$249^\circ 22' 15''$.

Au moyen des valeurs précédentes et en partant des éléments de la comète relatifs au périhélie de 1759, on a formé le tableau suivant :

Éléments de la comète en 1835.

Instant du passage au périhélie (novembre)	$16^j,73$
Demi-grand axe	18, 00091
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe	0, 9672786
Lieu du périhélie sur l'orbite	$304^\circ 31' 38''$
Longitude du nœud ascendant	55. 9.23
Inclinaison	17. 43.50

Sens du mouvement, rétrograde.

Détermination des perturbations de la comète périodique de $3^{ans},3$.

48. Cette comète paraît avoir été aperçue pour la première fois dans les années 1786 et 1795 ; mais les observations faites à ces deux époques ont été ou trop inexactes ou trop peu nombreuses pour en conclure l'orbite. Nous partirons donc ici des observations relatives à 1805, et nous examinerons les perturbations de la comète depuis son passage au périhélie en 1805 jusqu'à l'époque actuelle.

Dans la première période, c'est-à-dire dans l'intervalle écoulé entre les passages au périhélie en 1805 et en 1819, on peut regarder l'orbite comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée moyenne des quatre révolutions que la comète a accomplies dans cet intervalle que nous supposerons de $1203^j,687$. On aura ainsi, en nommant a le demi-grand axe de l'orbite et N le moyen mouvement diurne, au périhélie de 1805,

$$N = \frac{360^\circ}{1203,687} = 1076'',6925, \quad a = 2,214507.$$

Dans le calcul des perturbations de 1819 à 1822, on peut regarder l'orbite comme une ellipse dont le grand axe répond à la durée observée de cette révolution, qui est de $1212^j,742$, et l'on aura pour cette période

$$N' = \frac{360^\circ}{1212,742} = 1068'',6525, \quad a' = 2,225600.$$

Nous ferons observer, toutefois, qu'il serait plus exact d'employer à la place de ces valeurs, celles du moyen mouvement et du grand axe résultant du calcul des perturbations précédentes.

Le tableau suivant présente les autres éléments des orbites elliptiques conclues des observations de 1805 et de 1819:

PASSAGE au périhélie.	EXCENTRICITÉ	LONGITUDE du périhélie.	LONGITUDE du nœud.	INCLINAISON de l'orbite.
1805, novemb. 22,006	0,8461753	156°.47′.24″	334°.20′.11″	13°.33′.30″
1819, janvier. 27,752	0,8490883	157. 5.53	334.43.37	13.38.42

Les valeurs que renferme ce tableau, jointes à celles qui dépendent des planètes perturbatrices, et qu'on trouvera dans les Tables, fournissent toutes les données nécessaires pour déterminer les perturbations du mouvement de la comète, de 1805 jusqu'à 1822. On partagera, à cet effet, comme précédemment, la courbe décrite par la comète en parties pour chacune desquelles on déterminera l'effet des forces perturbatrices, sur chacun des éléments de son orbite, et l'on aura ensuite par la formule (P), n° **34**, les altérations totales de ces éléments, correspondantes à l'arc d'anomalie excentrique que l'on aura considéré.

Dans l'application de cette formule à la comète dont il s'agit, il suffira de faire varier l'anomalie excentrique de 10° en 10°; dans le cas cependant où la planète perturbatrice s'approchera beaucoup de la comète, comme cela est arrivé dans la révolution de 1819 à 1822, relativement à Jupiter, il sera bon de resserrer ces intervalles et de faire varier l'anomalie excentrique de 5° en 5°.

Jupiter, la Terre et Vénus sont les seules planètes qui aient pu avoir quelque influence sur le mouvement de la comète pendant la période de 1805 à 1822; encore pourra-t-on se contenter de considérer l'action de ces deux dernières planètes dans la partie seulement de cette période où la proximité de la comète a rendu leur influence plus sensible.

49. Le tableau suivant présente les résultats du calcul que nous venons d'indiquer :

Altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne pendant la période de 1805 *à* 1822.

PÉRIODES.	INTERVALLES observés.	PLANÈTES perturbatrices.	$\int dn$	$\int d\zeta$
1805 à 1819..	$4814^j,746$	♃..........	$+ 3'',5889$	$+15859'',38$
		♀ en 1809	$- 0,1313$	$- 476,76$
		en 1818	$- 0,1105$	$- 4,97$
		♁ en 1809	$- 0,0178$	$+ 64,01$
		en 1818	$+ 0,0735$	$- 5,14$
		TOTAL.....	$+ 3,2914$	$+15436,52$
1819 à 1822..	$1212^j,742$	♃..........	$- 7,4349$	$- 9939,38$
		♀ en 1819	$+ 0,0716$	$+ 81,26$
		TOTAL.....	$- 7,3633$	$- 9858,12$

Désignons respectivement par n, n', n'' le moyen mouvement diurne de la comète aux périhélies de 1805, 1819 et 1822, et par T et T' les intervalles de temps qui séparent ses trois passages en ces points. Par le calcul des perturbations de la période de 1805 à 1819, on aura

$$n = \frac{360^\circ \times 4 - 15436'',52}{\mathrm{T}} = 1076'',6925 - 3'',2061 = 1073'',4864,$$

d'où l'on conclura

$$n' = 1073'',4864 + 3'',2914 = 1076'',7778,$$
$$n'' = 1073'',4864 + 3'',2914 - 7'',3633 = 1069'',4145.$$

Par la période de 1819 à 1822, on aura

$$n' = \frac{360^\circ + 9858'',12}{\mathrm{T}'} = 1068'',6525 + 8'',1288 = 1076'',7813,$$
$$n'' = 1076'',7813 - 7'',3633 = 1069'',4180,$$
$$n = 1076'',7813 - 3'',2914 = 1073'',4899.$$

Si l'on réunit les deux périodes précédentes, en remarquant qu'au périhélie de 1819 on avait $n' = n + 3'',2914$, on trouve d'abord pour l'altération de l'anomalie moyenne, dans l'intervalle qui sépare les périhélies de 1805 et 1822,

$$15436'',52 + 3'',2914\,\mathrm{T}' - 9858'',12 = 9570'',02,$$

et l'on en conclura

$$n = \frac{360^\circ \times 5 - 9570'',02}{\mathrm{T} + \mathrm{T}'} = 1075'',0745 - 1'',5877 = 1073'',4868,$$
$$n' = 1073'',4868 + 3'',2914 = 1076'',7782,$$
$$n'' = 1073'',4868 + 3'',2914 - 7'',3633 = 1069'',4149.$$

En rassemblant les valeurs précédentes de chacune des quantités n, n', n'', conclues des trois passages observés, on aura

Périodes.	n	n'	n''
1805 à 1819	1073″,4864	1076″,7778	1069″,4145
1819 à 1822	1073, 4899	1076, 7813	1069, 4180
1805 à 1822	1073, 4868	1076, 7782	1069, 4149.

Les différences 0″,0035, 0″,0031 et 0″,0004 de ces valeurs, sont de l'ordre des quantités négligées.

Au moyen des résultats précédents, concluons des passages observés en 1805 et 1819, l'époque du retour de la comète en 1822. On a, relativement à cette période, $n' = 1076'',7778$, par conséquent,

$$T' = \frac{360^\circ + 9858'',12}{n'} = 1203^j,591 + 9^j,155 = 1212^j,746.$$

Les observations ont donné $T' = 1212^j,742$; on ne pouvait attendre de la théorie une plus grande précision.

Les perturbations de la comète, pendant la période de 1819 à 1822, ont été, comme on voit, très-considérables, puisqu'elles ont retardé de neuf jours son passage au périhélie. M. Encke est le premier parvenu à ce résultat, qui l'a mis à même de fixer à l'avance l'époque du retour de la comète à son périhélie en 1822. Il annonça en même temps que, d'après ses déclinaisons, elle ne serait pas visible en Europe, et que, pour l'observer, il faudrait se transporter dans l'hémisphère austral. La comète, en effet, revint au périhélie en mai 1822, et c'est d'après les observations faites à Paramatta, dans la Nouvelle-Hollande, qu'on a conclu les éléments de son orbite à cette époque.

50. En partant de ces éléments, que l'on trouvera plus bas, nous avons calculé les altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne, pendant les deux périodes suivantes. Dans cet intervalle, la comète n'éprouve que de très-légères perturbations, et l'on doit, par conséquent, attendre d'autant plus de précision des résultats qui s'y rapportent.

Altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne de 1822 à 1829.

PÉRIODES.	INTERVALLES observés.	PLANÈTES perturbatrices.	$\int dn$	$\int d\zeta$
1822 à 1825..	$1211^j,290$	♃........	$+0'',7026$	$+381'',46$
		♁ en 1822	$-0,0494$	$-56,90$
		TOTAL.....	$+0,6532$	$+324,56$
1825 à 1829..	....	♃........	$-0,4390$	$-702,42$
		♄.........	$+0,0256$	$+10,43$
		♁ en 1828	$-0,0986$	$-6,90$
		TOTAL.....	$-0,5120$	$-698,89$

En nommant n''' et n^{IV} les valeurs du moyen mouvement diurne aux périhélies de 1825 et 1829, T'', T''' les durées des révolutions de 1822 à 1825 et de

1825 à 1829, et prenant pour n'' la valeur moyenne 1069",4158, qui résulte de la comparaison des trois périodes calculées précédemment, on aura

$$T'' = \frac{360^\circ - 324'',56}{n''} = 1211^j,8766 - 0^j,3035 = 1211^j,5731.$$

Les observations de M. Valz donnent $T'' = 1211^j,290$. Pour concilier ces deux résultats, il faudrait presque doubler l'altération de l'anomalie moyenne pendant la période que nous considérons, ce qui paraît inadmissible.

Il s'agit maintenant de déterminer l'époque du retour de la comète en 1829. On aura d'abord pour le moyen mouvement diurne au périhélie de 1825,

$$n''' = 1069'',4158 + 0'',6532 = 1070'',0690,$$

et, par conséquent,

$$T''' = \frac{360^\circ + 698'',89}{n'''} = 1211^j,1364 + 0^j,6531 = 1211^j,7895.$$

Cet intervalle, compté à partir du 16,7836 sept. 1825, époque du passage au périhélie, répond au 10,5731 janvier 1829, qui sera l'instant du prochain retour de la comète en ce point.

On aura pour cette époque

$$n^{\text{IV}} = 1070'',0690 - 0'',5120 = 1069'',5570.$$

Quant aux autres éléments de l'orbite, le tableau suivant contient les altérations qu'ils éprouvent dans les quatre périodes que nous venons de parcourir :

Altérations de l'excentricité, du périhélie, du nœud et de l'inclinaison de l'orbite de 1805 à 1829.

PÉRIODES.	ALTÉRATION de l'excentricité.	ALTÉRATION de la longitude du périhélie.	ALTÉRATION de la longitude du nœud.	ALTÉRATION de l'inclinaison de l'orbite.
1805 à 1819	+ 0,0019950	+ 5′.10″	— 1′.54″	+ 2′.49″
1819 à 1822	— 0,0039038	+ 9.41	—10.50	— 16. 8
1822 à 1825	+ 0,0004305	+ 0.15	— 0.10	+ 1. 4
1825 à 1829	— 0,0002920	+ 1.19	— 0.39	— 0.55

Les altérations des longitudes du périhélie et du nœud sont comptées d'une équinoxe fixe; si on leur ajoute 11′ 0″ pour la première période et 2′ 46″ pour les autres, on aura leurs valeurs par rapport à l'équinoxe mobile.

En partant des éléments calculés d'après les observations de Paramatta, on a formé, à l'aide des résultats qui précèdent, le tableau suivant qui présente les éléments elliptiques qui répondent aux cinq passages au périhélie, observés dans l'intervalle de 1805 à 1829

PASSAGE au périhélie.	MOYEN mouvement diurne.	DEMI-grand axe.	EXCENTRICITÉ	LIEU du périhélie.	LIEU du nœud.	INCLI-NAISON.
1805, nov. 22,006	1073″,4877	2,218912	0,8464567	156°.43′. 0″	334°.18′.29″	13°.35′.44″
1819, janv. 27,752	1076,7791	2,214388	0,8484517	156.59. 1	334.27.36	13.38.33
1822, mai. 24,494	1069,4158	2,224542	0,8445479	157.11.29	334.19.32	13.22.25
1825, sept. 16,784	1070,0690	2,223636	0,8449784	157.14.30	334.22. 8	13.23.29
1829, janv. 10,573	1069,5570	2,224346	0,8446862	157.18.35	334.24.15	13.22.34

Si l'on compare les éléments relatifs aux périhélies de 1805 et 1819, à ceux qui résultent des observations faites à ces deux époques, on voit qu'ils s'accordent d'une manière satisfaisante, les plus grands écarts étant d'une minute sur la longitude du périhélie, de cinq sur celle du nœud, et de deux sur l'inclinaison de l'orbite. Mais on pourrait juger encore mieux leur précision en calculant, d'après ces éléments, quelques lieux de la comète à diverses époques, que l'on comparerait ensuite à des lieux qui auraient été directement observés.

Comète périodique de 6^ans^,7.

51. Les perturbations de cette comète, depuis sa dernière apparition en 1826, et l'époque de son prochain retour au périhélie, ont été déterminées par M. Damoiseau; nous nous contenterons de rapporter ici les résultats de ses calculs.

M. Gambart a fixé les éléments elliptiques de l'orbite pour les époques de 1806 et de 1826, en supposant la révolution moyenne de la comète dans cet intervalle de 2460^j, ainsi qu'il suit :

	1806.		1826.
Pass. au périh., janv.	$2^j,4807$	mars.	$18^j,9688$
Excentricité.	0,7470093		0,7457842
Lieu du périhélie. . .	$109°51'32''$		$109°32'23''$
Long. du nœud asc. .	251.26. 9		251.15.15
Inclinaison.	13.33.15		13.38.45
Demi-grand axe. . .	3,56705		

En partant de ces éléments, M. Damoiseau a trouvé, pour les altérations du moyen mouvement et de l'anomalie moyenne, pendant la période de 1806 à 1826,

Altér. du moy. mouv.	Altér. de l'anom. moy.
♃ + 1″,4497	+ 0°45′39″,94
♅ + 0, 1811	+ 0.22.10, 72
♄ − 0, 0317	− 0. 2.45, 95
+ 1″,5991	+ 1° 5′ 4″,71.

Si l'on désigne donc par n et n' les moyens mouvements diurnes de la comète aux périhélies de 1806 et de 1826, l'intervalle entre les deux passages étant de 7380^j,4881, on aura

$$n = \frac{360^\circ \times 3 - 1^\circ 5' 4'',71}{7380,4881} = 8'46'',2652,$$

$$n' = 8'46'',2652 + 1'',5991 = 8'47'',8643.$$

En calculant ensuite les altérations des mêmes éléments, pour la période commencée en 1826, le même astronome a trouvé

Altér. du moy. mouv.	Anomalie moy.
♃ + 5″,5745	+ 1°28′50″,94
♅ + 0, 0332	− 0. 0.34, 69
♄ − 0, 0311	− 0. 3.14, 83
+ 5″,5766	+ 1°25′ 1″,42

Soit T l'intervalle de temps inconnu qui s'écoulera entre le passage de la comète à son périhélie en 1806 et son prochain retour au même point de son orbite, et soit n'' le moyen mouvement diurne à cette époque, on aura

$$T = \frac{360^\circ - 1^\circ 25' 1'',42}{8' 47'',8643} = 2455^j,1762 - 9^j,6642 = 2445^j,5120,$$

$$n'' = 8'47'',8643 + 5'',5766 = 8'53'',4409.$$

L'effet des forces perturbatrices diminuera donc de $9^j,6642$ la durée de la révolution actuelle de la comète, et si l'on suppose qu'elle ait passé au périhélie le 18,9688 mars 1826, son prochain retour à ce point aura lieu le 27,4808 novembre 1832, année qui sera remarquable par les réapparitions des deux comètes à courte période de 1819 et de 1826.

Voici le tableau des altérations qu'éprouveront les divers éléments de l'orbite pendant la période actuelle :

Variat.	de la long. du nœud sur l'écl.	$-\ 3^\circ 13' 45''$
	de la longitude du périhélie..	$+\ 5.13$
	de l'inclinaison de l'orbite. .	$-\ 20.\ 2$
	de l'excentricité.	$+\ 0,0047388.$

On voit que l'action des forces perturbatrices est surtout sensible sur le mouvement des nœuds de l'orbite. La grandeur des altérations que subissent les divers éléments de l'orbite pendant cette période, tient à ce que Jupiter s'approchera beaucoup de la comète en mai 1831, et qu'il exercera, pendant quelque temps, sur elle une influence considérable.

En partant des éléments de 1826, rapportés plus haut, on a formé, à l'aide des résultats précédents, le tableau suivant :

Eléments de la comète en 1832.

Passage au périhélie 1832 novembre. . .	27^j,4808
Excentricité.	0,7517481
Lieu du périhélie.	109°56′45″
Longitude du nœud ascendant.	248.12.24
Inclinaison.	13.13.13
Demi-grand axe.	3,53683.

LIVRE QUATRIÈME.

DU MOUVEMENT DE ROTATION DES CORPS CÉLESTES.

Si la figure des corps célestes était celle de la sphère, ils tourneraient uniformément autour d'axes invariables; mais nous avons dit que la force centrifuge, due à leur mouvement de rotation, abaisse leurs pôles et relève leur équateur. Les forces qui les animent ne passant plus par leurs centres de gravité, il en résulte, dans leurs axes et dans leurs vitesses de rotation, des variations qui fixeront spécialement notre attention dans ce livre. Ici la loi de la pesanteur universelle ne se manifeste pas par des effets aussi précis et aussi sensibles que dans le mouvement de translation; elle est subordonnée à la figure du corps sur lequel elle agit, à la matière qui le compose, aux aspérités mêmes qui hérissent sa surface. Son action est difficile à saisir au milieu de tant d'obstacles qui la modifient, tandis que dans le mouvement des centres de gravité des corps célestes autour du Soleil, les effets de toutes ces causes secondaires se perdent dans les espaces immenses qui les séparent, pour ne plus laisser apercevoir que ceux qui dépendent de leur tendance mutuelle les uns vers les autres. Cependant l'influence de cette grande loi de la nature n'en est pas moins admirable dans la question qui va nous occuper;

elle lie entre eux des phénomènes qui sans elle paraîtraient n'avoir aucune analogie. Ainsi, comme nous l'avons dit, les mouvements des axes de rotation des planètes ne sont qu'une conséquence de l'ellipticité de leurs figures, et l'on verra que les rapports qui peuvent exister entre les durées de leurs mouvements de révolution et de leurs mouvements de rotation, les modifient encore d'une manière particulière. La pesanteur universelle, appliquée à cette nouvelle classe de phénomènes, non-seulement explique d'une manière très-simple plusieurs points importants du système du monde que l'observation avait de tout temps révélés aux hommes, mais dont ils avaient jusque-là vainement cherché les causes; elle donne encore le moyen de calculer les lois de ces phénomènes, avantage précieux, parce que, comme ils procèdent avec une extrême lenteur, on ne pourrait les déterminer directement que par des observations séparées par des milliers de siècles. Enfin, la théorie du mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité a pour nous cet intérêt spécial qui s'attache à tout ce qui nous touche de près; elle fournit plusieurs données importantes sur la figure et la nature du globe terrestre, et des renseignements précieux sur sa stabilité.

L'analyse que nous allons présenter est générale et peut s'appliquer à tous les corps du système solaire; elle n'est que le développement des considérations exposées dans le chapitre III du livre II, et par lesquelles nous avons ramené à un seul et même principe la détermination de toutes les inégalités planétaires. Malheureusement, dans la question qui nous occupe, les observations sont bien en arrière de la théorie. On conçoit, en effet, combien elles demandent de précision et combien, à la distance où nous sommes des corps célestes, il est difficile de saisir des phénomènes qui se passent pour ainsi dire à leur surface; aussi ce n'est encore que par rapport à la Terre et à la Lune que l'on est parvenu à rendre les observations assez certaines pour les comparer à la théorie. Nous examinerons en particulier les phénomènes relatifs aux mouvements de rotation de ces deux planètes, et ils serviront d'application aux formules générales qui seront développées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE PREMIER.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI DÉTERMINENT LES MOUVEMENTS DES CORPS CÉLESTES AUTOUR DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉ.

1. Reprenons les trois équations (B) que nous avons trouvées n° 5, livre II, pour déterminer le mouvement des corps célestes autour de leurs centres de gravité :

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= S.\left(y\frac{dV'}{dz} - z\frac{dV'}{dy}\right)dm, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= S.\left(z\frac{dV'}{dx} - x\frac{dV'}{dz}\right)dm, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= S.\left(x\frac{dV'}{dy} - y\frac{dV'}{dx}\right)dm. \end{aligned}\right\} (B)$$

Dans ces équations, A, B, C représentent les trois moments d'inertie principaux du corps, respectivement relatifs aux axes des x, des y et des z; en sorte qu'on a

$$A = S.(y^2 + z^2)\,dm, \quad B = S.(x^2 + z^2)\,dm, \quad C = S.(x^2 + y^2)\,dm.$$

Les trois quantités p, q, r déterminent à chaque instant la position de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes principaux, et la vitesse de rotation autour de cet axe; en sorte que si l'on désigne par α, β, γ, les trois angles que forme respectivement l'axe instantané avec les axes des x, des y et des z, on a

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \cos6 = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

et $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ exprime la vitesse de rotation autour du même axe.

Enfin V′ représente la somme des masses des corps agissants du système, divisées respectivement par leur distance à l'élément dm du corps attiré ; le signe intégral S se rapportant au même élément et aux quantités qui varient avec lui, et devant être étendu à la masse entière du corps attiré.

Les trois équations (B) suffisent pour déterminer à chaque instant les mouvements du corps m par rapport aux trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité; mais pour connaître sa position absolue dans l'espace, il faut déterminer encore la position de ces axes mobiles par rapport à trois axes fixes, ce qui exige l'intégration des trois nouvelles équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d\varphi - \cos\theta\, d\psi &= r dt, \\ d\theta &= \sin\varphi\, q dt - \cos\varphi\, p dt, \\ \sin\theta\, d\psi &= \cos\varphi\, q dt + \sin\varphi\, p dt. \end{aligned}\right\} (a)$$

Dans ces équations, θ représente l'inclinaison du plan des xy sur un plan fixe, ψ est l'angle que forme l'intersection de ces deux plans avec une ligne fixe menée dans le second, et φ l'angle compris entre cette intersection et l'axe des x. Ainsi les angles θ et ψ déterminent la position du plan des xy, que, pour abréger, nous appellerons désormais l'équateur du corps, et l'angle φ qui est supposé compté en sens inverse de l'angle ψ, fait connaître la position de l'axe des x dans ce plan.

2. On peut faire subir aux seconds membres des équations (B) une transformation qu'il est bon de connaître, parce qu'elle est très-utile dans la théorie du mouvement de rotation des corps célestes.

Supposons, pour simplifier, que l'on ne considère que l'action d'un seul astre L sur le sphéroïde m. Si l'on nomme $x'_{,}$, $y'_{,}$, $z'_{,}$ les coordonnées de cet astre rapportées, ainsi que les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ de l'élément dm, à trois axes fixes menés par le centre de gravité de m, on aura, n° 5, livre II,

$$V' = \frac{L}{\sqrt{(x'_{,} - x_{,})^2 + (y'_{,} - y_{,})^2 + (z'_{,} - z_{,})^2}}.$$

L'action des autres astres L', L'', L''', etc., du système ne ferait qu'ajouter au second membre de cette équation des termes semblables.

La fonction V' sous cette forme ne contient pas les angles φ, ψ, θ, d'où dépend à chaque instant la position des trois axes principaux et qui sont les véritables inconnues du problème dans la théorie du mouvement de rotation, mais on peut les y introduire de la manière suivante.

Rapportons la position de la molécule dm aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du sphéroïde, ou, ce qui revient au même, transformons les trois coordonnées $x_,$, $y_,$, $z_,$, qui se rapportent à des axes fixes, en d'autres coordonnées x, y, z relatives également à des axes rectangulaires, fixes dans l'intérieur du corps, mais mobiles dans l'espace. Par les formules (1) du n° **28**, livre I, on aura

$$x_, = x(\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi)$$
$$+ y(\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) + z \sin\theta \sin\psi,$$

$$y_, = x(\cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi)$$
$$+ y(\cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) + z \sin\theta \cos\psi,$$

$$z_, = - x \sin\theta \sin\varphi - y \sin\theta \cos\varphi + z \cos\theta.$$

Si l'on substitue, dans l'expression de V', à la place des coordonnées $x_,$, $y_,$, $z_,$, leurs valeurs, elle deviendra fonction des angles φ, ψ, θ et des variables x, y, z, x', y', z', et comme ces dernières sont indépendantes de ces angles, en prenant la différentielle de V' par rapport à φ, ψ, θ, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dV'}{d\varphi} d\varphi + \dfrac{dV'}{d\psi} d\psi + \dfrac{dV'}{d\theta} d\theta \\ = \dfrac{dV'}{dx_,} d'x_, + \dfrac{dV'}{dy_,} d'y_, + \dfrac{dV'}{dz_,} d'z_, \end{array}\right\} \quad (m)$$

en désignant par $d'x_,$, $d'y_,$, $d'z_,$ les différentielles des coordonnées $x_,$, $y_,$, $z_,$ prises en ne faisant varier que les angles φ, ψ, θ. En différentiant de cette manière les valeurs de ces trois quantités, on trouve

$$d'x_, = (z_, \sin\theta \cos\psi - y_, \cos\theta)\, d\varphi + y d\psi + z \sin\psi\, d\theta,$$
$$d'y_, = (x_, \cos\theta - z \sin\theta \sin\psi)\, d\varphi - x d\psi + z_, \cos\psi\, d\theta,$$
$$d'z_, = (y_, \sin\theta \sin\psi - x \sin\theta \cos\psi) \sin\theta\, d\varphi + (y_, \cos\psi + x \sin\psi)\, d\theta.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (m) et qu'ensuite on compare, de part et d'autre, dans les deux membres, les coefficients de $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, on trouvera

$$\frac{dV'}{d\varphi} = \sin\theta\cos\psi\left(z_{,}\frac{dV'}{dx_{,}} - x_{,}\frac{dV'}{dz_{,}}\right)$$
$$+ \sin\theta\sin\psi\left(y_{,}\frac{dV'}{dz_{,}} - z_{,}\frac{dV'}{dy_{,}}\right)$$
$$+ \cos\theta\left(x_{,}\frac{dV'}{dy_{,}} - y_{,}\frac{dV'}{dx_{,}}\right),$$
$$\frac{dV'}{d\psi} = \left(y_{,}\frac{dV'}{dx_{,}} - x_{,}\frac{dV'}{dy_{,}}\right),$$
$$\frac{dV'}{d\theta} = \sin\psi\left(z_{,}\frac{dV'}{dx_{,}} - x_{,}\frac{dV'}{dz_{,}}\right)$$
$$+ \cos\psi\left(z_{,}\frac{dV'}{dy_{,}} - y_{,}\frac{dV'}{dz_{,}}\right).$$

Si l'on multiplie par dm les valeurs précédentes, et qu'ensuite on les intègre en observant que l'intégration se rapportant uniquement à la molécule dm et aux quantités qui varient avec elle, on peut faire sortir de dessous le signe intégral les trois variables φ, ψ, θ qui sont indépendantes de la position de la molécule dm dans l'intérieur du corps, on aura par une élimination facile,

$$\mathrm{S}.\left(x_{,}\frac{dV'}{dy_{,}} - y_{,}\frac{dV'}{dx_{,}}\right)dm = -\mathrm{S}.\frac{dV'}{d\psi}dm,$$
$$\mathrm{S}.\left(z_{,}\frac{dV'}{dx_{,}} - x_{,}\frac{dV'}{dz_{,}}\right)dm = \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\mathrm{S}.\left(\frac{dV'}{d\varphi} + \cos\theta\frac{dV'}{d\psi}\right)dm + \sin\psi\,\mathrm{S}.\frac{dV'}{d\theta}dm,$$
$$\mathrm{S}.\left(y_{,}\frac{dV'}{dz_{,}} - z_{,}\frac{dV'}{dy_{,}}\right)dm = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\mathrm{S}.\left(\frac{dV'}{d\varphi}\right) + \cos\theta\frac{dV'}{d\psi}dm - \cos\psi\,\mathrm{S}.\frac{dV'}{d\theta}dm.$$

Les trois premiers membres de ces équations représentent la somme des moments des forces accélératrices qui agissent sur chacun des éléments du sphéroïde, parallèlement aux axes fixes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; ces sommes correspondent aux quantités que nous avons désignées par M″, M′, M dans le n° **29** du livre I. En désignant donc semblablement par N″, N′, N la somme de ces mêmes moments rapportés respectivement aux axes mobiles des x, des y et des z, on aura, par le théorème général sur la composition des moments (n° **30**, livre I),

$$N = \overset{a}{(\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi)}\, M$$
$$+ \overset{a'}{(\cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi)}\, M' - \overset{a''}{\sin\theta \sin\varphi}\, M'',$$

$$N' = \overset{b}{(\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi)}\, M$$
$$+ \overset{b'}{(\cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi)}\, M' - \overset{b''}{\sin\theta \cos\varphi}\, M'',$$

$$N'' = \overset{c}{\sin\theta \sin\psi}\, M + \overset{c'}{\sin\theta \cos\psi}\, M' + \overset{c''}{\cos\theta}\, M''.$$

$a = x'0x$
$a' = x'0y$
$a'' = x'0$

Si l'on substitue dans ces équations pour M, M′, M″ leurs valeurs précédentes, que l'on observe que N, N′, N″ représentent les trois quantités qui forment les seconds membres des équations (B) et que pour abréger on fasse $V = S.V'\,dm$, le signe intégrale S se rapportant, comme précédemment, à la molécule dm, et devant être étendu à la masse entière du corps attiré, ce qui donne, en observant que les trois variables φ, ψ, θ sont indépendantes de cette intégration :

$$\frac{dV}{d\varphi} = S.\left(\frac{dV'}{d\varphi}\right) dm,\quad \frac{dV}{d\psi} = S.\left(\frac{dV'}{d\psi}\right) dm,\quad \frac{dV}{d\theta} = S.\left(\frac{dV'}{d\theta}\right) dm;$$

on trouvera :

$$\text{S.}\left(x\frac{dV'}{dy}-y\frac{dV'}{dx}\right)dm=\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\text{S.}\left(z\frac{dV'}{dx}-x\frac{dV'}{dz}\right)dm=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)+\sin\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$\text{S.}\left(y\frac{dV'}{dz}-z\frac{dV'}{dy}\right)dm=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)-\cos\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right).$$

En substituant ces valeurs dans les équations (B) elles deviendront

$$\left.\begin{aligned}
&\text{A}\frac{dp}{dt}+(\text{C}-\text{B})qr=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)-\cos\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),\\
&\text{B}\frac{dq}{dt}+(\text{A}-\text{C})pr=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)+\sin\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),\\
&\text{C}\frac{dr}{dt}+(\text{B}-\text{A})pq=\frac{dV}{d\varphi}.
\end{aligned}\right\}\ (\text{C})$$

M. Poisson a le premier donné sous cette forme les équations du mouvement de rotation. On verra bientôt les conséquences importantes qu'on en déduit dans la théorie du mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité.

3. Il est superflu d'observer de nouveau que ces équations conserveraient la même forme quel que fût le nombre des corps agissants du système, et quand bien même on voudrait avoir égard à la figure de quelqu'un de ces corps, n° **6**, livre II. Les nouveaux astres que l'on considérera, ne feront en effet (n° **2**) qu'ajouter à la fonction V′ des termes semblables à ceux qu'a introduits l'action de l'astre L, ce qui ne changera rien à l'analyse précédente, et il suffira dans le second cas de remplacer leurs masses L, L′, L″, etc., par les éléments infiniment petits de ces masses. La fonction V sera donnée alors par deux intégrations indépendantes l'une de l'autre, la première relative au sphéroïde attiré, la seconde aux astres qui agissent sur lui. En faisant subir aux coordonnées de la molécule *dm* la transformation précédente, on introduira dans l'expression de V les trois angles φ, ψ, θ, et en prenant les différences partielles $\frac{dV}{d\varphi}$, $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\theta}$ relatives à ces angles, on formera les seconds membres des équations (C).

On doit donc regarder généralement V comme une fonction donnée des angles φ, ψ, θ, qui renferme en outre le temps à raison du mouvement des astres qui agissent sur le sphéroïde; et l'on peut par conséquent supposer cette fonction développée en série de sinus et de cosinus d'angles multiples de φ; on conçoit en effet que si dans la fonction

$$V' = \frac{1}{\sqrt{(x'_{,} - x_{,})^2 + (y'_{,} - y_{,})^2 + (z'_{,} - z_{,})^2}},$$

on substitue pour $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ leurs valeurs n° **2**, on pourra développer V′ en une série semblable; en multipliant ensuite par *dm* chacun des termes de ce développement et en l'intégrant, on aura $V = S . V'dm$; et comme le signe S ne se rapporte qu'à la molécule *dm*, et que les variables φ, ψ, θ sont les mêmes pour toutes les molécules du corps, cette intégration n'altérera pas la forme de la série.

Nous donnerons dans la suite l'expression du développement de V ainsi effectué; il suffira pour le moment d'en concevoir la possibilité. On verra alors que les différences partielles de V sont de l'ordre $\frac{L}{r'^3}$, L étant la masse de l'astre attirant et r' sa distance à la molécule dm; il est facile de juger par là l'influence de l'action des forces perturbatrices.

On peut observer encore que les différences partielles de V sont de l'ordre de l'aplatissement du sphéroïde que l'on considère. Il est évident en effet que, si le corps était sphérique, la fonction V se réduirait à une quantité indépendante des angles φ, ψ, θ; et comme la figure des corps célestes est peu différente de la sphère, cette circonstance contribue encore à rendre très-petits les seconds membres des équations (C). Il suit de là, comme on l'a vu n° **10**, livre II, que l'on doit regarder généralement comme très-petites les forces qui troublent le mouvement de rotation des corps célestes.

4. Si l'on multiplie les équations (C), la première par p, la deuxième par q, la troisième par r, qu'on les ajoute ensuite, et que dans le second membre des équations résultantes on substitue pour p, q et r leurs valeurs tirées des équations (a), on trouvera

$$\mathrm{A}pdp + \mathrm{B}qdq + \mathrm{C}rdr = \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}d\varphi + \frac{d\mathrm{V}}{d\psi}d\psi + \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}d\theta. \quad (b)$$

Le second membre de cette équation serait une différentielle complète, si les astres qui agissent sur le sphéroïde étaient fixes; mais comme ils changent de position, la fonction V contient, outre les variables φ, ψ, θ, les variables x', y', z', qui dépendent du mouvement de ces astres; soit donc

$$\frac{dV}{d\varphi}d\varphi + \frac{dV}{d\psi}d\psi + \frac{dV}{d\theta}d\theta = d'V,$$

la caractéristique d' se rapportant uniquement aux variables φ, ψ, θ, relatives aux déplacements des trois axes principaux du sphéroïde. En intégrant l'équation (b), on aura

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.} + 2.\int d'V. \quad (c)$$

Cette équation renferme le principe des forces vives : nous avons fait voir en effet, n° **33**, livre I^er, que la fonction $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ exprimait la force vive du sphéroïde dont les trois moments d'inertie principaux sont A, B, C, et dont $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ est la vitesse de rotation autour de l'axe instantané.

Si l'on suppose donc

$$T = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2},$$

l'équation (c) devient

$$T - \int d'V = \text{constante}.$$

En appliquant à cette équation l'analyse du n° **13**, livre II, on en tirera trois équations analogues aux équations (c) du même numéro. En effet, p, q, r étant donnés en fonction des variables φ, ψ, θ et de leurs différentielles par les équations (a), on peut regarder T comme une fonction de ces variables, et si pour abréger on fait $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$, $\frac{d\psi}{dt} = \psi'$, $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$, en différentiant

$(py - qx)^2 + (rx - pz)^2 + (qz - ry)^2$

on aura

$$\frac{dT}{d\varphi'}d\varphi' + \frac{dT}{d\psi'}d\psi' + \frac{dT}{d\theta'}d\theta' + \frac{dT}{d\varphi}d\varphi + \frac{dT}{d\psi}d\psi + \frac{dT}{d\theta}d\theta$$
$$= \frac{dT}{dp}dp + \frac{dT}{dq}dq + \frac{dT}{dr}dr.$$

Les équations (a) donnent

$$\left.\begin{aligned} p &= \psi' \sin\theta \sin\varphi - \theta' \cos\varphi, \\ q &= \psi' \sin\theta \cos\varphi + \theta' \sin\varphi, \\ r &= \varphi' - \psi' \cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Si, après avoir différentié ces valeurs, on les substitue dans le second membre de l'équation précédente, et qu'on compare ensuite les coefficients de $d\varphi'$, $d\psi'$, etc., cette équation donnera

$$\frac{dT}{d\varphi'} = \frac{dT}{dr};\ \frac{dT}{d\psi'} = \sin\theta \sin\varphi \frac{dT}{dp} + \sin\theta \cos\varphi \frac{dT}{dq} - \cos\theta \frac{dT}{dr};$$

$$\frac{dT}{d\theta'} = \sin\varphi \frac{dT}{dq} - \cos\varphi \frac{dT}{dp};\quad \frac{dT}{d\varphi} = q\frac{dT}{dp} - p\frac{dT}{dq};$$

$$\frac{dT}{d\psi} = 0;\ \frac{dT}{d\theta} = \left[\cos\theta\left(\sin\varphi \frac{dT}{dp} + \cos\varphi \frac{dT}{dq}\right) + \sin\theta \frac{dT}{dr}\right]\psi'.$$

La valeur précédente de T donne d'ailleurs

$$\frac{dT}{dp} = \mathrm{A}p, \quad \frac{dT}{dq} = \mathrm{B}q, \quad \frac{dT}{dr} = \mathrm{C}r;$$

les équations (c) du n° **13**, livre II, deviennent donc ainsi

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})pq = \frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{d.[\sin\theta\,(\mathrm{A}p\sin\varphi + \mathrm{B}q\cos\varphi) - \cos\theta.\mathrm{C}r]}{dt} = \frac{dV}{d\psi},$$

$$\frac{d.(\mathrm{B}q\sin\varphi - \mathrm{A}p\cos\varphi)}{dt} - [\cos\theta(\mathrm{A}p\sin\varphi + \mathrm{B}q\cos\varphi) + \sin\theta.\mathrm{C}r]\psi' = \frac{dV}{d\theta}.$$

Ces équations sont identiques avec les équations (f) du n° **15**, livre II, lorsqu'on suppose dans celles-ci $V = o$, $\Omega = V$, et qu'on y remplace les différences partielles de la fonction T par leurs valeurs; on peut par conséquent intégrer ces équations par le même procédé, et comme elles ne sont qu'une transformation des équations différentielles (C), il est clair que leurs intégrales conviendront également à ces dernières, et réciproquement. Nous supposerons donc, conformément aux principes de la méthode générale d'intégration développée dans le chap. III du livre II, les équations précédentes, ou, ce qui revient au même, les équations (C) intégrées dans le cas où leurs seconds membres sont nuls, et nous avons vu n° **35**, livre Ier, que cette intégration est toujours possible; nous ferons varier ensuite les constantes introduites par l'intégration, de manière à satisfaire encore aux mêmes équations dans le cas où l'on considère l'action des forces perturbatrices.

Il est bon de remarquer ici que nous avons supposé dans le chapitre cité que Ω, qui représente l'intégrale de la somme des forces perturbatrices multipliées respectivement par l'élément de leur direction, est en effet une fonction toujours intégrable; mais cette condition, qui n'est remplie ni dans la question du mouvement de translation, ni dans celle du mouvement de rotation des corps célestes, n'est nullement nécessaire et ne doit limiter en rien la généralité de cette analyse. Il suffit en effet, pour son exactitude, que les différences partielles de la fonction Ω, qui représentent les forces perturbatrices, soient une fonction finie des variables φ, ψ, θ, puisque ces différences partielles entrent seules dans les formules des variations des constantes arbitraires.

5. Reprenons les diverses intégrales auxquelles nous sommes parvenus dans le n° 35, du I^er^ livre, savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{A}ap + \mathrm{B}bq + \mathrm{C}cr = \beta, \\
&\mathrm{A}a'p + \mathrm{B}b'q + \mathrm{C}c'r = \beta', \\
&\mathrm{A}a''p + \mathrm{B}b''q + \mathrm{C}c''r = \beta'', \\
&\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = h, \\
&\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 = k^2; \\
&t + l = \int \frac{\sqrt{\mathrm{AB}}.\mathrm{C}dr}{\sqrt{[k^2 - \mathrm{B}h + (\mathrm{B}-\mathrm{C})\mathrm{C}r^2][-k^2 + \mathrm{A}h + (\mathrm{C}-\mathrm{A})\mathrm{C}r^2]}}, \\
&\psi_{,} + g = \int \frac{k.(\mathrm{C}r^2 - h).\sqrt{\mathrm{AB}}.\mathrm{C}dr}{(k^2 - \mathrm{C}^2r^2).\sqrt{[k^2 - \mathrm{B}h + (\mathrm{B}-\mathrm{C})\mathrm{C}r^2][-k^2 + \mathrm{A}h + (\mathrm{C}-\mathrm{A})\mathrm{C}r^2]}}.
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Ces sept équations n'équivalent qu'à six intégrales distinctes, et les quatre constantes β, β', β'', k sont liées entre elles par l'équation de condition

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = k^2. \quad (e)$$

Les trois arbitraires β, β', β'' déterminent la position du plan principal de projection, en sorte que si l'on appelle γ son inclinaison sur un plan fixe quelconque, et α la longitude de son nœud comptée d'une origine arbitraire, on aura

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''}. \quad (f)$$

La constante h est celle qui sert à compléter l'intégrale des forces vives; la constante l dépend de la position du corps à un instant déterminé; enfin, relativement à la constante g, nous observerons que $\psi_,$ représente la longitude du nœud de l'équateur du corps, sur le plan principal de projection, comptée à partir de l'intersection de ce dernier plan avec le plan fixe, n° 35, livre I^er^. On peut donc, pour fixer les idées, supposer que $-g$ est la valeur de cette longitude à l'origine du mouvement, puisqu'il suffit pour cela de le faire commencer à l'instant où l'intégrale de la valeur de $\psi_,$ s'évanouit.

Les intégrales (d) suffisent pour déterminer à chaque instant la position du corps par rapport au plan invariable, en sorte que si l'on désigne par $\varphi_,$ et $\theta_,$, relativement à ce plan, les angles que nous avons nommés φ et θ par rapport au plan fixe, on connaîtra par les formules précédentes les valeurs des angles $\varphi_,$, $\psi_,$, $\theta_,$, γ et α, et l'on déterminera celles des trois angles φ, ψ, θ, par les formules du n° 35, livre I^er^.

Cela posé, concevons que l'on veuille étendre les intégrales précédentes aux équations (C), où l'on considère l'action des forces perturbatrices. Les trois arbitraires β, β', β'' ne seront plus constantes; le plan principal de projection que nous avions considéré comme invariable n° 35, livre cité, cessera de l'être, mais il conservera toujours la propriété d'être à chaque instant le plan par rapport auquel la somme des projections des aires décrites par les rayons vecteurs des éléments du sphéroïde, multipliées par les masses de ces éléments, est un maximum; les quatre constantes

h, k, l, g, deviendront également variables, et l'on déterminera les variations de ces différentes quantités par la formule générale (D), n° **18**, livre II.

Pour cela, il est nécessaire d'exprimer préalablement ces constantes en fonction des variables indépendantes du problème et des quantités s, u, v, qui sont, comme on sait, des fonctions de ces variables et de leurs différences premières. Dans la question qui nous occupe, comme dans celle du mouvement de translation, les variables indépendantes sont au nombre de trois : nous avons pris les trois angles φ, ψ, θ, pour ces variables ; nous avons désigné, pour abréger, par φ', ψ', θ' les différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, divisées par dt, et par T la moitié de la force vive du sphéroïde ; on aura par conséquent, n° **13**, livre II,

$$s = \frac{dT}{d\varphi'}, \quad u = \frac{dT}{d\psi'}, \quad v = \frac{dT}{d\theta'}.$$

Nous avons trouvé, n° **4**, pour l'expression de T,

$$T = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2}:$$

on aura donc, en vertu des valeurs de $\frac{dT}{d\varphi'}$, $\frac{dT}{d\psi'}$, $\frac{dT}{d\theta'}$, données dans le même numéro,

$$s = Cr,$$
$$u = (Ap \sin\varphi + Bq \cos\varphi) \sin\theta - Cr \cos\theta,$$
$$v = - Ap \cos\varphi + Bq \sin\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} Ap &= (u + s\cos\theta)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - v\cos\varphi, \\ Bq &= (u + s\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + v\sin\varphi, \\ Cr &= s. \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Si dans les expressions des constantes β, β', β'', on substitue ces valeurs, et qu'on remplace en même temps les quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, par leurs valeurs données n° **28**, liv. I^er^, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\beta &= (s + u\cos\theta)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - v\cos\psi,\\ \beta' &= (s + u\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + v\sin\psi,\\ \beta'' &= -u.\end{aligned}\right\}\quad (h)$$

En mettant pour β, β', β'', leurs valeurs dans les équations (f), on exprimera les constantes α et γ en fonctions des mêmes variables. On pourrait exprimer de même les constantes h et k en fonction des six variables φ, ψ, θ, s, u, v, mais il sera plus simple de les regarder comme déterminées par les équations (d) et (e), en y considérant les quantités p, q, r, β, β', β'' comme des fonctions données de ces variables. Enfin, on substituera sous le signe intégral s à la place de Cr dans les deux dernières équations (d), et en supposant les intégrations effectuées, on pourra regarder les six constantes h, k, α, γ, l, g, comme exprimées en fonction des six variables φ, ψ, θ, s, u, v. Il ne restera donc plus qu'à substituer leurs différentielles partielles, prises par rapport à ces quantités, dans la formule générale

$$(a, b) = \frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi} - \frac{da}{d\varphi}\cdot\frac{db}{ds} + \frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi} - \frac{da}{d\psi}\cdot\frac{db}{du} + \frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta} - \frac{da}{d\theta}\cdot\frac{db}{dv},$$

pour avoir les valeurs des quinze symboles (k, α), (k, γ), etc.

6. Pour suivre ici la même marche que dans la recherche des variations des éléments elliptiques, commençons par déterminer les valeurs des quantités (k, α), (k, γ), (α, γ), (h, k), (h, α), (h, γ), où n'entrent point les lettres l et g; et, afin de simplifier ce calcul, formons d'abord les trois combinaisons (β, β'), (β, β''), (β', β''); on trouvera sans peine

$$(\beta, \beta') = -\beta'', \quad (\beta, \beta'') = \beta', \quad (\beta', \beta'') = -\beta.$$

Si l'on regarde α et γ comme des fonctions de β, β', β'', données par les équations

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''},$$

on aura

$$(k, \alpha) = (k, \beta) \frac{d\alpha}{d\beta} + (k, \beta') \frac{d\alpha}{d\beta'},$$

$$(k, \gamma) = (k, \beta) \frac{d\gamma}{d\beta} + (k, \beta') \frac{d\gamma}{d\beta'} + (k, \beta'') \frac{d\gamma}{d\beta''}.$$

D'ailleurs, k étant une fonction de β, β', β'', donnée par l'équation $k^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2$, on a

$$(k, \beta) = (\beta', \beta) \frac{dk}{d\beta'} + (\beta'', \beta) \frac{dk}{d\beta''} = (\beta', \beta) \frac{\beta'}{k} + (\beta'', \beta) \frac{\beta''}{k},$$

et par conséquent $(k, \beta) = 0$; on aurait de même $(k, \beta') = 0$, $(k, \beta'') = 0$; d'où l'on conclura

$$(k, \alpha) = 0, \quad (k, \gamma) = 0.$$

La valeur précédente de $\operatorname{tang} \gamma$ donne

$$\cos \gamma = \frac{\beta''}{k};$$

en observant donc que (α, k) est nul par ce qui précède, on aura simplement

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta'') \frac{d\gamma}{d\beta''} = -(\alpha, \beta'') \frac{1}{k \sin \gamma}.$$

Or

$$(\alpha, \beta'') = (\beta', \beta'') \frac{d\alpha}{d\beta} + (\beta', \beta'') \frac{d\alpha}{d\beta'} = \cos^2 \alpha \left(\frac{\beta^2 + \beta'^2}{\beta'^2}\right) = 1;$$

donc

$$(\alpha, \gamma) = -\frac{1}{k \sin \gamma}.$$

Si l'on combine la constante h avec les trois constantes β, β', β'', on trouvera

$$(h, \beta) = 0, \quad (h, \beta') = 0, \quad (h, \beta''') = 0.$$

En effet, la constante β'', par exemple, ne contenant que la variable u, la formule (C) (nº **18**, livre II) donnera

$$(h, \beta'') = -\frac{dh}{d\psi} \frac{d\beta''}{du}.$$

Or la constante h est fonction de p, q, r, et les valeurs (α) de ces quantités ne contiennent pas la variable ψ; on a donc $\frac{dh}{d\psi} = 0$, et par conséquent $(h, \beta'') = 0$. On peut en conclure par analogie que (h, β) et (h, β') sont nuls pareillement; il est facile d'ailleurs de le vérifier en calculant directement leurs valeurs.

Il suit de là que, si l'on regarde k, α, γ comme fonctions de β, β', β'', on aura

$$(h, k) = 0, \quad (h, \alpha) = 0, \quad (h, \gamma) = 0.$$

Formons maintenant les quatre combinaisons (l, h),

(l, k), (l, α), (l, γ) qui renferment la constante l sans contenir la constante g.

La sixième des intégrales (d), en mettant s à la place de Cr sous le signe intégral, devient

$$t+l=\int\frac{\sqrt{AB}.C\,ds}{\sqrt{[Ck^2-BCh+(B-C)s^2][-Ck^2+ACh+(C-A)s^2]}}. \quad (d')$$

Si l'on suppose l'intégration effectuée, cette équation donne

$$l=-t+\text{fonct.}\,(h, k, s).$$

On aura ainsi $\frac{dl}{ds}=\frac{dt}{ds}$, et pour avoir les différences partielles $\frac{dl}{dh}$, $\frac{dl}{dk}$, il suffira de différentier sous le signe intégral le second membre de l'équation (d') par rapport aux constantes h et k.

La valeur de l ne contenant que la variable s, en la combinant avec une constante quelconque b, et en faisant d'abord abstraction des constantes h et k qu'elle renferme, on aura

$$(l, b)=\frac{dt}{ds}\,\frac{db}{d\varphi}.$$

Pour avoir égard aux constantes h et k, il faudrait ajouter au second membre les deux termes

$$(h, b)\,\frac{dl}{dh}+(k, b)\,\frac{dl}{dk}.$$

Mais on peut s'en dispenser, parce que b devant représenter l'une des quatre constantes h, k, α, γ, ces deux termes sont toujours nuls.

Substituons d'abord la constante h à la place de b, on a

$$\frac{dh}{d\varphi} = 2\,\mathrm{A}p\frac{dp}{d\varphi} + 2\,\mathrm{B}q\frac{dq}{d\varphi} + 2\,\mathrm{C}r\frac{dr}{d\varphi}.$$

Or les valeurs de $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$ donnent

$$\mathrm{A}\frac{dp}{d\varphi} = \mathrm{B}q, \quad \mathrm{B}\frac{dq}{d\varphi} = -\,\mathrm{A}p, \quad \mathrm{C}\frac{dr}{d\varphi} = 0;$$

on aura, par conséquent,

$$\frac{dh}{d\varphi} = 2(\mathrm{B} - \mathrm{A})\,pq = -\,2\,\mathrm{C}\frac{dr}{dt},$$

en vertu de la troisième des équations (A).

On aura donc, en observant que $\mathrm{C}\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$,

$$(l, h) = -\,2\,\frac{dt}{ds}\,\frac{ds}{dt},$$

et, par conséquent,

$$(l, h) = -\,2.$$

Les trois constantes β, β', β'' ne renfermant pas la variable φ, il s'ensuit que si la lettre b représente une fonction quelconque de ces arbitraires, (l, b) sera nul; on aura donc ainsi

$$(l, k) = 0, \quad (l, \alpha) = 0 \quad (l, \gamma) = 0.$$

Passons enfin au calcul des cinq combinaisons (g, h), (g, k), (g, α), (g, γ), (g, l) qui renferment la constante g.

La dernière des équations (d), en substituant s à la place de $\mathrm{C}r$, devient

$$\psi_{,} + g = \int \frac{k(s^2 - \mathrm{C}h)\sqrt{\mathrm{AB}}\,ds}{(k^2 - s^2)\sqrt{[\mathrm{C}k^2 - \mathrm{BC}h + (\mathrm{B} - \mathrm{C})s^2][-\mathrm{C}k^2 + \mathrm{AC}h + (\mathrm{C} - \mathrm{A})s^2]}}.$$

Si l'on suppose l'intégration effectuée, cette équation donnera g en fonction de $\psi_{,}$, s, h, k, en sorte qu'on aura

$$g = -\psi_{,} + \text{fonct.}\,(h, k, s).$$

En la différentiant on a d'ailleurs

$$\frac{dg}{ds} = \frac{d\psi_{,}}{ds} = \frac{k(s^2 - Ch)}{C(k^2 - s^2)}\,\frac{dt}{ds}.$$

On obtiendrait les différences partielles de g, par rapport à h et à k, en différentiant sous le signe intégral par rapport à ces constantes.

Cela posé, on aura, relativement à une constante quelconque b,

$$(g, b) = \frac{dg}{ds}\,\frac{db}{d\varphi} + (h, b)\,\frac{dg}{dh} - (\psi_{,}, b). \quad (k)$$

Nous omettons le terme $(k, b)\,\frac{dg}{dk}$, parce que b devant représenter l'une des quatre constantes α, γ, h, l, ce terme est toujours nul.

Pour former la quantité $(\psi_{,}, b)$, il est nécessaire de connaître la valeur de $\psi_{,}$ en fonction des variables φ, ψ, θ, s, u, v. Or nous avons trouvé, n° 35, livre II,

$$\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_{,} - \sin\gamma\sin\theta_{,}\cos\psi_{,},$$
$$\sin(\psi - \alpha)\sin\theta = \sin\psi_{,}\sin\theta_{,}.$$

On a d'ailleurs, n° 35, livre II,

$$k\cos\gamma = \beta'' = -u, \quad \text{et} \quad k\cos\theta_{,} = Cr = s;$$

les deux équations précédentes donneront donc

$$\cos\psi_{,} = -\frac{k^2\cos\theta + us}{\sqrt{k^2 - u^2}\,\sqrt{k^2 - s^2}}, \quad \sin\psi_{,} = \frac{k\sin(\psi - \alpha)\sin\theta}{\sqrt{k^2 - s^2}},$$

Si l'on différentie la valeur de $\cos\psi_{,}$, par rapport aux variables s, u, θ qu'elle renferme, et qu'on substitue dans le résultat pour $\sin\psi_{,}$ sa valeur, on trouvera

$$\frac{d\psi_{,}}{ds}=\frac{u+s\cos\theta}{(k^2-s^2)\sin\gamma\sin\theta\sin(\psi-\alpha)},$$

$$\frac{d\psi_{,}}{du}=\frac{s+u\cos\theta}{k^2\sin^2\gamma\sin\theta\sin(\psi-\alpha)},$$

$$\frac{d\psi_{,}}{d\theta}=-\frac{1}{\sin\gamma\sin(\psi-\alpha)},$$

par conséquent,

$$(\psi_{,},b)=\frac{u+s\cos\theta}{(k^2-s^2)\sin\gamma\sin\theta\sin(\psi-\alpha)}\frac{db}{d\varphi}$$
$$+\frac{s+u\cos\theta}{k^2\sin^2\gamma\sin\theta\sin(\psi-\alpha)}\frac{db}{d\psi}+\frac{1}{\sin\gamma\sin(\psi-\alpha)}\frac{db}{dv}.$$

Substituons maintenant successivement dans (g,b) et $(\psi_{,},b)$ à la place de la lettre b, les quatre constantes h, k, α, γ.

On trouve aisément

$$\frac{dh}{d\varphi}=-2\frac{ds}{dt},\ \frac{dh}{d\psi}=0,\quad \frac{dh}{dv}=-2(p\cos\varphi-q\sin\varphi);$$

par conséquent,

$$(g,h)=\frac{2k(h-Cr^2)}{k^2-s^2}-(\psi_{,},h),$$

$$(\psi_{,}h)=\frac{2}{\sin\gamma\sin(\psi-\alpha)}\left[\left(\frac{u+s\cos\theta}{\sin\theta}\right)\frac{(B-A)pq}{k^2-s^2}-p\cos\varphi+q\sin\varphi\right].$$

Les équations (g) donnent

$$\frac{u+s\cos\theta}{\sin\theta}=Ap\sin\varphi+Bq\cos\varphi,$$

$$k\sin\gamma\sin(\psi-\alpha)=\beta'\sin\psi-\beta\cos\psi=-Ap\cos\varphi+Bq\sin\varphi.$$

L'expression de $(\psi_{,},k)$, au moyen de ces valeurs et en observant que $k^2 - s^2 = A^2p^2 + B^2q^2$, se réduit à

$$(\psi_{,},h) = \frac{2k(Ap^2 + Bq^2)}{k^2 - s^2} = \frac{2k(h - Cr^2)}{k^2 - s^2}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de (g,h), on aura

$$(g,h) = 0.$$

Si l'on combine la constante g avec chacune des trois constantes β, β', β'', et qu'on observe qu'en vertu des équations (h) on a

$$\frac{s + u\cos\theta}{\sin\theta} = \beta\sin\psi + \beta'\cos\psi,$$

on trouvera sans peine

$$(\psi_{,},\beta) = \frac{\beta}{k\sin^2\gamma},\quad (\psi_{,},\beta') = \frac{\beta'}{k\sin^2\gamma},\quad (\psi_{,},\beta'') = 0.$$

La constante k étant regardée comme une fonction de β, β', β'' donnée par l'équation

$$k^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2,$$

on a

$$(\psi_{,},k) = (\psi_{,},\beta)\frac{dk}{d\beta} + (\psi_{,},\beta')\frac{dk}{d\beta'} = \frac{\beta^2 + \beta'^2}{k^2\sin^2\gamma};$$

par conséquent,

$$(\psi',k) = 1.$$

La constante γ étant donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''},$$

on aura

$$(\psi_{,},\gamma) = (\psi_{,},\beta)\frac{d\gamma}{d\beta} + (\psi_{,},\beta')\frac{d\gamma}{d\beta'} = \frac{\cos^2\gamma}{k\sin^2\gamma}\,\frac{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}}{\beta''},$$

par conséquent,

$$(\psi_{,}, \gamma) = \frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}.$$

Enfin, la constante α étant déterminée par l'équation

$$\tang\alpha = \frac{\beta}{\beta'},$$

on aura

$$(\psi_{,}, a) = (\psi_{,}, \beta)\frac{d\alpha}{d\beta} + (\psi_{,}, \beta')\frac{d\alpha}{d\beta'} = \frac{\cos^2\alpha}{k\sin^2\gamma}\left(\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\beta\beta'}{\beta'^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$(\psi_{,}, \alpha) = 0.$$

Ces valeurs substituées dans la formule (k) donneront, en remarquant que les constantes β, β', β'' ne contiennent pas la variable φ,

$$(g, k) = -1, \quad (g, \gamma) = -\frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}, \quad (g, \alpha) = 0.$$

Il ne nous reste plus à former que la combinaison (g, l); mais au lieu de substituer la constante l à la lettre b dans la formule (k), il est plus simple de considérer cette constante comme fonction des variables s, t et des constantes h, k; on aura ainsi

$$(g, l) = (g, s)\frac{dl}{ds} + (g, h)\frac{dl}{dh} + (g, k)\frac{dl}{dk},$$

valeur qui, en observant que $(g, h) = 0$, $(g, k) = -1$, $(g, s) = -\frac{dg}{d\varphi}$, se réduit à

$$(g, l) = -\frac{dg}{d\varphi}\frac{dl}{ds} - \frac{dl}{dk}.$$

D'ailleurs $g = \text{fonct.}\,(s, \psi_{,}, h, k)$, et comme s, $\psi_{,}$, k ne contiennent pas la variable φ, on a

$$\frac{dg}{d\varphi}=\frac{dg}{dh}\,\frac{dh}{d\varphi};$$

par conséquent,

$$(g, l)=-\frac{dh}{d\varphi}\frac{dl}{ds}\frac{dg}{dh}+\frac{dl}{dk}=2\frac{dg}{dh}-\frac{dl}{dk},$$

en observant que $\frac{dh}{d\varphi}\frac{dl}{ds}=(l, h)=-2.$

Pour avoir les différences partielles $\frac{dg}{dh}$, $\frac{dl}{dk}$, il faut différentier, sous le signe intégral, par rapport à h et à k, les valeurs de ces deux constantes; on aura ainsi

$$\frac{dg}{dh}=-\int\frac{k\,dt}{k^2-s^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{A}k(s^2-\mathrm{C}h)\,dt}{(k^2-s'^2)[\mathrm{C}k^2-\mathrm{AC}h+(\mathrm{A}-\mathrm{C})s^2]}$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{B}k(s^2-\mathrm{C}h)\,dt}{(k^2-s^2)[\mathrm{C}k^2-\mathrm{BC}h+(\mathrm{B}-\mathrm{C})s^2]},$$

valeur qui peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{dg}{dh}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{C}k\,dt}{\mathrm{C}k^2-\mathrm{AC}h+(\mathrm{A}-\mathrm{C})s^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{C}k\,dt}{\mathrm{C}k^2-\mathrm{BC}h+(\mathrm{B}-\mathrm{C})s^2}.$$

En différentiant de la même manière, par rapport à k, la valeur de l, on trouve

$$\frac{dl}{dk}=-\int\frac{\mathrm{C}k\,dt}{\mathrm{C}k^2-\mathrm{AC}h+(\mathrm{A}-\mathrm{C})s^2}-\int\frac{\mathrm{C}k\,dt}{\mathrm{C}k^2-\mathrm{BC}h+(\mathrm{B}-\mathrm{C})s^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'expression de (g, l), donnent

$$(g, l)=0.$$

7. En réunissant les valeurs des quinze quantités que nous venons de calculer, on trouve

$$(h, l)=2,\quad (k, g)=1,\quad (\gamma, g)=\frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma},\quad (\gamma, \alpha)=\frac{1}{k\sin\gamma}.$$

Toutes les autres sont nulles, en sorte qu'on a

$$(h, k) = 0, \quad (h, \gamma) = 0, \quad (h, \alpha) = 0, \quad (h, g) = 0,$$
$$(l, k) = 0, \quad (l, \gamma) = 0, \quad (l, \alpha) = 0, \quad (l, g) = 0,$$
$$(k, \gamma) = 0, \quad (k, \alpha) = 0, \quad (g, \alpha) = 0.$$

Au moyen de ces valeurs, il est aisé de conclure, en vertu de la formule générale (D) (n° **18**, livre II),

$$\left.\begin{aligned}
dh &= 2\,dt\left(\frac{dV}{dl}\right), \\
dl &= -\,2\,dt\left(\frac{dV}{dh}\right), \\
dk &= dt\left(\frac{dV}{dg}\right), \\
dg &= -\,dt\left(\frac{dV}{dk}\right) - \frac{\cos\gamma\,dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right), \\
d\alpha &= -\,\frac{dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right), \\
d\gamma &= \frac{\cos\gamma\,dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{dg}\right) + \frac{dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\alpha}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (P)$$

Ces équations serviront à déterminer les variations que produit, sur les six constantes arbitraires qui entrent dans les équations du mouvement de rotation, l'action des forces perturbatrices.

8. Ce qu'on observe d'abord en considérant les formules précédentes, c'est la singulière analogie qu'elles ont avec celles qui déterminent les variations des éléments elliptiques des orbites planétaires. On voit, en effet, que, pour les rendre identiques avec les formules (o) du n° **41**, livre II, il suffit de changer dans ces dernières $\frac{1}{a}$ en $-h$, φ en γ, et de prendre, au lieu de l'angle α, son supplément. Ce résultat remarquable tient à ce que les constantes dont nous avons fait choix, ont une signification semblable dans les deux problèmes. Ainsi, dans le mouvement de translation $-\frac{1}{a}$ et dans le mouvement de rotation h sont les constantes qui équivalent à la force vive du système. Dans ce dernier cas, γ est l'inclinaison du plan principal de projection sur un plan fixe, α la longitude de son nœud comptée sur ce plan à partir d'une ligne fixe; de même, dans le mouvement de translation, φ est l'inclinaison sur un plan fixe du plan de la trajectoire, qui est évidemment le plan principal de projection, et α la longitude de son nœud comptée sur ce plan, seulement cet angle n'est pas compté dans le même sens dans les deux cas; d'où résulte la différence de signe qu'on remarque dans les formules qui dépendent de la variation de cet angle; l est la constante ajoutée au temps t et provient de ce que les équations différentielles du mouvement ne renferment, dans les deux questions, que l'élément de cette variable; k représente l'aire décrite, pendant l'unité de temps, sur le plan principal de projection par le rayon vecteur de chacun des éléments du corps en mouvement, multipliée par la masse de cet élément; enfin, la constante g représente des quantités analogues dans les deux cas.

Ainsi donc les expressions des variations des constantes arbitraires sont identiquement les mêmes dans le mouvement de translation et dans le mouvement de rotation, et les perturbations qu'éprouvent les corps célestes dans leurs mouvements, soit autour du Soleil, soit autour de leur centre de gravité, se trouvent ainsi exprimées par les mêmes formules, comme elles dérivent de la même cause. Cet important résultat n'est pas sans doute ce qu'offre de moins remarquable la belle méthode que nous avons employée pour déterminer toutes les inégalités des planètes. Cette méthode, qui réunit dans une même analyse les deux principaux problèmes du système du monde, a de plus l'avantage de présenter sous un même point de vue les différents effets que produisent, dans les mouvements de ces corps, leurs attractions mutuelles. On voit que ces effets, qui, au premier aspect, paraissent avoir si peu d'analogie entre eux, se bornent à faire varier par degrés insensibles les arbitraires du mouvement; de sorte qu'en introduisant ces arbitraires ainsi corrigées dans les formules du mouvement qui aurait lieu abstraction faite des forces perturbatrices, on aura celles qui conviennent au mouvement troublé, et l'on pourra déterminer ainsi, de la manière la plus simple, la valeur des variables qui doivent fixer à chaque instant la situation du corps que l'on considère. Nous ne craignons pas de l'affirmer, cet ingénieux procédé d'analyse, par sa généralité et par la clarté nouvelle qu'il répand sur toutes les parties de la mécanique céleste, est la plus belle conception dont se soit enrichie la théorie du système du monde, depuis les immortelles découvertes de Newton. Ce grand géomètre nous avait montré quelles sont les forces principales qui donnent le mouvement aux différents corps du système solaire; Lagrange nous a appris à calculer l'effet plus compliqué des forces perturbatrices, et peut-être il a posé la limite où devait s'arrêter l'esprit humain dans ces sublimes recherches.

9. On peut donner aux formules (P) différentes formes en substituant aux constantes h, l, k, g, α, γ, de nouvelles arbitraires, et en exprimant leurs différentielles au moyen des différences partielles de la fonction V, prises par rapport à ces mêmes quantités. Remarquons d'abord que g désigne, dans ces formules, l'angle compris à l'origine du mouvement entre les intersections du plan principal de projection avec le plan fixe et avec le plan qui contient les deux premiers axes principaux du corps; dg est donc l'accroissement de cet angle pendant l'instant dt; mais l'intersection du plan principal de projection avec le plan fixe est mobile, et $\cos\gamma\, d\alpha$ exprime son mouvement pendant l'instant dt projeté sur le premier de ces plans. En désignant donc par ω la longitude de l'intersection de l'équateur du corps avec le plan principal de projection, cette longitude étant comptée sur ce dernier plan à partir d'une ligne fixe, on aura

$$d\omega = dg - \cos\gamma\, d\alpha.$$

En considérant d'ailleurs V comme fonction des arbitraires ω et α, on trouve

$$\frac{dV}{dg} = \frac{dV}{d\omega}, \quad \frac{dV}{d\alpha} = \left(\frac{dV}{d\alpha}\right) - \cos\gamma \left(\frac{dV}{d\omega}\right).$$

Les trois dernières formules (P) deviendront ainsi

$$\left.\begin{aligned} d\omega &= - dt\left(\frac{dV}{dk}\right),\\ d\alpha &= -\frac{dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right),\\ d\gamma &= \quad\frac{dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\alpha}\right).\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{Q})$$

En joignant ces expressions aux trois premières équations (P), les variations de toutes les arbitraires se trouveront exprimées par des formules qui ne contiennent qu'un seul terme, ce qui contribue à les simplifier. Si le corps tournait rigoureusement autour de son troisième axe principal, le plan principal de projection coïnciderait avec son équateur; les deux dernières formules précédentes suffiraient donc pour déterminer dans ce cas les mouvements de ce plan. C'est ce qui a lieu, comme on le verra, relativement à la Terre.

Enfin, si l'on suppose

$$p = \operatorname{tang}\gamma\sin\alpha,\qquad q = \operatorname{tang}\gamma\cos\alpha,$$

on trouvera

$$\frac{dV}{d\alpha} = q\frac{dV}{dp} - p\frac{dV}{dq},$$

$$\frac{dV}{d\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\gamma}\frac{dV}{dp} + \frac{\cos\alpha}{\cos^2\gamma}\frac{dV}{dq},$$

et, par suite,

$$dp = -\frac{dt}{k\cos^2\gamma}\left(\frac{dV}{dq}\right),$$

$$dq = \quad\frac{dt}{k\cos^2\gamma}\left(\frac{dV}{dp}\right);$$

$$\frac{dV}{d\alpha}d\alpha + \frac{dV}{d\gamma}d\gamma = \frac{dV}{dp}dp + \frac{dV}{dq}dq$$

formules qu'il est avantageux de substituer aux deux dernières équations (Q), lorsque γ est un très-petit angle.

10. Il nous suffira maintenant de développer chacune des formules (P), pour en voir résulter tous les phénomènes que cause, dans le mouvement de rotation des planètes, l'action des forces perturbatrices; mais comme la situation initiale du corps, sa figure et ses dimensions ont sur ce mouvement la plus grande influence, il serait inutile d'examiner d'une manière générale ces formules, comme nous l'avons fait dans le problème de la translation des corps célestes, et nous déterminerons séparément les inégalités du mouvement de rotation de la Terre et de la Lune, qui sont les seules planètes pour lesquelles l'état de l'Astronomie ait permis jusqu'ici de comparer sur ce point la théorie à l'observation. Cependant, parmi les arbitraires du mouvement de rotation, il en est une dont la variation donne lieu à des remarques importantes; c'est celle qui entre dans l'équation des forces vives, nous allons, par cette raison, la considérer ici en particulier.

La première des formules (P) donne, pour déterminer la variation de la constante h, l'équation

$$dh = 2dt\left(\frac{dV}{dl}\right).$$

On peut faire prendre à cette expression une autre forme. En effet, l étant la constante qui est jointe au temps t dans les expressions finies des variables φ, ψ, θ, il est clair que si l'on regarde V comme une fonction donnée de ces variables, on aura

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{dV}{d\psi}\right)\frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{dV}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt};$$

par conséquent,

$$dh = 2\left(\frac{dV}{d\varphi}d\varphi + \frac{dV}{d\psi}d\psi + \frac{dV}{d\theta}d\theta\right),$$

ou bien simplement

$$dh = 2d'V, \quad (l)$$

en désignant par la caractéristique d', la différentielle de V prise en y faisant varier le temps t introduit par la substitution des valeurs des coordonnées φ, ψ, θ du corps dont on considère la rotation, et en regardant comme constant celui que cette fonction peut contenir à raison du mouvement des astres attirants.

On doit observer, d'abord, que cette formule peut s'obtenir directement et indépendamment de celles qui déterminent les variations des autres constantes; elle résulte immédiatement, en effet, de la quatrième des équations (d), différentiée par rapport aux variables et aux constantes qu'elle renferme, pour avoir égard aux forces perturbatrices, en observant qu'on a, n° 4,

$$Apdp + Bqdq + Crdr = d'V.$$

La même remarque s'applique au mouvement de translation, et en général au mouvement d'un système de corps, quelle que soit leur liaison entre eux, puisque l'équation des forces vives a lieu dans toute espèce de système qui n'est sollicité que par l'action mutuelle de ses différentes parties et par des forces dirigées vers des centres fixes. Nous allons maintenant démontrer une propriété importante qui résulte de la formule (k), et qui consiste en ce que la constante h, devenue variable par l'action des forces perturbatrices, ne peut contenir le temps t que sous la forme périodique, lorsque la fonction perturbatrice V ne le contient que sous cette forme.

En effet, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, ce qui permet de regarder comme constantes les arbitraires qui entrent dans V, si cette fonction ne contient le temps que sous les signes sinus ou cosinus, il est clair que la différentiation relative à t fera disparaître tous les termes indépendants du temps, ou qui le contiendraient simplement à raison du mouvement des astres attirants; et, par conséquent, l'intégration ne pourra donner, dans la valeur de h, aucun terme non périodique ou de la forme $\mathrm{N}t$ qui croisse avec le temps t.

Il existe cependant une circonstance où ce résultat cesserait d'avoir lieu et qu'il est important d'examiner, parce que le système planétaire en offre un exemple. Pour cela, supposons la fonction V développée en série dont les différents termes soient de cette forme,

$$\mathrm{H}\,{}^{\sin.}_{\cos.}(int - i'n't + \mathrm{K});$$

H et K étant des fonctions des arbitraires h, k, etc.; l'angle nt étant le moyen mouvement de rotation du sphéroïde autour de son centre de gravité et l'angle $n't$ le moyen mouvement de l'astre attirant, i et i' des nombres entiers quelconques. Il est aisé de voir que ce terme produira, dans dh, le suivant :

$$2\,\mathrm{H}\,in\,dt\,{}^{\cos.}_{\sin.}(int - i'n't + \mathrm{K});$$

et en l'intégrant, il en résultera un terme périodique dans h, à moins que l'on n'ait $int - i'n't = 0$, ce qui exige que les coefficients n et n' soient commensurables entre eux. Or ce cas particulier a lieu dans le mouvement de rotation de la Lune, altéré par l'action de la Terre. Le moyen mouvement de rotation de la Lune est exactement égal à son moyen mouvement de révolution autour de la Terre, et ce rapport singulier produit, comme on le verra, le phénomène de sa libration.

11. Démontrons que le résultat précédent subsiste encore dans la seconde approximation, où l'on tient compte des termes dépendants du carré des forces perturbatrices. En effet, pour avoir égard à ces termes, il faut à la place des constantes h, k, l, g, γ, α, substituer ces arbitraires augmentées de leurs variations, déterminées par l'intégration des formules (P); on aura ainsi

$$\delta \mathrm{V} = \frac{d\mathrm{V}}{dh}\delta h + \frac{d\mathrm{V}}{dl}\delta l + \frac{d\mathrm{V}}{dk}\delta k + \frac{d\mathrm{V}}{dg}\delta g + \frac{d\mathrm{V}}{d\gamma}\delta\gamma + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}\delta\alpha,$$

et, en ne considérant que les termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices,

$$dh = 2d'.\delta\mathrm{V}.$$

Substituons dans l'expression précédente de $\delta\mathrm{V}$, pour

∂h, ∂l, ∂k, etc., leurs valeurs, on aura

$$\begin{aligned}\partial V = 2\Big(&\frac{dV}{dh}\int\frac{dV}{dl}dt - \frac{dV}{dl}\int\frac{dV}{dh}dt\Big)\\
&+\frac{dV}{dk}\int\frac{dV}{dg}dt - \frac{dV}{dg}\int\frac{dV}{dk}dt\\
&+\frac{\cos\gamma}{k\sin\gamma}\Big(\frac{dV}{d\gamma}\int\frac{dV}{dg}dt - \frac{dV}{dg}\int\frac{dV}{d\gamma}dt\Big)\\
&+\frac{1}{k\sin\gamma}\Big(\frac{dV}{d\gamma}\int\frac{dV}{d\alpha}dt - \frac{dV}{d\alpha}\int\frac{dV}{d\gamma}dt\Big)\end{aligned}$$

Pour avoir la différentielle $d'.\partial V$, il faut différentier cette expression par rapport au temps t contenu dans les valeurs de $\varphi + \partial\varphi$, $\psi + \partial\psi$, $\theta + \partial\theta$, c'est-à-dire qu'il faut, 1° différentier totalement les quantités renfermées sous les signes intégrales, ce qui revient à effacer les signes $\int$, et alors cette expression se réduit à zéro; 2° différentier seulement par rapport au temps t contenu dans les valeurs des variables φ, ψ, θ, les quantités hors du signe $\int$. L'expression de ∂V est composée de termes de la forme

$$A\int B\,dt - B\int A\,dt,$$

A et B pouvant, par l'hypothèse, se développer en une suite de termes de la forme $H\,{}^{\sin.}_{\cos.}(it + ft + K)$, dans lesquels H, i, K sont des fonctions des constantes h, k, l, etc., et ft des angles qui proviennent des mouvements des astres attirants. Soit donc $H\cos(ft + mt + K)$ un terme quelconque de A, et soit $H'\cos(ft + mt + K')$ le terme correspondant de B qui a le même argument, il faudra que l'on combine ensemble ces deux termes pour avoir dans

$d'.(A\int B\,dt - B\int A\,dt)$ des quantités non périodiques. Or on trouve ainsi

$$d'.(A\int B\,dt - B\int A\,dt) =$$
$$-\frac{HH'f\,dt}{f+m}\times[\sin(ft+mt+K)\sin(ft+mt+K') - \sin(ft+mt+K')\sin(ft+mt+K)],$$

quantité qui se réduit à zéro.

Il suit de là, par conséquent, que si l'expression de V est périodique, la valeur de δh ne contiendra que des termes semblables, du moins tant qu'on n'aura égard, dans les approximations, qu'aux premières et secondes puissances des forces perturbatrices.

On voit que le résultat auquel nous sommes parvenus dans le chapitre VIII, livre II, sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires, n'était qu'un cas particulier d'une propriété générale dont jouit la variation de la constante arbitraire qui entre dans l'équation des forces vives.

Dans le mouvement de rotation, h représente la force vive du corps en mouvement, et l'on a

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Les trois quantités p, q, r, sont les vitesses de rotation du corps autour des trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité, n° 1, en sorte que si l'on nomme ρ la vitesse du corps autour de son axe instantané de rotation et a, b, c les angles qu'il forme avec les trois premiers axes, on a

$$p = \rho\cos a,\quad q = \rho\cos b,\quad r = \rho\cos c;$$

l'équation des forces vives deviendra donc ainsi

$$\rho^2 (\mathrm{A}\cos^2 a + \mathrm{B}\cos^2 b + \mathrm{C}\cos^2 c) = h.$$

Le second membre de cette équation ne contenant aucun terme croissant comme le temps t, le premier ne peut renfermer non plus aucun terme pareil, et comme tous les termes du premier membre sont de même signe, il s'ensuit que chacun d'eux n'est composé que de termes périodiques.

On peut conclure de là que la vitesse de rotation et la position de l'axe instantané ne sauraient être affectées d'aucune inégalité croissant comme le temps, et que l'action des forces perturbatrices ne peut y causer que des altérations alternatives dont la période, dépendant du mouvement du sphéroïde autour de son centre de gravité, ou de celui des astres attirants dans leur orbite, sera toujours assez courte.

Il faut remarquer ici que nous n'avons pas eu égard, dans la valeur de V, aux termes qui proviennent de la variation des éléments des orbites des astres attirants; il faut donc restreindre, en ce sens, la généralité des résultats précédents.

Après ces résultats généraux, applicables à tous les corps du système solaire, nous allons examiner en particulier les mouvements de rotation de la Terre et de la Lune. On verra qu'ils présentent tous deux des phénomènes extrêmement importants; qui, quoique très-différents, peuvent se déduire directement des formules que nous venons de développer.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

12. Hipparque paraît être le premier, parmi les astronomes, qui ait remarqué que les étoiles ne sont pas fixes, relativement à nous, et que leur position rapportée au plan de l'équateur, varie dans les différents siècles. En comparant ses propres observations à celles de Tymocharis, faites 155 ans auparavant, il s'aperçut que, dans ce mouvement, leur hauteur au-dessus du plan de l'écliptique restait la même, en sorte que leurs latitudes n'étaient point altérées, tandis que leurs longitudes, rapportées à l'équinoxe, augmentaient chaque année d'une quantité à peu près constante pour toutes les étoiles. Il conclut de là que la sphère céleste a un mouvement autour des pôles de l'écliptique, d'où résultent les changements observés dans les ascensions droites et les déclinaisons des étoiles, et l'invariabilité de leurs distances à ce plan, comme l'observation l'indique. Copernic, occupé toute sa vie à substituer aux mouvements apparents des astres leurs mouvements réels, et à redresser des erreurs nées des illusions de nos sens et d'un sentiment exagéré de notre importance, reconnut que les mêmes phénomènes pouvaient s'expliquer en supposant aux pôles de la Terre un mouvement circulaire de rotation

autour des pôles de l'écliptique. Pendant ce mouvement, l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique reste la même, mais ses nœuds, ou les équinoxes, rétrogradent uniformément de 50″ environ par an, d'où résulte par conséquent un accroissement égal des longitudes des étoiles rapportées à ces points. C'est en cela que consiste le phénomène désigné sous le nom de *la précession des équinoxes*.

L'hypothèse de Copernic suffirait donc pour expliquer de la manière la plus simple les variations observées par Hipparque dans la position des étoiles, et confirmées par tous les astronomes qui sont venus après lui. Mais les rapides progrès de l'Astronomie depuis l'invention des lunettes firent bientôt découvrir de nouveaux phénomènes dans ces variations; il fallut, pour les expliquer, supposer divers mouvements à l'axe de la Terre, et c'est ainsi que Bradley fut conduit à la connaissance de leurs véritables lois.

Ce grand astronome, par la précision de ses observations, reconnut dans la position des étoiles une variation annuelle qu'il suivit pendant une période de dix-huit années, après laquelle elles lui semblèrent revenir à la même position. La coïncidence de cette période avec celle du mouvement des nœuds de la Lune lui fit penser que l'axe de la Terre avait, par rapport aux étoiles, un mouvement périodique dépendant de la longitude de ces nœuds; et pour représenter en conséquence le vrai mouvement de l'axe terrestre, il suppose que l'extrémité de cet axe, prolongé jusqu'au ciel, se meut sur la circonférence d'une petite ellipse tangente à la sphère céleste, et dont le centre, qu'on peut regarder comme le lieu moyen du pôle de l'équateur, est situé sur un petit cercle de la sphère parallèle à l'écliptique, et décrit annuellement d'un mouvement uniforme un arc de 63″ sur ce cercle. L'observation fait connaître les dimensions de cette ellipse, et les lois du mouvement du pôle sur sa circonférence, d'où résulte dans l'axe terrestre cette espèce de balancement qu'on a nommée *sa nutation*.

Ainsi, l'observation devança sur ce point la théorie, et tous les phénomènes qui dépendent des déplacements de l'axe de la Terre, étaient parfaitement connus avant qu'on eût tenté d'en approfondir les causes. Képler avait avoué l'inutilité de ses recherches à cet égard, et c'est à Newton qu'il était réservé de nous montrer comment ils se lient, par la loi de la pesanteur universelle, aux autres phénomènes du mouvement des corps célestes, avec lesquels jusque-là ils ne semblaient avoir aucun rapport. Il fit plus, il essaya d'en déterminer les lois par la théorie. Considérant la Terre comme un sphéroïde renflé à son équateur, il la suppose composée d'une sphère dont le diamètre est l'axe des pôles, et de l'excès du sphéroïde terrestre sur cette sphère, disposé sous la forme d'un anneau autour de son équateur. Il regarde ensuite chaque molécule de cet anneau comme un astre adhérent à la Terre et qui fait sa révolution autour d'elle en vingt-quatre heures, et de là il conclut que l'action du Soleil sur chacun de ces astres, et par conséquent sur l'anneau entier, devait produire le même effet que celui qu'il produit sur la Lune, et faire rétrograder les nœuds de son orbite sur le plan de l'écliptique. Le mouvement rétrograde se communique à la Terre entière, à cause de l'adhérence de l'anneau à la sphère qu'il entoure, et il s'ensuit que l'intersection de l'équateur terrestre et de l'écliptique, où la ligne des équinoxes doit avoir, par l'action du Soleil, un mouvement rétrograde, comme les observations l'indiquent; mais, quelque ingénieux que soit cet aperçu, il y avait encore loin de là à une théorie approfondie et complète des lois du mouvement de l'axe terrestre. Newton lui-même se trompa en voulant les en déduire par des considérations purement rationnelles, et l'analyse, ce puissant auxiliaire de l'esprit humain, pouvait seule montrer, dans cette question délicate, l'accord parfait de la théorie et de l'observation; mais il fallait auparavant en reculer les limites. D'Alembert eut la gloire d'y réussir, et la solution qu'il donna le premier du problème de la précession des équinoxes, doit être regardée comme une des plus belles conceptions de son génie inventif, si l'on considère l'insuffisance des moyens qu'offraient alors pour cet objet l'Analyse et la Mécanique.

D'Alembert explique par la théorie les divers mouvements de l'axe terrestre, par rapport aux étoiles, et montre que la nutation observée par Bradley en est une conséquence immédiate. Il détermine le rapport exact des deux axes de la petite ellipse que décrit le pôle, et la loi de son mouvement sur cette ellipse. En comparant ensuite ses expressions de la nutation et de la précession aux observations, il en conclut le rapport de la masse de la Lune à celle du Soleil; mais il observe, en même temps, qu'il suffirait d'un très-petit changement dans ce rapport, pour altérer considérablement les lois de ces phénomènes. Enfin, il donne, d'après les mêmes expressions, la loi de décroissement de densité des couches de la Terre et détermine son ellipticité.

Tels sont les principaux résultats de la théorie établie par d'Alembert. L'Analyse, en se perfectionnant, a depuis permis de la présenter d'une manière plus simple et de l'étendre à des points qui n'avaient point été abordés par ce géomètre.

Le premier de tous, par son importance, est la détermination des mouvements de l'axe instantané de rotation de la Terre dans l'intérieur du globe. Cette question, comme il est aisé de le concevoir, est pour le moins aussi intéressante pour nous que celle qui a pour but de déterminer les mouvements de cet axe, par rapport aux étoiles, la seule dont d'Alembert se soit occupé. En effet, si l'axe de rotation variait dans l'intérieur de la Terre, chacun de ces mouvements déplacerait son équateur, et toutes les latitudes géographiques en seraient, à la longue, sensiblement altérées; il y a plus, les mers troublées dans leur équilibre, suivraient les mouvements de l'équateur, et descendant vers la partie de la Terre qui se serait abaissée sous elles, laisseraient dans la partie opposée de nouvelles régions à découvert. Les observations, il est vrai, montrent bien que l'axe terrestre n'est soumis à aucune variation sensible dans l'intervalle d'un jour et même de plusieurs années; mais s'il était sujet à quelque inégalité à longue période du genre de celles que nous avons nommées inégalités séculaires, les observations astronomiques, qui ne comprennent encore qu'un assez court intervalle de temps, ne suffiraient pas pour nous rassurer sur les conséquences de ces variations, et ne sauraient rien nous apprendre sur leur marche. C'est donc à la théorie seule qu'il était réservé d'éclairer cette grande question, et M. Poisson est le premier qui l'ait traitée avec tout le soin que son importance exigeait.

Il a montré, par une savante analyse, que l'action du Soleil et de la Lune n'introduisait dans l'expression des variables qui fixent la position de l'axe terrestre dans l'intérieur du globe, aucune inégalité à longue période que la suite des siècles puisse rendre sensible, même lorsqu'on a égard à la seconde puissance des forces perturbatrices. Il en est de même de l'expression de la vitesse de rotation de la Terre autour de cet axe. Il en résulte que cette vitesse est constante, et que les pôles de rotation et l'équateur terrestre sont inaltérables à la surface de la Terre.

Nous confirmerons, d'une manière nouvelle, ces deux résultats importants; nous examinerons ensuite les mouvements de l'axe terrestre par rapport aux étoiles, et nous déduirons des formules exposées dans le chapitre précédent, les équations très-simples d'où dépendent les lois de sa nutation et de la précession des équinoxes.

La durée de l'année, qui se mesure par le retour du Soleil au même équinoxe ou au même solstice, serait constante si le mouvement des équinoxes était uniforme, mais ses inégalités doivent la faire varier dans les différents siècles. Cette longueur est plus courte lorsque le mouvement s'accélère; c'est ce qui arrive actuellement, et la durée de l'année tropique est de nos jours moindre d'environ 10″ qu'au temps d'Hipparque. La même cause, jointe aux variations de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes, introduit des inégalités dans la durée du jour moyen solaire, et leur détermination serait importante si elles pouvaient devenir sensibles, parce que toutes les Tables astronomiques étant calculées dans l'hypothèse d'un jour moyen constant, les longitudes et les latitudes qu'on en déduirait ne s'accorderaient bientôt plus avec celles qui résultent de l'observation directe. Il était donc important de s'assurer par la théorie de l'invariabilité du jour moyen solaire, et nous verrons, en effet, que ces inégalités ne s'élevant pas à quelques secondes en plusieurs millions de siècles, leur considération est à peu près inutile aux astronomes.

Enfin, pour compléter l'exposition analytique des phénomènes de la précession et de la nutation, nous réduirons en nombres les formules qui les déterminent, en employant les données les plus exactes que nous ayons sur les masses des planètes, et nous les comparerons ensuite à quelques observations anciennes, qui, par leur accord avec les résultats de ces formules, montreront la précision de la théorie.

Les phénomènes de la précession et de la nutation dépendant de la figure et de la constitution du sphéroïde terrestre, il en résulte qu'on peut, au moyen de l'observation de ces phénomènes, établir le rapport qui doit exister entre les lois de la densité et de l'ellipticité des couches de la Terre. On verra que l'ellipticité qui en résulte, s'accorde très-bien avec celle qu'on a conclue des observations du pendule à différentes latitudes et des autres phénomènes qui en dépendent. Les lois de la précession indiquent de plus une diminution dans la densité des couches du sphéroïde terrestre, en allant du centre à la surface; résultat qui s'accorde avec les expériences de Cavendish, sur l'attraction des montagnes, et avec les principes de l'hydrostatique qui exigent que si la Terre est supposée avoir été originairement fluide, les parties les plus denses soient en même temps les plus rapprochées de son centre. L'admirable concordance de tous ces phénomènes, si étrangers l'un à l'autre, montre évidemment qu'ils ont tous pour principe la même cause, et l'on doit la regarder comme la preuve la plus irrécusable de la loi de la pesanteur universelle.

13. Pour traiter dans toute sa généralité la question du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, nous supposerons d'abord qu'aucune force accélératrice ne trouble le mouvement de rotation résultant de l'impulsion primitive qu'elle a reçue, et nous verrons quelles ont dû être, dans ce cas, les circonstances initiales du mouvement pour que les résultats de la théorie s'accordent avec les phénomènes observés. Nous considérerons ensuite l'action perturbatrice du Soleil et de la Lune, et nous déterminerons les altérations qu'elle doit produire dans les mouvements de l'axe de rotation de la Terre, soit dans l'intérieur du sphéroïde, soit relativement aux étoiles.

Les intégrales (d), n° 5, s'appliquent évidemment au cas que nous allons considérer, et les résultats qui s'y rapportent pourraient s'en tirer directement; mais il est plus simple de les déduire des équations différentielles dont ces intégrales dérivent. Reprenons donc les trois équations (B); en faisant abstraction des forces perturbatrices, c'est-à-dire en regardant comme nuls leurs seconds membres, on aura

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}\,dp + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\,qr\,dt &= 0,\\ \mathrm{B}\,dq + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\,rp\,dt &= 0,\\ \mathrm{C}\,dr + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\,pq\,dt &= 0. \end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{a})$$

L'axe instantané de rotation de la Terre s'éloignant toujours très-peu de son troisième axe principal, comme les observations l'indiquent, p et q sont de très-petites quantités dont on peut, sans erreur sensible, négliger le produit dans la dernière des équations précédentes, ce qui d'ailleurs est d'autant plus permis, que la figure de la Terre étant à très-peu près celle d'un sphéroïde de révolution, la différence B — A des deux moments d'inertie B et A est aussi une fort petite quantité. Cette équation se réduit ainsi à $dr = 0$; d'où l'on tire $r = n$, n étant une constante qui représente la vitesse moyenne angulaire de rotation de la Terre autour de son troisième axe principal. Si l'on substitue cette valeur dans les deux premières équations (a), on aura

$$\mathrm{A}\,dp + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\,nq\,dt = 0,\qquad \mathrm{B}\,dq + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\,np\,dt = 0.$$

On satisfait à ces deux équations (nº **34**, livre I) en prenant

$$p = \mathrm{K} \sin(n't + l'), \quad q = i\mathrm{K} \cos(n't + l'),$$

K et l' étant deux constantes arbitraires, et n' et i deux quantités données par les équations

$$n' = n\sqrt{\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\mathrm{AB}}}, \quad i = \sqrt{\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\mathrm{A}}{(\mathrm{B}-\mathrm{C})\mathrm{B}}}.$$

Déterminons les mouvements de l'axe de rotation dans l'espace. La seconde des équations (a) du nº **1** donne

$$\frac{d\theta}{dt} = q \sin\varphi - p \cos\varphi.$$

Si l'on néglige, comme nous le faisons, les quantités très-petites du second ordre, par rapport à p et à q, il suffira de substituer pour φ, dans cette équation, sa valeur indépendante de ces quantités. La première des équations (a) donne, dans ce cas, $d\varphi = n\,dt$, et par conséquent $\varphi = nt + l$, l étant une constante arbitraire. L'équation précédente, en y mettant pour p et q leurs valeurs, deviendra donc (nº **34**, livre II)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{K}(i-1)}{2}\sin(nt+n't+l+l') + \frac{\mathrm{K}(i+1)}{2}\sin(nt-n't+l-l');$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$= h + \frac{\mathrm{K}(1-i)}{2(n+n')}\cos(nt+n't+l+l') + \frac{\mathrm{K}(1+i)}{2(n-n')}\cos(nt-n't+l-l'),$$

h étant une constante arbitraire.

Il suit de cette analyse que, si la constante K avait une valeur sensible, les pôles feraient à la surface de la Terre des oscillations d'une étendue arbitraire, dont la période dépendrait des moments d'inertie du sphéroïde terrestre, et serait, d'après les données que l'on a sur les valeurs de A, B, C, d'environ deux années. L'angle θ changerait aussi de valeur durant cet espace de temps; il aurait de plus des inégalités dépendantes de l'angle nt, c'est-à-dire qu'il varierait même dans le court intervalle d'une journée; or les observations les plus précises n'ayant jamais fait apercevoir, dans la hauteur du pôle, aucune variation de ce genre, il en faut conclure que K est insensible, et que, par conséquent, on peut supposer que les oscillations de l'axe terrestre qui dépendent de l'état initial du mouvement, sont depuis longtemps anéanties, et qu'il ne subsiste maintenant que celles qui ont une cause permanente.

14. Comme les valeurs que nous avons trouvées (nº 34, livre I) pour p et q, ne sont qu'approchées, il pourrait rester quelque doute sur l'exactitude du résultat précédent; mais il est facile de la démontrer d'une manière tout à fait rigoureuse par les considérations suivantes. En intégrant directement les équations (a), nous avons obtenu (nº 35, livre I) ces deux intégrales,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Si, après avoir multiplié la première par C, on la retranche de la seconde, on aura

$$A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = D^2, \quad (m)$$

en représentant, pour abréger, par D^2 la quantité constante $Ch - k^2$.

On voit par cette équation que, si les valeurs de p

et q sont supposées très-petites à un instant quelconque, la constante du second membre sera aussi très-petite; les quantités p et q demeureront donc toujours peu considérables, puisque chacune d'elles sera moindre que la constante D. Par conséquent, si ces quantités n'ont que des valeurs inappréciables, comme cela a lieu à l'époque où nous sommes, on peut être assuré qu'elles resteront éternellement insensibles; on aura, dans tous les temps,

$$p < \frac{D}{\sqrt{A(C-A)}}, \quad q < \frac{D}{\sqrt{B(C-B)}},$$

et l'axe de rotation de la Terre coïncidera toujours à très-peu près avec son troisième axe principal.

Ce résultat suppose tous les termes du premier membre de l'équation (m) de même signe, ce qui exige que C soit le plus grand ou le plus petit des moments d'inertie relatifs aux axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps. C'est, en effet, ce qui a lieu pour la Terre, sa figure étant celle d'un sphéroïde aplati vers ses pôles, l'axe autour duquel elle semble tourner, à très-peu près, est le plus petit de ses trois axes principaux, et, par conséquent, celui auquel se rapporte le plus grand moment d'inertie. Dans le cas contraire, on ne pourrait rien conclure de l'équation (m) relativement aux quantités p et q; mais on voit aussi qu'alors les sinus et cosinus que renferment les valeurs de p et q, se changent en exponentielles; elles pourraient donc croître indéfiniment avec le temps, et l'équilibre du globe terrestre en serait à la longue entièrement bouleversé.

Nous n'aurons donc plus à nous occuper désormais que de l'action des forces perturbatrices sur le sphéroïde terrestre. Nous examinerons dans les chapitres suivants leur influence sur les déplacements des pôles à la surface de la Terre, sur les variations de sa vitesse de rotation, et enfin sur les mouvements de ses axes principaux autour du centre de gravité. Ces différentes questions renferment des résultats extrêmement importants pour la théorie du système du monde. Des deux premières dépendent la permanence des latitudes géographiques; l'invariabilité du jour sidéral, cette donnée si précieuse pour tous les calculs astronomiques; enfin la stabilité même de l'univers. La dernière comprend tous les phénomènes relatifs aux mouvements de l'équateur par rapport aux étoiles, c'est-à-dire la précession des équinoxes et la nutation de l'axe de rotation de la Terre. On verra la solution de ces questions, qui avait exigé jusqu'ici tous les efforts de l'analyse la plus compliquée, résulter, de la manière la plus simple et la plus complète, des formules générales que nous avons développées dans le chapitre précédent. Ces formules, comme nous l'avons dit, s'appliquent également au mouvement de la Lune, troublé par l'action de la Terre; mais les conséquences que nous allons en tirer ne doivent pas s'étendre à cet astre, à cause du rapport commensurable qui existe entre le moyen mouvement de rotation de la Lune et le moyen mouvement du centre de la force perturbatrice.

CHAPITRE III.

DÉPLACEMENT DES PÔLES A LA SURFACE DE LA TERRE ET VARIATION DE LA VITESSE DE ROTATION.

15. Nous supposerons dans ce qui va suivre que, sans l'action du Soleil et de la Lune, la Terre tournerait rigoureusement autour de son troisième axe principal, en sorte que les écarts de l'axe instantané de rotation ne peuvent être attribués qu'à l'action des forces perturbatrices. Cette hypothèse est fondée sur les résultats du chapitre précédent, où nous avons démontré que les oscillations de l'axe de rotation de la Terre, dues à l'état initial du mouvement, demeureront toujours insensibles.

Il suit de là que les quantités p et q sont de l'ordre des forces perturbatrices, puisque la fonction $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, qui exprime le sinus de l'angle formé par l'axe instantané avec le troisième axe principal, doit être nulle en même temps qu'elles. Le déplacement des pôles à la surface de la Terre dépendra des valeurs finies de ces deux quantités, et il s'agira d'examiner avec soin les différentes inégalités auxquelles elles peuvent être assujetties en vertu de l'action des forces perturbatrices, pour s'assurer qu'il n'en existe aucune que l'intégration puisse rendre appréciable, et que les pôles, par conséquent, demeureront dans tous les temps invariables à la surface du globe, comme ils le sont aujourd'hui.

Cela posé, la troisième des équations (C), n° **2**, donne en l'intégrant et en négligeant les quantités de l'ordre des forces perturbatrices, $r = n$. La constante n exprime aux quantités du premier ordre la vitesse de rotation de la Terre, car cette vitesse est égale à $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ qui ne diffère de r qu'aux quantités près du second ordre.

Les deux dernières équations (a), n° **1**, montrent que les différentielles $d\theta$ et $d\psi$ sont de même ordre que p et q, les angles θ et ψ sont donc constants quand on néglige les quantités du premier ordre. Dans ce cas, la première de ces trois équations se réduit à $d\varphi = ndt$, d'où l'on tire $\varphi = nt + c$, c étant une constante arbitraire.

Les équations (o), n° **33**, livre I, qui déterminent la position de l'équateur par rapport au plan principal de projection, ou au plan qui serait invariable sans l'action des forces perturbatrices, donnent

$$\sin\theta_{,} \sin\varphi_{,} = -\frac{Ap}{k}, \quad \sin\theta_{,} \cos\varphi_{,} = -\frac{Bq}{k}.$$

On tire de là

$$\sin\theta_{,} = \frac{\sqrt{A p^2 + B q^2}}{k}.$$

L'angle $\theta_{,}$ représente l'inclinaison de l'équateur sur le plan principal de projection, cet angle est, comme on voit, de l'ordre des forces perturbatrices; on pourra donc le supposer nul, lorsqu'on néglige les quantités de cet ordre, et l'on aura alors, n° **35**, livre I,

$$\theta = \gamma, \quad \psi = \alpha, \quad \varphi = \varphi_{,} - \psi_{,,}$$

ce qui doit en effet résulter de la coincidence de l'équateur et du plan principal de projection.

16. Reprenons maintenant l'équation (m) à laquelle nous sommes parvenus, n° **14**,

$$A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2 = Ch - k^2. \quad (m)$$

Les deux termes du premier membre étant supposés de même signe, ce qui a lieu lorsque C est le plus grand ou le plus petit des trois moments d'inertie du sphéroïde, chacun de ces termes est plus petit que la quantité qui forme le second membre, en sorte que si, pour abréger, on fait $Ch - k^2 = (C - A)(C - B)e^2$, on aura

$$p < e\sqrt{\frac{C - B}{A}}, \quad q < e\sqrt{\frac{C - A}{B}}.$$

Sans l'action des forces perturbatrices, la constante e serait nulle ou tout à fait insensible, n° **13**; il s'agit donc de prouver que l'action de ces forces n'introduit dans son expression aucune inégalité séculaire qui puisse devenir considérable dans la suite des temps, et que, par conséquent, les quantités p et q seront toujours insensibles comme elles le sont aujourd'hui.

Faisons, pour abréger, $\frac{C - B}{A} = a$, $\frac{C - A}{B} = b$, ce qui donne $e^2 = \frac{Ch - k^2}{ABab}$. En différentiant cette expression et en substituant pour dh et dk leurs valeurs données par les formules n° 7, on aura

$$ede = \frac{1}{\mathrm{AB}\,ab}\left(\mathrm{C}d'\mathrm{V} - kdt\,\frac{d\mathrm{V}}{dg}\right). \quad (n)$$

Si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport aux forces perturbatrices et qu'on regarde V comme une fonction donnée des variables φ, ψ, θ, il suffira dans l'équation précédente de substituer dans V qui est déjà du premier ordre, pour φ, ψ et θ leurs valeurs indépendantes des forces perturbatrices. On pourra donc mettre $\varphi_{,} - \psi_{,}$ à la place de φ, α et γ à la place de ψ et θ. Or on voit, d'après les valeurs de $\varphi_{,}$ et de $\psi_{,}$, données n° 35, livre I, que la différence $\varphi_{,} - \psi_{,}$ est égale à la constante g augmentée d'une certaine fonction de p, q, r, h, k, et comme les valeurs de p, q, r ne renferment aucune des trois constantes α, γ, g, il s'ensuit qu'on aura

$$\frac{d\mathrm{V}}{dg} = \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha} = \frac{d\mathrm{V}}{d\psi}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\gamma} = \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}.$$

D'ailleurs, en négligeant les forces perturbatrices, on a $\varphi = nt + c$, par conséquent

$$\frac{d\mathrm{V}}{dg} = \frac{d\mathrm{V}}{ndt}.$$

Quant à la constante k qui multiplie une quantité du premier ordre dans l'équation (n), nous remarquerons que si l'on néglige les quantités de cet ordre, p et q sont nuls et l'on a $r = n$; l'équation

$$k^2 = \mathrm{A}^2 p^2 + \mathrm{B}^2 q^2 + \mathrm{C}^2 r^2$$

donne donc, dans ce cas, $k = \mathrm{C}n$. L'équation (n) deviendra, par la substitution de ces valeurs,

$$ede = \frac{1}{ABab}\left(Cd'V - Cndt\frac{dV}{ndt}\right) = 0,$$

en observant que $d'V$ désigne, n° **10**, la différentielle de V prise en ne faisant varier que le temps t introduit par la substitution de la valeur de φ, c'est-à-dire qu'autant qu'il est multiplié par la constante n, puisque l'on peut dans cette première approximation regarder les angles ψ et θ comme des constantes.

La quantité e est donc constante tant qu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, voyons maintenant ce que devient la variation de e lorsque l'on considère le carré de ces forces. Dans ce cas il faut dans l'équation (n) substituer $Cn + \delta k$ à la place de k et $V + \delta V$ à la place de V, δk désignant une quantité du premier ordre et δV une quantité du deuxième. On aura ainsi, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$ede = \frac{1}{ABab}\left(Cd'.\delta V - Cndt\frac{d.\delta V}{dg} - \delta k dt\frac{dV}{dg}\right). \quad (p)$$

Nous avons trouvé, n° **11**, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second,

$$\delta V = \frac{dV}{dh}\delta h + \frac{dV}{dl}\delta l + \frac{dV}{dk}\delta k + \frac{dV}{dg}\delta g + \frac{dV}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dV}{d\gamma}\delta\gamma.$$

Pour former la différentielle $d'.\delta V$, il faut, numéro cité, différentier seulement par rapport au temps t contenu dans les valeurs des variables φ, ψ, θ, les différences partielles de V qui multiplient les variations δh, δl, etc. Or, dans les différences partielles de la fonction V on peut substituer $nt + c$ à la place de φ et regarder ψ et θ comme constants ; il faut aussi avoir soin, en prenant la différence partielle de ∂V par rapport à g, de ne point faire varier la quantité g introduite par la substitution des valeurs de ∂h, ∂l, etc. Si l'on différentie de cette manière et si l'on remarque que $\frac{dV}{dg} = \frac{dV}{ndt}$, on aura évidemment

$$\frac{d.\partial V}{dg} = \frac{d.\partial V}{ndt} = \frac{1}{ndt} d'.\partial V.$$

L'équation (p), en substituant pour ∂k sa valeur, n° 7, donnera donc simplement

$$ede = -\frac{dt}{ABab}\left(\frac{dV}{dg}\right)\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right);$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$e^2 = \text{const} - \frac{1}{ABab}\left[\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right)\right]^2.$$

La différentielle $\frac{dV}{dg}$ ou $\frac{dV}{d\varphi}$ ne renferme que des termes dépendants de l'angle φ ou du mouvement diurne de la Terre ; elle ne contient par conséquent aucune inégalité susceptible de croître par l'intégration, puisque l'observation montre que toutes les inégalités dépendantes du mouvement diurne qui peuvent exister dans la position de l'axe terrestre, sont absolument insensibles. Il suit de là que tous les termes de l'expression de $\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right)$ demeurent, après l'intégration, du même ordre que les termes correspondants de la différentielle $dt\,\frac{dV}{dg}$, et l'on en peut conclure que, si la quantité

$\left[\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right)\right]^2$ renferme des inégalités séculaires, elles sont nécessairement de l'ordre du carré des forces perturbatrices.

En effet, considérons dans l'expression de V deux termes dépendants du même argument $i\varphi$, on aura

$$V = H\cos(i\varphi + ft + l) - H'\cos(i\varphi + f't + l').$$

En différentiant par rapport à φ et intégrant l'expression résultante en supposant $\varphi = nt + c$, on en conclura

$$\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right) = \frac{Hi}{in+f}\cos(i\varphi + ft + l) - \frac{H'i}{in+f'}\cos(i\varphi + f't + l'),$$

et il en résultera dans $-\left[\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right)\right]^2$ un terme de cette forme,

$$-\left[\int dt\left(\frac{dV}{dt}\right)\right]^2 = \frac{HH'i^2}{(in+f)(in+f')}\cos[(f'-f)t + l' - l],$$

inégalité indépendante de l'angle φ, mais de l'ordre du carré des forces perturbatrices, puisque les quantités H et H′ sont supposées de l'ordre de ces forces et qu'elles n'augmentent pas par les diviseurs $in+f$, et $in+f'$ que l'intégration leur fait acquérir.

La quantité e^2 ne peut donc renfermer aucun terme croissant comme le temps t, ni aucune inégalité périodique ou séculaire susceptible de s'abaisser au premier ordre ; on peut donc la regarder comme une quantité rigoureusement constante lorsqu'on fait abstraction des quantités du second ordre ; il résulte d'ailleurs de l'équation (m) que quelques variations qu'éprouvent dans la suite des siècles les valeurs de p et q, ces quantités resteront du même ordre que e;

elles demeureront donc toujours de l'ordre des forces perturbatrices et, par conséquent, insensibles comme elles le sont aujourd'hui.

17. Nous avons montré, dans le n° **15**, que la position de l'axe de rotation de la Terre, dans l'intérieur du globe, n'est soumise à aucune inégalité périodique que les observations les plus précises aient pu rendre sensible; nous venons de voir qu'elle n'est affectée non plus d'aucune inégalité séculaire susceptible d'acquérir une valeur considérable, d'où il résulte généralement qu'elle ne peut être sujette à aucune espèce de variation qu'un intervalle plus ou moins long puisse rendre appréciable.

Concluons donc que l'axe de rotation de la Terre coïncidera toujours à très-peu près avec son troisième axe principal, et que les pôles et l'équateur répondront dans tous les temps aux mêmes points de sa surface. Si cette coïncidence n'a pas rigoureusement lieu, on est assuré du moins que les oscillations de l'axe de rotation, autour du troisième axe principal, seront toujours insensibles aux observations les plus précises, et l'on a calculé en effet, d'après les données qu'on peut avoir sur la constitution du sphéroïde terrestre, qu'elles ne s'élèveraient pas à un *dixième* de seconde sexagésimale en plusieurs millions de siècles.

18. Considérons maintenant la vitesse de rotation de la Terre. Si l'on nomme ρ cette vitesse, $\int \rho\, dt$ sera le nombre de degrés que décrit dans le temps t l'un quelconque des méridiens du sphéroïde terrestre; il en résulte que si ρ contenait un terme proportionnel au temps t, l'intégrale $\int \rho\, dt$ en renfermerait un croissant comme le carré du temps, et la durée du jour en serait à la longue sensiblement altérée.

Il est donc extrêmement important d'examiner, avec le plus grand soin, la valeur de $d\rho$ et de démontrer qu'elle ne renferme aucune inégalité séculaire susceptible de s'abaisser au premier ordre, par la double intégration que subit cette quantité dans l'expression $\int dt \int d\rho$. On a, par ce qui précède,

$$\rho = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Nous venons de voir que p et q n'auront jamais de valeurs appréciables; la vitesse angulaire de rotation de la Terre sera donc toujours, à très-peu près, égale à r, et si elle subit quelques altérations, elles ne proviendront que des variations auxquelles cette quantité peut être assujettie. Nous allons donc examiner quelles sont les inégalités que doit contenir l'expression de r.

Reprenons, pour cela, l'équation

$$\text{A}p^2 + \text{B}q^2 + \text{C}r^2 = h.$$

Si l'on différentie cette équation, en y faisant varier à la fois les variables et les constantes qu'elle renferme, on en tirera

$$\text{A}pdp + \text{B}qdq + \text{C}rdr = \tfrac{1}{2}dh. \quad (q)$$

Si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, les différentielles dp, dq, dr étant déjà du premier ordre, on pourra, dans cette équation, supprimer les deux premiers termes, puisque p et q sont de l'ordre des forces perturbatrices, faire $r = n$ dans la troisième, et substituer pour dh sa valeur donnée par la formule (l), n° **10**. On aura ainsi

$$dr = \frac{1}{Cn} d'V, \quad (r)$$

et dans le second membre, il faudra mettre $nt + c$ à la place de φ et regarder ψ et θ comme des constantes. Si l'on suppose donc la fonction V développée en série de sinus et de cosinus des multiples de l'angle φ ou de l'angle $nt + c$, les termes du développement qui ne le renfermeront pas, disparaîtront par la différentiation dans $\frac{dV}{ndt}$: la valeur dr ne contiendra donc que des termes périodiques dépendants de l'angle $nt + c$, et, par conséquent, l'expression de r ne renfermera que des inégalités dont la période sera d'un jour ou d'un sous-multiple du jour, inégalités qui resteront toujours insensibles et de l'ordre des forces perturbatrices, puisque l'observation la plus attentive ne laisse apercevoir aucune variation journalière dans la vitesse de rotation du globe.

19. Voyons maintenant quelles sont les inégalités qui peuvent résulter, dans l'expression de la vitesse r, de la considération des quantités dépendantes du carré des forces perturbatrices. De l'équation (q), on tire

$$Crdr = \tfrac{1}{2} dh - \tfrac{1}{2} d(Ap^2 + Bq^2).$$

Si l'on substitue dans cette équation $n + \delta r$ à la place de r, δr étant une quantité du premier ordre déterminée par l'intégration de l'équation (r), on aura

$$dr = -\frac{1}{C^2n^3}d'V\int d'V + \frac{1}{2Cn}dh - \frac{d(Ap^2+Bq^2)}{2Cn}.$$

Examinons successivement les différentes inégalités que peut renfermer chacun des termes de la valeur de dr, en rejetant toutes celles qui dépendront de l'angle $nt+c$, puisque nous sommes assurés d'avance qu'elles ne peuvent devenir sensibles.

Pour que l'angle $nt+c$ puisse disparaître dans le premier terme de cette valeur, il faut combiner ensemble les termes de ses deux facteurs qui renferment le même multiple de cet angle. Or si, dans l'expression de la fonction V développée en série de cosinus d'angles proportionnels à φ, on considère deux termes dépendants du même multiple $i\varphi$, on aura

$$V = H\cos(i\varphi + ft + g) + H'\cos(i\varphi + f't + g'),$$

H, H', f, f', g, g' étant des constantes arbitraires dont les deux premières sont de l'ordre des forces perturbatrices. Si l'on substitue $nt+c$ à la place de φ, on aura

$$\begin{aligned} d'V = &- indtH\sin(int + ic + ft + g) \\ &- indtH'\sin(int + ic + f't + g'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int d'V = &\frac{in}{in+f}H\cos(int + ic + ft + g) \\ &+ \frac{in}{in+f'}H'\cos(int + ic + f't + g'). \end{aligned}$$

Si l'on combine ensemble ces deux expressions, on aura

$$dV'\int dV' = -\frac{HH'i^2n^2(f'-f)\,dt}{2(in+f)(in+f')}\sin[(f'-f)t+g'-g]$$

en rejetant tous les termes dépendants de l'angle $2nt+2c$ dont la période est à peu près d'un demi-jour.

Les deux termes que nous avons considérés dans V, produiront donc, dans la valeur de dr, le terme

$$dr = \frac{HH'i^2(f'-f)\,dt}{2C^2n(in+f)(in+f')}\sin[(f'-f)t+g'-g],$$

qui n'est pas susceptible de s'abaisser au premier ordre dans la valeur de r; car en l'intégrant on a

$$r = -\frac{HH'i^2}{2C^2n(in+f')(in+f')}\cos[(f-f')t+g'-g],$$

quantité du second ordre, puisque H et H' sont du premier.

Le premier terme de la valeur de dr ne produit donc, dans la vitesse r, aucune inégalité du premier ordre indépendante de l'angle $nt+c$.

Nous avons fait voir, nº **11**, que tous les termes de la valeur de dh pouvaient être mis sous cette forme :

$$d'\left(M\int N\,dt - N\int M\,dt\right).$$

Soit $H\cos(int+ic+ft+g)$ un terme quelconque du développement de M, et soit $H'\cos(int+ic+f't+g')$ le terme du développement de N qui contient le même multiple de l'angle $nt+c$. On aura, en vertu de ces deux termes seulement,

$$d'(M\int Ndt - N\int Mdt) = \frac{HH'i(f'-f)ndt}{2(in+f)(in+f')}\cos[(f'-f)t+g'-g],$$

en rejetant l'inégalité périodique dépendante de l'angle $2\,int + 2\,ic$.

Il en résultera dans la valeur de dr, le terme

$$dr = \frac{HH'i(f'-f)dt}{2\,C(in+f)(in+f')}\cos[(f'-f)t+g'-g],$$

et en intégrant, on aura

$$r = \frac{HH'i}{2\,C(in+f)(in+f')}\sin[(f'-f)t+g'-g],$$

quantité du même ordre que le produit HH'.

Enfin le dernier terme de la valeur de dr étant une différentielle exacte, on aura, en l'intégrant,

$$r = -\frac{Ap^2+Bq^2}{2\,Cn},$$

quantité du second ordre, puisque p et q sont du premier.

20. On peut conclure de ce qui précède, que si l'on néglige les quantités du second ordre, par rapport aux forces perturbatrices, l'expression de r ne contiendra que des inégalités périodiques dépendantes de l'angle $nt + c$ et de ses multiples : de sorte que si sa valeur rigoureuse renferme des termes multipliés par les *sinus* ou les *cosinus* d'angles croissant avec une grande lenteur, leurs coefficients seront au moins du second ordre. La vitesse de rotation de la

Terre n'éprouvera donc, dans la suite des temps, que des variations du même ordre, et l'on pourra toujours regarder son mouvement comme uniforme. En effet, la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe instantané étant (n° 1), $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, l'intégrale $\int dt\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ exprimera le nombre de degrés décrits par la Terre, dans un temps quelconque t; et si l'on développe le radical suivant les puissances de p et q, on aura

$$\int dt\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\int rdt+\frac{1}{2}\int\frac{p^2}{r}dt+\frac{1}{2}\int\frac{q^2}{r}dt+\ldots.$$

Or les inégalités séculaires que renferme r étant toutes du second ordre, il s'ensuit qu'elles ne peuvent s'abaisser qu'au premier dans la valeur de l'intégrale $\int rdt$. De même, puisque les inégalités que contiennent p et q, sont toutes de l'ordre des forces perturbatrices, comme nous l'avons démontré n° 16, si $\frac{p^2}{r}$ et $\frac{q^2}{r}$ renferment des inégalités séculaires, elles sont du second ordre et ne pourront s'abaisser qu'au premier dans les intégrales $\int\frac{p^2}{r}dt$, $\int\frac{q^2}{r}dt$.

Les inégalites séculaires dont peut être affecté le mouvement de rotation de la Terre, sont donc toutes de l'ordre des forces perturbatrices; on peut, par conséquent, en faire abstraction sans erreur sensible et considérer ce mouvement comme parfaitement uniforme.

21. Concluons donc, enfin, que l'action du Soleil

et de la Lune sur le sphéroïde terrestre ne produira jamais dans la position des pôles à sa surface aucun déplacement appréciable, ni aucune variation sensible dans la vitesse et dans l'uniformité de son mouvement diurne de rotation; résultats importants qui assurent pour toujours la stabilité des latitudes terrestres, et l'invariabilité du jour sidéral.

On verra, dans le chapitre suivant, que ces mêmes astres, qui sont impuissants pour produire aucun dérangement dans la position de l'axe terrestre dans l'intérieur du globe, font varier, au contraire, d'une manière très-sensible, sa position dans l'espace; en sorte qu'il ne correspond pas, dans tous les siècles, aux mêmes points du ciel; d'où résultent, comme nous l'avons dit, les phénomènes de *la nutation* et de *la précession des équinoxes*. On peut se rendre raison de cette différence en remarquant que les oscillations de l'axe instantané de rotation, par rapport au troisième axe principal de la Terre, dépendent simplement des quantités p et q, tandis que les mouvements de ce dernier axe, par rapport aux étoiles, dépendent des angles θ et ψ qui résultent, comme on le voit par les équations (a), nº 1, d'une double intégration des valeurs différentielles de p et de q. On conçoit donc comment ces quantités, d'abord insensibles, peuvent ensuite devenir considérables par les très-petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENTS DE L'AXE DE ROTATION DE LA TERRE DANS L'ESPACE, OU NUTATION DE L'AXE TERRESTRE ET PRÉCESSION DES ÉQUINOXES.

---

22. Après nous être occupé, dans le chapitre précédent, des déplacements de l'axe de rotation de la Terre dans l'intérieur du globe, nous allons déterminer, dans celui-ci, les mouvements du même axe relativement aux étoiles; ce sont ces mouvements qui produisent, comme on sait, les importants phénomènes de *la précession* et de *la nutation*.

On peut employer, pour cette détermination, soit l'intégration des formules du mouvement troublé, soit les formules de la variation des constantes arbitraires. Nous emploierons la première méthode comme la plus directe, et nous montrerons ensuite comment les formules qui déterminent les mouvements de l'axe de rotation de la Terre, peuvent se déduire des formules générales (P), n° **7**.

Reprenons les trois équations (C) du n° **2**,

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{A}dp + (\mathrm{C}-\mathrm{B})qrdt \\
&= dt\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}+\cos\theta\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)-\cos\varphi\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)\right], \\
&\mathrm{B}dq + (\mathrm{A}-\mathrm{C})prdt \\
&= dt\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}+\cos\theta\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)+\sin\varphi\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)\right], \\
&\mathrm{C}dr + (\mathrm{B}-\mathrm{A})pqdt = dt\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous avons vu, n° 1, que les angles θ et ψ fixent la position de l'équateur du corps dont on considère le mouvement de rotation; c'est donc de la détermination de ces deux angles que nous aurons spécialement à nous occuper dans ce chapitre. Ces angles sont donnés au moyen des quantités p et q et de l'angle φ, supposés connus, par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= q dt \sin\varphi - p dt \cos\varphi, \\ \sin\theta\, d\psi &= q dt \cos\varphi + p dt \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Mais si l'on multiplie par $\sin\varphi$ la première des équations (1) et qu'on l'ajoute à la seconde multipliée par $\cos\varphi$, qu'on multiplie ensuite les mêmes équations, la première par $\cos\varphi$, la seconde par $\sin\varphi$, et qu'on les retranche l'une de l'autre, on trouve les deux suivantes :

$$\mathrm{A}\,dp \sin\varphi + \mathrm{B}\,dq \cos\varphi + r dt(\mathrm{A}p \sin\varphi - \mathrm{B}q \cos\varphi)$$

$$+ \mathrm{C}r(q dt \sin\varphi - p dt \cos\varphi) = \frac{dt}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi} + \cos\theta \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right),$$

$$\mathrm{A}\,dp \cos\varphi - \mathrm{B}\,dq \sin\varphi - r dt\,(\mathrm{A}p \cos\varphi + \mathrm{B}q \sin\varphi)$$

$$+ \mathrm{C}r(q dt \cos\varphi + p dt \sin\varphi) = -\frac{dt}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right).$$

Si l'on substitue pour $q dt \sin\varphi - p dt \cos\varphi$ et $q dt \cos\varphi + p dt \sin\varphi$ leurs valeurs données par les équations (2) et qu'on observe que n représentant le moyen mouvement diurne de la Terre, on peut, lorsqu'on néglige le carré des forces perturbatrices, supposer $r = n$ dans les équations précédentes, puisque p

et q sont déjà de l'ordre de ces forces, on aura

$$\left.\begin{aligned} d\theta = {} & \frac{\cos\theta\, dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right) + \frac{dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right) \\ & - \frac{d.(\mathrm{A}p\sin\varphi + \mathrm{B}q\cos\varphi)}{\mathrm{C}n}, \\ d\psi = {} & -\frac{dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right) - \frac{d.(\mathrm{A}p\cos\varphi - \mathrm{B}q\sin\varphi)}{\mathrm{C}n\sin\theta}. \end{aligned}\right\} (3)$$

Ces formules serviront à déterminer les valeurs des angles θ et ψ qui fixent la position de l'équateur terrestre par rapport à un plan fixe quelconque, et comme elles ne renferment que les différentielles premières de ces deux quantités, elles sont sous une forme très-commode pour cette détermination.

23. Avant d'aller plus loin, il convient de faire voir comment les équations (3) peuvent se déduire des formules générales (P), n° 7, en sorte que les lois du mouvement de l'axe terrestre, soit dans l'intérieur du globe, soit dans l'espace, se trouvent toutes contenues dans la théorie de la variation des constantes arbitraires.

Pour cela, observons que la position, par rapport au plan principal de projection, de l'axe de rotation de la Terre, ou du plan qui lui est perpendiculaire et qu'on nomme l'équateur, dépend des deux angles $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, dont l'un détermine l'inclinaison de l'équateur sur le plan principal de projection, qui serait invariable sans l'action des forces perturbatrices, et l'autre la longitude de son nœud comptée sur ce plan à partir d'une droite fixe. L'angle $\varphi_{,}$ détermine la longitude du même nœud comptée sur l'équateur. Lorsque les valeurs des angles $\theta_{,}$, $\psi_{,}$, $\varphi_{,}$ sont connues, on détermine celles des angles θ, ψ, φ, qui se rapportent à un plan fixe quelconque, au moyen des équations suivantes, dans lesquelles γ représente l'inclinaison du plan de projection sur le plan fixe, et α l'angle que forme l'intersection de ces deux plans avec la droite d'où l'on compte l'angle ψ sur ce dernier plan,

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\gamma\cos\theta_{,} - \sin\gamma\sin\theta_{,}\cos\psi_{,}, \\ \sin(\psi-\alpha) &= \frac{\sin\theta_{,}\sin\psi_{,}}{\sin\theta}, \\ \sin(\varphi_{,}-\varphi) &= \frac{\sin\gamma\sin\psi_{,}}{\sin\theta}. \end{aligned}\right\} (4)$$

L'angle $\theta_{,}$ est du même ordre que les déplacements des pôles à la surface de la Terre, n° 15, et si l'on fait abstraction des forces perturbatrices, on peut supposer $\theta_{,} = 0$, les trois équations (4) donnent alors

$$\theta = \gamma, \quad \psi = \alpha, \quad \varphi = \varphi_{,} - \psi_{,}. \quad (5)$$

Ainsi donc, sans l'action des forces perturbatrices, l'inclinaison de l'équateur sur le plan fixe serait constante et la longitude ψ de son nœud serait invariable. Mais l'attraction du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre fait varier d'une manière très-lente les angles θ et ψ, et ce sont ces variations qui constituent le phénomène de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre.

Dans les recherches qui ont pour objet la détermination du mouvement de rotation de la Terre, on a coutume de négliger les carrés et les puissances supérieures des forces perturbatrices. Il suffit, dans ce cas, de conserver dans les valeurs de θ et de ψ les termes dépendants de la première puissance de ces forces. Or, puisque $\theta_{,}$ est du premier ordre, on aura d'abord $\cos\theta_{,} = 1$, et ensuite, en vertu des équations (4),

$$\sin\theta_{,}\sin\psi_{,} = \sin\theta_{,}\sin(\varphi_{,} - \varphi),$$
$$\sin\theta_{,}\cos\psi_{,} = \sin\theta_{,}\cos(\varphi_{,} - \varphi).$$

En développant les seconds membres de ces équations et substituant pour $\sin\theta_{,}\sin\varphi_{,}$ et $\sin\theta_{,}\cos\varphi_{,}$ leurs valeurs n° **35**, livre I, on aura

$$\sin\theta_{,}\sin\psi_{,} = \frac{Bq\sin\varphi - Ap\cos\varphi}{k},$$

$$\sin\theta_{,}\cos\psi_{,} = -\frac{Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi}{k}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux premières équations (4), elles deviennent

$$\cos\theta = \cos\gamma + \sin\gamma\left(\frac{Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi}{k}\right),$$
$$\sin(\psi - \alpha) = \frac{Bq\sin\varphi - Ap\cos\varphi}{k\sin\theta}.$$

La première de ces expressions, en négligeant les quantités du second ordre, peut s'écrire ainsi :

$$\cos\theta = \cos\left(\gamma - \frac{Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi}{k}\right).$$

On aura donc, aux quantités près du même ordre,

$$\theta = \gamma - \frac{Bq\cos\varphi + Ap\sin\varphi}{k},$$

$$\psi = \alpha + \frac{Bq\sin\varphi - Ap\cos\varphi}{k\sin\theta}.$$

On peut d'ailleurs dans cette seconde équation substituer $\sin\gamma$ à la place de $\sin\theta$ dans les termes multipliés par p et q qui sont déjà du premier ordre.

Nous avons vu, n° 15, que lorsqu'on néglige le carré des forces perturbatrices, on a

$$\frac{dV}{d\alpha}=\frac{dV}{d\psi},\quad \frac{dV}{d\gamma}=\frac{dV}{d\theta},\quad \frac{dV}{dg}=\frac{dV}{d\varphi}.$$

Que l'on substitue ces valeurs et que l'on fasse de plus $k=\mathrm{C}n$ dans les deux dernières formules (P) du n° 7, on aura

$$d\gamma=\frac{\cos\theta\,dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)+\frac{dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right),$$

$$d\alpha=-\frac{dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

formules qui ont, sur celles du numéro cité, l'avantage d'employer la quantité V sous la forme où elle est donnée immédiatement, c'est-à-dire en fonction des variables φ, ψ et θ.

Différentions maintenant les expressions précédentes de θ et ψ, substituons pour $d\gamma$ et $d\alpha$ leurs valeurs, et faisons $k=\mathrm{C}n$ dans les termes qui sont du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices, nous aurons

$$d\theta=\frac{\cos\theta\,dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)+\frac{dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right)$$

$$-\frac{d.(\mathrm{A}p\sin\varphi+\mathrm{B}q\cos\varphi)}{\mathrm{C}n},$$

$$d\psi=-\frac{dt}{\mathrm{C}n\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)-\frac{d.(\mathrm{A}p\cos\varphi-\mathrm{B}q\sin\varphi)}{\mathrm{C}n\sin\theta}.$$

Ces expressions sont identiques avec les équations (3) auxquelles nous sommes parvenus directement par la considération des formules générales qui déterminent les mouvements de rotation des corps célestes autour de leur centre de gravité. Cette dernière méthode est plus simple sans doute que celle qui consiste à considérer d'abord le mouvement de rotation qui n'est troublé par l'action d'aucune force étrangère, et à faire varier ensuite les constantes que ces formules renferment, en déterminant leurs variations conformément aux principes généraux de la *variation des constantes arbitraires* dans les problèmes de la Mécanique. Mais cette seconde manière d'envisager la question a l'avantage d'établir une analogie très-remarquable entre les formules du mouvement de translation et du mouvement de rotation troublés par l'action des forces secondaires introduites dans le système, et elle nous a servi d'ailleurs à démontrer *la permanence des pôles* à la surface de la Terre et *l'invariabilité* de la vitesse de rotation d'une manière à la fois plus simple et plus rigoureuse qu'on ne pourrait le faire par d'autres méthodes.

24. Des considérations, particulières au mouvement de la Terre, permettent de simplifier considérablement les formules (3) qui déterminent à chaque instant la position de son équateur. En effet, tous les termes des valeurs de $d\theta$ et de $d\psi$ sont insensibles en eux-mêmes, puisqu'ils sont de l'ordre des forces perturbatrices; mais il se peut que quelques-uns d'entre eux deviennent sensibles dans les valeurs de θ

et ψ, soit parce qu'ils s'y trouveront multipliés par le temps t hors des signes *sinus* et *cosinus*, soit à cause des petits diviseurs que leur fera acquérir l'intégration. C'est donc à ces termes seuls qu'il faut avoir égard, et l'on peut rejeter tous les autres des valeurs de $d\theta$ et de $d\psi$; or il est évident que l'on doit supprimer d'abord la partie de ces valeurs qui est une différentielle exacte, parce que les termes qui la composent sont encore après l'intégration de l'ordre des quantités p et q, et par conséquent insensibles, comme on l'a vu dans le chapitre précédent. Les formules (3) donnent simplement ainsi :

$$d\theta = \frac{\cos\theta\, dt}{Cn\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) + \frac{dt}{Cn\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right),$$

$$d\psi = -\frac{dt}{Cn\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\theta}\right).$$

Si l'on substitue maintenant dans la fonction V, qui est du premier ordre, à la place de φ sa valeur $nt + c$, indépendante des forces perturbatrices, il faudra rejeter des valeurs de $d\theta$ et de $d\psi$ tous les termes qui dépendent des *sinus* et des *cosinus* de cet angle, puisqu'il n'en résulterait dans θ et ψ que des inégalités dépendantes du mouvement diurne de la Terre, et qui, par conséquent, seront toujours inappréciables. Supposons donc qu'on ait développé la fonction V en une série de sinus et de cosinus de l'angle φ et de ses multiples; soit F le premier terme du développement, ou la partie indépendante de l'angle φ, on pourra substituer F à la place de V dans les expressions précédentes de $d\theta$ et de $d\psi$, ce qui les réduit aux deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \frac{dt}{Cn\sin\theta}\left(\frac{dF}{d\psi}\right) \\ d\psi &= -\frac{dt}{Cn\sin\theta}\left(\frac{dF}{d\theta}\right). \end{aligned}\right\} (6)$$

C'est sous cette forme remarquable par son élégance et sa simplicité, que M. Poisson a présenté le premier les formules qui déterminent les mouvements du plan de l'équateur par rapport aux étoiles. Il ne s'agit plus que de développer ces formules et de les intégrer ensuite pour en voir dériver toutes les lois de la *précession des équinoxes* et de *la nutation de l'axe terrestre*.

25. Pour développer les équations (6), reprenons la valeur de V du n° **2**, nous aurons V$=$S.V$'dm$, ou, en substituant pour V$'$ sa valeur (n° **5**, livre II),

$$V = S.\frac{L\,dm}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}},$$

x', y', z' étant les coordonnées de l'astre L relatives aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité de la Terre, x, y, z les coordonnées de l'élément dm rapportées aux mêmes axes ; enfin le signe intégral S étant relatif à la molécule dm et à ses coordonnées, et devant s'étendre à la masse entière du globe.

Si dans cette expression on fait, pour abréger,

$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2, \quad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

on aura

$$V = S.\frac{L\,dm}{\sqrt{[r'^2-2(xx'+yy'+zz')+r^2]}}.$$

Les distances des centres des forces perturbatrices au centre de la terre étant fort grandes relativement aux dimensions de cette planète, il en résulte qu'on peut réduire la fonction V en une série très-convergente, en la développant suivant les puissances descendantes de r'. Si l'on observe en outre que les six intégrales $S.xdm$, $S.ydm$, $S.zdm$, $S.xydm$, $S.xzdm$, $S.yzdm$ sont nulles par les propriétés du centre de gravité et des axes principaux, on aura, de cette manière,

$$V = \frac{L}{r'} S.dm - \frac{1}{2}\frac{L}{r'^3} S.r^2 dm.$$

$$+ \frac{3L}{2r'^5}(x'^2 S.x^2 dm + y'^2 S.y^2 dm + z'^2 S.z^2 dm).$$

Nous omettons, comme on le fait ordinairement, les termes de ce développement qui dépendent du produit de trois ou d'un plus grand nombre de dimensions en x, y, z, lesquels termes sont du même ordre que le cube et les puissances supérieures du rapport $\frac{r}{r'}$, c'est-à-dire de la parallaxe de l'astre L : de sorte que, relativement aux puissances de cette parallaxe, l'approximation suivante est bornée au carré inclusivement.

Nous avons désigné par A, B, C les trois moments d'inertie principaux du sphéroïde terrestre, respectivement relatifs aux axes des x, des y et des z; on aura donc

$$S.(y^2 + z^2)\, dm = A, \quad S.(x^2 + z^2)\, dm = B, \quad S.(x^2 + y^2)\, dm = C,$$

d'où l'on tire

$$S.x^2\,dm = \frac{B+C-A}{2}, \quad S.y^2\,dm = \frac{A+C-B}{2},$$

$$S.z^2\,dm = \frac{A+B-C}{2}.$$

La fonction V deviendra donc, en y substituant ces valeurs,

$$V = \frac{mL}{r'} - \frac{L}{4r'^3}(A+B+C)$$
$$+ \frac{3L}{4r'^5}[x'^2(B+C-A) + y'^2(A+C-B) + z'^2(A+B-C)].$$

Pour introduire, dans cette expression, les angles φ, ψ, θ, il faut transformer les coordonnées x', y', z' de l'astre L, en trois autres X, Y, Z relatives à des axes fixes. Nous prendrons, pour plan fixe des X, Y, le plan de l'écliptique à une époque déterminée; l'angle θ sera, par conséquent, l'inclinaison variable de l'équateur sur l'écliptique, l'angle ψ la longitude de l'intersection de ces deux plans, ou de la ligne mobile des équinoxes, et φ l'angle compris entre cette intersection et l'axe principal des x; on aura, par les formules du n° **31**, livre I[er],

$$x' = (X\cos\psi - Y\sin\psi)\cos\varphi + [(X\sin\psi + Y\cos\psi)\cos\theta - Z\sin\theta]\sin\varphi,$$
$$y' = (Y\sin\psi - X\cos\psi)\sin\varphi + [(X\sin\psi + Y\cos\psi)\cos\theta - Z\sin\theta]\cos\varphi,$$
$$z' = (X\sin\psi + Y\cos\psi)\sin\theta + Z\cos\theta.$$

Avant de substituer ces valeurs dans l'expression de V, remarquons que le rayon vecteur r' de l'astre L doit être indépendant des angles φ, ψ, θ : les termes qui ne contiendront que ce rayon vecteur, disparaîtront donc dans les valeurs des différences partielles de la fonction V relatives à ces angles; on peut donc les supprimer d'avance et donner à l'expression de V cette forme,

$$\mathrm{V} = -\frac{3\mathrm{L}}{2r'^5}(\mathrm{A}x'^2 + \mathrm{B}y'^2 + \mathrm{C}z'^2).$$

Si l'on élève au carré les valeurs de x', y', z', et qu'on les substitue dans cette équation, en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{X}' = \mathrm{X}\cos\psi - \mathrm{Y}\sin\psi, \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{X}\sin\psi + \mathrm{Y}\cos\psi,$$

et en observant que la relation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$ donne

$$\mathrm{X}'^2 + (\mathrm{Y}'\cos\theta - \cancel{\mathrm{Y}}\,z\sin\theta)^2 = r'^2 - (\mathrm{Y}'\sin\theta + \mathrm{Z}\cos\theta)^2,$$

on aura

$$\mathrm{V} = -\frac{3\mathrm{L}}{4r'^5}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\Big\{[\mathrm{X}'^2 - (\mathrm{Y}'\cos\theta - \mathrm{Z}\sin\theta)^2]\cos 2\varphi + 2\mathrm{X}'(\mathrm{Y}'\cos\theta - \mathrm{Z}\sin\theta)\sin 2\varphi]$$

$$+ \frac{3\mathrm{L}}{4r'^5}(\mathrm{A} + \mathrm{B} - 2\mathrm{C})(\mathrm{Y}'\sin\theta + \mathrm{Z}\cos\theta)^2.$$

Il est bon d'observer qu'on obtiendrait identiquement la même valeur en développant la fonction V exprimée au moyen des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x'_{,}$, $y'_{,}$, $z'_{,}$ relatives à des axes fixes, et en substituant ensuite à la place des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ leurs valeurs, n° 2, exprimées en coordonnées relatives aux trois axes principaux du sphéroïde, conformément à l'analyse suivie, numéro cité.

Si l'on rejette les termes dépendants de l'angle φ, la fonction V se change dans la fonction que nous avons désignée par F; on aura donc simplement

$$F = \frac{3L}{4r'^5}(A + B - 2C)(Y' \sin\theta + Z \cos\theta)^2.$$

En différentiant cette expression, on formera les valeurs des quantités $\frac{dF}{d\theta}$ et $\frac{dF}{d\psi}$, qui entrent dans les formules (6); mais pour rendre possible l'intégration de ces formules, il sera nécessaire d'exprimer les coordonnées X, Y, Z de l'astre L, en fonction du temps t.

Pour cela, nommons γ l'inclinaison du plan de l'orbite que décrit l'astre L dans son mouvement autour de la Terre, sur le plan des X, Y ou sur l'écliptique fixe; soient de plus α la longitude de son nœud et v' la longitude de la projection de son rayon vecteur, comptées sur le même plan à partir de l'axe des X; en désignant par s' la latitude, on aura

$$X = r' \cos v' \cos s', \quad Y = r' \sin v' \cos s', \quad Z = r' \sin s'.$$

On a d'ailleurs $\tang s' = \tang\gamma \sin(v' - \alpha)$; en observant donc que γ est généralement un très-petit angle dont on peut négliger les puissances supérieures à la seconde, on trouvera

$tg\, l = tg\, B$

$$X = r' \cos v' \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(v' - \alpha)}, \quad Y = r' \sin v' \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(v' - \alpha)},$$

$$Z = r' \gamma \sin(v' - \alpha),$$

on tire de là

$$X' = r' \cos(v' + \psi) \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(v' - \alpha)},$$

$$Y' = r' \sin(v' + \psi) \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(v' - \alpha)},$$

$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5}$ &c.

et, au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\left(\frac{y'}{r'}\sin\theta + \frac{z}{r'}\cos\theta\right)^2 = \sin^2\theta\sin^2(v'+\psi)$$
$$+ 2\gamma\sin\theta\cos\theta\sin(v'+\psi)\sin(v'-\alpha)$$
$$+ \gamma^2\sin^2(v'-\alpha)\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\sin^2(v'+\psi)\right].$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de F, qu'on remplace ensuite r' et v' par leurs valeurs relatives au mouvement elliptique de l'astre L, et développées en séries de sinus et de cosinus des multiples de son moyen mouvement mt, il sera facile de réduire en séries semblables la valeur de F, et par suite celles de $\frac{dF}{d\theta}$ et de $\frac{dF}{d\psi}$; les expressions différentielles de θ et ψ se trouveront donc développées en une suite de termes dont chacun sera intégrable séparément.

Soient e l'excentricité de l'orbite de L et a sa moyenne distance à la Terre; désignons par ε et ω les longitudes de l'époque et du périhélie, comptées de la même origine que ψ; on aura, par les formules du mouvement elliptique, nos **24** et **25**, livre II,

$$\frac{r'}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e\cos(mt+\varepsilon-\omega) - \frac{1}{2}e^2\cos 2(mt+\varepsilon-\omega) + \ldots,$$

$$v' = mt + \varepsilon + 2e\sin(mt+\varepsilon-\omega) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(mt+\varepsilon-\omega)$$
$$- \frac{1}{4}\gamma^2\sin 2(mt+\varepsilon-\alpha) + \ldots.$$

L'excentricité de l'orbite de L et son inclinaison sur l'écliptique fixe étant toujours peu considérables, e et γ sont de très-petites quantités ; nous négligerons en conséquence leurs troisièmes puissances ainsi que leurs produits de trois dimensions. Nous observerons, de plus, que les termes de la valeur de V, qui dépendent du mouvement de l'astre L dans son orbite, ne produisant dans les valeurs de θ et de ψ que des inégalités périodiques qui sont nécessairement très-petites, comme les observations l'indiquent, on peut n'avoir égard qu'aux plus considérables d'entre elles ; en conséquence, nous ne considérerons parmi ces termes que ceux qui sont indépendants de l'excentricité e et de l'inclinaison γ. Cela posé, il est facile de se convaincre qu'il suffira de faire dans l'expression de V,

$$\cancel{\frac{a'^3}{r'^3}} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \quad \text{et} \quad v' = mt + \varepsilon.$$

$\frac{r'^3}{a^3}$

On trouvera ainsi, après avoir substitué pour $\left(\frac{Y'}{r'}\sin\theta + \frac{Z}{r'}\cos\theta\right)^2$ sa valeur,

$$F = \frac{3L}{8a^3}(A + B - 2C)\left\{\sin^2\theta\left(1 \cancel{+} \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{\cancel{2}\,4}\gamma^2\right)\right.$$
$$+ \gamma\sin 2\theta\cos(\alpha + \psi) + \gamma^2\left[\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta\cos 2(\alpha + \psi)\right]$$
$$\left. - \sin^2\theta\cos 2(mt + \varepsilon + \psi)\right\}.$$

+

Cette expression conserverait la même forme, quel que fût le nombre des corps agissants du système.

Nous admettrons, conformément à ce qu'indiquent

[illegible] No valor de F faltou atender [illegible] termos de $\frac{r'}{a}$ [illegible] les observations, que le Soleil et la Lune sont les seuls astres qui influent sur les mouvements de l'équateur terrestre, et nous supposerons que l'astre L, dont nous venons de considérer l'action, soit le Soleil. Marquons respectivement d'un accent les lettres m, a, e, γ, α, ε qui sont relatives à cet astre, pour les rapporter à la Lune dont nous désignerons la masse par L'. Supposons de plus, pour abréger, $\dfrac{\frac{L'}{a'^3}}{\frac{L}{a^3}} = \lambda$, en sorte que λ désigne le rapport de l'action de la Lune à celle du Soleil, et, d'après les formules du mouvement elliptique, faisons $\frac{L}{a^3} = m^2$, et, par suite, $\frac{L'}{a'^3} = m^2\lambda$. L'action de L' ajoutera à la valeur de F des termes semblables à ceux qui ont été introduits par l'action de l'astre L, et, en vertu de ces actions réunies, on aura

$$
\begin{aligned}
F = \frac{3m^2}{8}(A + B - 2C) \Big\{ & \sin^2\theta\left[1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \lambda\left(1 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{1}{2}\gamma'^2\right)\right] \\
& + \cos^2\theta(\gamma^2 + \lambda\gamma'^2) + \sin 2\theta\left[\gamma\cos(\alpha + \psi) + \lambda\gamma'\cos(\alpha' + \psi)\right] \\
& - \sin^2\theta\left[\frac{1}{4}\gamma^2\cos 2(\alpha + \psi) + \frac{1}{4}\lambda\gamma'^2\cos 2(\alpha' + \psi)\right. \\
& \left. + \cos 2(mt + \varepsilon + \psi) + \lambda\cos 2(m't + \varepsilon' + \psi).\right]\Big\}
\end{aligned}
$$

On peut négliger, à cause de leur petitesse, les termes dépendant du carré de l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe, en différentiant ensuite la valeur précédente, on aura

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{3m'^2}{4}(2C - A - B)\left\{\sin\theta\cos\theta\left[1 + \frac{3}{2}e^2 + \lambda\left(1 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma'^2\right)\right]\right.$$
$$+ \cos 2\theta\,[\gamma\cos(\alpha + \psi) + \lambda\gamma'\cos(\alpha' + \psi)]$$
$$\left.-\sin\theta\cos\theta\left[\frac{1}{4}\lambda\gamma'^2\cos 2(\alpha'+\psi) + \cos 2(mt + \varepsilon + \psi) + \lambda\cos 2(m't + \varepsilon' + \psi)\right]\right\},$$

$$\frac{dF}{d\psi} = \frac{3m'^2}{4}(2C - A - B)\left\{\sin\theta\cos\theta\,[\gamma\sin(\alpha + \psi) + \lambda\gamma'\sin(\alpha' + \psi)]\right.$$
$$\left.-\sin^2\theta\left[\frac{1}{4}\lambda\gamma'^2\sin 2(\alpha'+\psi) + \sin 2(mt + \varepsilon + \psi) + \lambda\sin 2(m't + \varepsilon' + \psi)\right]\right\}.$$

Telles sont les valeurs qu'il faudra substituer dans les formules (6), n° **24**. Pour simplifier, nous ferons d'abord abstraction des termes simplement périodiques, c'est-à-dire dépendants des mouvements du Soleil et de la Lune dans leurs orbites, et nous négligerons dans une première approximation les termes multipliés par le carré des quantités très-petites e, e' et γ'. Nous aurons simplement ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
d\theta &= \frac{3m'^2dt}{4n}\left(\frac{2C - A - B}{C}\right)\cos\theta\begin{bmatrix}\gamma\sin(\alpha + \psi)\\ + \lambda\gamma'\sin(\alpha' + \psi)\end{bmatrix},\\
d\psi &= \frac{3m'^2dt}{4n}\left(\frac{2C - A - B}{C}\right)\left\{\cos\theta\,(1+\lambda)\right.\\
&\quad\left. + \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}[\gamma\cos(\alpha + \psi) + \lambda\gamma'\cos(\alpha' + \psi)]\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

26. Avant de nous occuper de l'intégration de ces formules, considérons les quatre quantités $\gamma\sin(\alpha + \psi)$, $\gamma\cos(\alpha + \psi)$, $\lambda\gamma'\sin(\alpha' + \psi)$ et $\lambda\gamma'\cos(\alpha' + \psi)$ qui entrent dans leurs seconds membres. Commençons par les deux premières : elles représentent, comme il est facile de le voir, les produits de l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur l'écliptique fixe, par le *sinus* et le *cosinus* de la longitude de son nœud, comptée sur ce plan à partir de son intersection avec l'équateur, ou de la ligne mobile des équinoxes. Si l'on développe le premier de ces produits, on a

$$\gamma \sin(\alpha + \psi) = \gamma \sin\alpha \cos\psi + \gamma \cos\alpha \sin\psi. \quad (8)$$

Dans cette valeur, $\gamma \sin\alpha$ et $\gamma \cos\alpha$ sont les produits de l'inclinaison de l'orbite solaire sur l'écliptique fixe, par le sinus et le cosinus de la longitude de son nœud comptée à partir d'une droite fixe. Ces quantités ne sont pas constantes, elles sont sujettes à des variations séculaires qu'il n'est pas permis de négliger parce qu'elles peuvent devenir très-sensibles par l'intégration dans les valeurs de θ et de ψ. Or nous avons vu dans le n° 69 du livre II, que si l'on nomme γ l'inclinaison de l'orbite d'une planète L sur un plan fixe, et α la longitude de son nœud ascendant comptée à partir d'une origine fixe, le produit $\tan\gamma \sin\alpha$ est exprimé par un nombre fini de termes de la forme $B \sin(bt + \beta)$, et le produit $\tan\gamma \cos\alpha$ par la même suite de termes dans lesquels on change simplement les *sinus* en *cosinus*. Nous représenterons la première suite par $\Sigma.B \sin(bt + \beta)$ et la seconde par $\Sigma.B \cos(bt + \beta)$. En observant donc que l'inclinaison γ étant supposée très-petite, on peut prendre cet angle pour sa tangente, on aura

$$\gamma \sin \alpha = \Sigma.\sin(bt + \epsilon), \quad \gamma \cos\alpha = \Sigma.\mathrm{B}\cos(bt + \epsilon).$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (8) donnent

$$\gamma \sin(\alpha + \psi) = \Sigma.\mathrm{B}\sin(bt + \psi + \epsilon),$$

d'où l'on voit que pour avoir $\gamma \sin(\alpha + \psi)$, il suffit d'augmenter de la quantité ψ les angles des différents termes de l'expression de $\gamma \sin \alpha$, c'est-à-dire qu'il suffit de rapporter ces angles à la ligne mobile des équinoxes. Nous verrons que la valeur de ψ se compose d'un terme croissant comme le temps t et d'une suite d'inégalités à longue période du même ordre que la quantité B, on pourra donc, en négligeant les quantités très-petites de l'ordre B^2, substituer à l'angle ψ, dans l'expression précédente, le moyen mouvement des équinoxes. La valeur de $\gamma \sin(\alpha + \psi)$ sera exprimée alors par un nombre fini de termes de la forme $\mathrm{B}\sin(ct + \epsilon)$, qui ne différeront des termes de l'expression de $\sin \gamma \sin \alpha$, qu'en ce que les angles bt seront augmentés du moyen mouvement des équinoxes. On prouverait de la même manière que $\gamma \cos(\alpha + \psi)$ sera composée de la même suite de termes dans lesquels on changera seulement les *sinus* en *cosinus*, d'où il suit qu'on aura généralement

$$\left.\begin{aligned} \gamma \sin(\alpha + \psi) &= \Sigma.\,\mathrm{B}\sin(ct + \epsilon), \\ \gamma \cos(\alpha + \psi) &= \Sigma.\,\mathrm{B}\cos(ct + \epsilon). \end{aligned}\right\} (9)$$

Telles sont les valeurs qu'il faudra substituer dans les seconds membres des équations (7) en vertu de l'action du Soleil.

Considérons maintenant les deux quantités

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) \text{ et } \gamma' \cos(\alpha' + \psi),$$

introduites par l'action de la Lune. L'analyse précédente s'appliquerait encore à la détermination de ces quantités; mais une circonstance particulière au mouvement de la Lune permet de simplifier leur expression. En effet, l'observation montre que l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'écliptique mobile est à peu près constante; il y a donc de l'avantage à introduire cet angle à la place de l'inclinaison sur l'écliptique fixe dans les formules (7).

Pour cela, observons que α' représentant la longitude du nœud de l'orbite lunaire sur l'écliptique fixe, comptée de la droite qui sert d'origine à l'angle ψ, si l'on désigne par π la longitude de la Lune comptée de la même ligne fixe sur l'écliptique invariable, ses latitudes par rapport à l'écliptique fixe et à l'écliptique mobile, seront respectivement, aux quantités près du second ordre, $\tang \gamma' \sin(\pi - \alpha')$ et $B' \sin(\pi - \alpha')$, en désignant par B' la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie. Mais si la Lune était en mouvement sur le plan même de cette écliptique, sa latitude au-dessus de l'écliptique fixe correspondante à la même longitude π serait

$$\tang \gamma \sin(\pi - \alpha).$$

Cette dernière latitude est aux quantités près de l'ordre γ^2, égale à la différence des deux premières; on aura donc, quel que soit π,

$$\tang \gamma \sin(\pi - \alpha) = \tang \gamma' \sin(\pi - \alpha') - B' \sin(\pi - \alpha');$$

d'où, en supposant successivement π égal à zéro et π égal à un angle droit, et substituant les angles γ et γ' à la place de leurs tangentes, on tire

$$\gamma' \sin\alpha' = \gamma \sin\alpha + B' \sin\alpha',$$
$$\gamma' \cos\alpha' = \gamma \cos\alpha + B' \cos\alpha'.$$

Cela posé, les deux quantités

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) \quad \text{et} \quad \gamma' \cos(\alpha' + \psi)$$

donneront, en les développant,

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \gamma' \sin\alpha' \cos\psi + \gamma' \cos\alpha' \sin\psi,$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \gamma' \cos\alpha' \cos\psi - \gamma' \sin\alpha' \sin\psi.$$

Si l'on substitue dans ces expressions pour $\gamma' \sin\alpha'$ et pour $\gamma' \cos\alpha'$ leurs valeurs précédentes, on trouvera

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \gamma \sin(\alpha + \psi) + B' \sin(\alpha' + \psi),$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \gamma \cos(\alpha + \psi) + B' \cos(\alpha' + \psi).$$

On peut, dans les seconds membres de ces équations, remplacer $\gamma \sin(\alpha + \psi)$ et $\gamma \cos(\alpha + \psi)$ par leurs valeurs, n° **26**, en désignant d'ailleurs par $c't + 6'$ la valeur moyenne de la longitude du nœud de l'orbite lunaire comptée de l'équinoxe mobile, la seule à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard, ce qui donne $\alpha' + \psi = c't + 6'$, les expressions précédentes deviendront :

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \Sigma.B \sin(ct + 6) + B' \sin(c't + 6'),$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \Sigma.B \cos(ct + 6) + B' \cos(c't + 6').$$

Les seconds termes de ces valeurs dépendent des mouvements des nœuds de l'orbe lunaire, et leur période, par conséquent, est nécessairement très-courte par rapport à celle des autres termes, qui dépendent des variations très-lentes des orbites planétaires; on sait en effet que les nœuds de l'orbe lunaire font le tour entier du ciel dans un intervalle de moins de dix-huit ans; on peut donc, lorsqu'on se propose simplement, comme nous le faisons ici, de déterminer les variations séculaires du plan de l'équateur terrestre, faire abstraction de ces termes, et les comprendre parmi les inégalités périodiques des valeurs finies des angles θ et ψ que nous déterminerons séparément. On aura simplement ainsi :

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \Sigma.\mathrm{B}\sin(ct + 6),$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \Sigma.\mathrm{B}\cos(ct + 6).$$

Si l'on substitue ces valeurs ainsi que celles de $\gamma\sin(\alpha + \psi)$ et de $\gamma\cos(\alpha + \psi)$ dans les équations (7), on aura, en vertu des actions réunies du Soleil et de la Lune,

$$\left.\begin{aligned} d\theta &= \frac{3m^2(1+\lambda)\,dt}{4n}\left(\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right)\cos\theta\,\Sigma.\mathrm{B}\sin(ct+6), \\ d\psi &= \frac{3m^2(1+\lambda)\,dt}{4n}\left(\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right)\left\{\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\,\Sigma.\mathrm{B}\cos(ct+6)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Il ne s'agit plus que d'intégrer les formules précédentes pour en déduire les parties des valeurs des deux angles θ et ψ, qui dépendent des déplacements séculaires de l'équateur terrestre.

27. Pour cela, nous emploierons la méthode ordinaire des approximations successives. Nous négligerons dans une première approximation tous les termes qui seraient de l'ordre du carré des forces perturbatrices; on pourra regarder alors comme des constantes les quantités $\sin\theta$ et $\cos\theta$ qui entrent dans les seconds membres des équations (10), et ces seconds membres ne renfermeront plus que des quantités toutes connues. On substituera ensuite dans ces formules pour θ sa valeur donnée par la première approximation, et l'on en conclura par une nouvelle intégration des valeurs plus approchées de θ et de ψ; en continuant ainsi successivement, on aura les valeurs de ces deux quantités avec toute la précision qu'on voudra atteindre.

En considérant ainsi θ comme une quantité constante dans les formules (10), et en intégrant d'abord la première de ces formules, on aura

$$\theta = h' + \frac{3m'^2(1+\lambda)}{4n}\left(\frac{A+B-2C}{C}\right)\cos\theta\,\Sigma.\,\frac{B}{c}\cos(ct+6),$$

h' étant une constante arbitraire.

Pour déterminer cette constante, désignons par h l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique fixe lorsque commence le temps t, on aura pour cet instant

$$h = h' + \frac{3m'^2(1+\lambda)}{4n}\left(\frac{A+B-2C}{C}\right)\cos h\,\Sigma.\,\frac{B}{c}\cos 6.$$

En faisant donc, pour abréger,

$$l = \frac{3m'^2(1+\lambda)}{4n}\left(\frac{2C-A-B}{C}\right)\cos h,$$

on aura, aux quantités près de l'ordre B^2,

$$\theta = h + \Sigma.\frac{B}{c}[\cos(ct + \beta) - \cos\beta]. \quad (11)$$

Passons à l'expression de $d\psi$. Si l'on y suppose $\theta = h$ et qu'on remplace par l la quantité que cette lettre représente, on aura

$$d\psi = [l + 2\cot 2h\,\Sigma.Bl\cos(ct + \beta)]\,dt,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\psi = lt + l' + 2\cot 2h\,\Sigma.\frac{Bl}{c}\sin(ct + \beta),$$

l' étant une nouvelle constante arbitraire.

Nous prendrons pour origine de l'angle ψ et des autres longitudes comptées sur le plan de l'écliptique fixe, l'équinoxe du printemps à l'époque d'où l'on compte le temps t, en sorte que ψ sera nul en même temps que t; on aura ainsi

$$0 = l' + 2\cot 2h\,\Sigma.\frac{Bl}{c}\sin\beta,$$

et par conséquent

$$\psi = lt + 2\cot 2h\,\Sigma.\frac{Bl}{c}[\sin(ct + \beta) - \sin\beta]. \quad (12)$$

Ces valeurs de θ et ψ serviront à déterminer les mouvements de l'axe terrestre par rapport aux étoiles; jointes à la valeur $\varphi = nt + c$, elles fournissent toutes les données nécessaires pour fixer à chaque instant la position de la Terre autour de son centre de gravité.

Dans les valeurs précédentes de θ et de ψ, nous avons négligé les termes dépendants du carré des forces perturbatrices, et ces valeurs suffisent pour la comparaison de la théorie aux plus anciennes observations qui nous soient parvenues. Cependant, pour montrer comment on devrait procéder pour porter plus loin la précision, supposons qu'on veuille tenir compte des termes du second ordre dont nous avons d'abord fait abstraction. Nous observerons d'abord qu'on peut, comme précédemment, continuer à regarder $\cos\theta$ comme constant dans l'expression de $d\theta$, parce que les termes qui résulteraient de sa variation, seraient des quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices multipliées par le carré de B, qui est lui-même une très-petite quantité du second ordre; ces termes seraient donc, par cette raison, tout à fait insensibles. Il en serait de même à l'égard du second terme de l'expression de $d\psi$; mais dans le premier terme de cette même quantité il ne sera plus permis de regarder l'angle θ comme constant, parce que sa variation y produit des termes qui sont du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, mais seulement du premier par rapport à la quantité B. C'est donc uniquement dans le premier terme de l'expression de $d\psi$ qu'il sera nécessaire d'avoir égard à la variation de l'angle θ. Nommons donc $\delta\theta$ cette variation déterminée par l'équation (11), en sorte qu'on ait $\theta = h - \delta\theta$, en négligeant les quantités de l'ordre $(\delta\theta)^2$, on aura

$$\cos\theta = \cos h\,(1 + \operatorname{tang} h\,\delta\theta),$$

ou bien, en mettant pour $\delta\theta$ sa valeur,

$$\cos\theta = \cos h \left\{ 1 + \operatorname{tang} h\,\Sigma.\frac{Bl}{c}\left[\cos(ct + 6) - \cos 6\right] \right\}.$$

Si dans le premier terme de l'expression de $d\psi$ on substitue cette valeur, et si l'on remplace par l la quantité que cette lettre représente, on trouvera

$$d\psi = \left[l + \Sigma.\mathrm{B}l\cot h\left(1 + \frac{l-c}{c}\operatorname{tang}^2 h\right)\cos(ct+6)\right]dt.$$

Nous omettons, pour plus de simplicité dans le coefficient de dt, le terme du second ordre

$$-\Sigma.\frac{\mathrm{B}l^2}{c}\operatorname{tang} h\cos 6,$$

qu'on pourra supposer compris dans la constante l.

En intégrant l'expression précédente, on aura

$$\psi = lt + l' + \Sigma.\frac{\mathrm{B}l}{c}\cot h\left(1 + \frac{l-c}{c}\operatorname{tang}^2 h\right)\sin(ct+6),$$

l' étant la constante introduite par l'intégration. En déterminant cette constante comme nous l'avons fait précédemment, on aura

$$\psi = lt + \Sigma.\frac{\mathrm{B}l}{c}\cot h\left(1 + \frac{l-c}{c}\operatorname{tang}^2 h\right)[\sin(ct+6) - \sin 6]. \quad (13)$$

Cette expression coïncide avec la valeur de ψ, donnée par la formule (12), lorsqu'on néglige les termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices, c'est-à-dire les termes qui ont l^2 pour coefficient.

28. Il est important de remarquer que l'on serait parvenu à des formules très-différentes des précédentes, si l'on avait négligé de tenir compte dans les valeurs de $d\theta$ et $d\psi$ des variations séculaires des quantités $\gamma\sin\alpha$ et $\gamma\cos\alpha$. En effet, il est aisé de voir que si l'on désigne par lt le moyen mouvement des équinoxes, en sorte qu'on ait

$$b + l = c,$$

les produits de la tangente de l'inclinaison du plan de l'orbite de l'astre L sur l'écliptique fixe, par le sinus ou le cosinus de la longitude de son nœud, comptée de l'équinoxe mobile, seront dans ce cas,

$$\gamma \sin(\alpha + \psi) = \Sigma . \mathrm{B} \sin(lt + 6),$$
$$\gamma \cos(\alpha + \psi) = \Sigma . \mathrm{B} \cos(lt + 6).$$

En substituant ces valeurs dans les équations (7) du nº **25**, et en leur appliquant ensuite l'analyse précédente, on trouve

$$\left.\begin{aligned} \theta &= h - \Sigma.\mathrm{B}[\cos(lt + 6) - \cos 6], \\ \psi &= lt + \Sigma.\mathrm{B}\cot h[\sin(lt + 6) - \sin 6]. \end{aligned}\right\} (14)$$

Ces formules ont été données d'abord par Lagrange, dans les *Mémoires de Berlin*, pour l'année 1780, et on les retrouve dans plusieurs ouvrages d'Astronomie qui ont paru depuis; on voit qu'elles dérivent naturellement des valeurs de θ et de ψ, nº **25**, en supposant qu'on a égard, dans ces valeurs, à l'aplatissement du sphéroïde terrestre en tant qu'il produit la précession moyenne lt des équinoxes, mais qu'on peut négliger l'effet de cet aplatissement combiné avec le déplacement séculaire du plan de l'orbite de l'astre L. Or cette hypothèse n'est pas suffisamment exacte, et l'on verra plus bas, comme l'a remarqué Laplace, que les formules (14) ne peuvent servir que pendant un siècle au plus à partir de l'époque d'où l'on compte le temps t, mais qu'au delà elles donneraient des résultats fort différents des phénomènes observés.

29. Nous avons rapporté jusqu'ici les angles θ et ψ à une écliptique fixe; mais pour comparer la théorie aux observations, il faut avoir les valeurs de ces angles par rapport à l'écliptique mobile, puisque c'est en effet de ce plan que nous les observons. Supposons que l'astre L, dont nous considérons l'action sur le sphéroïde terrestre, soit le Soleil, et considérons le triangle formé sur la surface d'une sphère décrite du centre de gravité de la Terre avec un rayon arbitraire, par l'écliptique fixe, l'équateur et le plan mobile de l'orbe solaire ou l'écliptique vraie. Si l'on désigne par θ' l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique vraie, les trois angles de ce triangle seront θ, γ et $180° - \theta'$, et l'arc $\alpha + \psi$ sera le côté opposé à l'angle $180° - \theta'$; on aura donc, pour déterminer cet angle,

$$\cos\theta' = \cos\theta \cos\gamma - \sin\theta \sin\gamma \cos(\alpha + \psi).$$

Cette équation donne, aux quantités près de l'ordre γ, $\theta' = \theta$; si l'on néglige seulement les quantités de l'ordre γ^3, on trouve

$$\theta' = \theta + \gamma \cos(\alpha + \psi) + \frac{1}{2} \cot\theta\, \gamma^2 \sin^2(\alpha + \psi),$$

ou bien, en substituant pour $\gamma\cos(\alpha+\psi)$ et $\gamma^2\sin^2(\alpha+\psi)$ leurs valeurs, n° **26**, et négligeant toujours les quantités du troisième ordre,

$$\theta' = h + \Sigma.\mathrm{B} \cos(ct + 6) + \frac{1}{2} \cot h\, [\Sigma.\mathrm{B} \sin(ct + 6)]^2. \quad (15)$$