mos de effectuar as operações n'elle indicadas

$$\sum \frac{h^n}{n!} y^{(n)} = \sum \frac{d^m f}{du_1^a \, du_2^b \ldots} .$$

$$\sum \frac{h^{\alpha+2\beta+\ldots+n\lambda+\alpha'+2\beta'+\ldots+n\lambda'+\ldots}}{\alpha!\,\beta!\ldots l!\,\alpha!\,\beta'!\ldots l'!\ldots} (u_2')^\alpha \left(\frac{u_2''}{2!}\right)^\beta \ldots \left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^\lambda (u_2')^{\alpha'} \ldots$$

onde é

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = a$$

$$\alpha' + \beta' + \ldots + \lambda' = b$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Egualando os coefficientes das mesmas potencias de h em ambos os membros d'esta ultima egualdade e notando que para isso basta pôr

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \ldots + \alpha^{(l-1)}$$

$$+ 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n$$

achamos a fórmula (a) que pretendiamos demonstrar.

NOTE SUR LA GÉOMÉTROGRAPHIE OU ART DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

E. Lemoine

M. Haton de la Goupillière a présenté pour nous à la séance de l'Académie des Sciences de Paris du 16 juillet 1888 une note sur un mode d'évaluation de la simplicité dans les constructions géométriques; le sujet s'est beaucoup étendu depuis nos premières études et ce sont les résultats obtenus dans cette voie que nous nous proposons de signaler. Nous rappelons que R_1, R_2 représentent respectivement l'opération qui consiste à faire passer le bord de la règle par un point placé et l'opération qui consiste à tracer la droite; que C_1, C_2, C_3 représentent respectivement l'opération qui consiste à mettre une pointe du compas en un point du plan, l'opération qui consiste à mettre une pointe du compas en un point indéterminé d'une ligne tracée et l'opération qui consiste à tracer le cercle. Il y a encore avec le compas une autre opération élémentaire possible, c'est celle qui consiste à fixer en b sur une ligne tracée une des pointes B du compas — lorsque la pointe A est fixée elle même en un point a — pour tracer un cercle de rayon ab sans se servir autrement de b, ou pour fixer la pointe A ou un point d'une ligne tracée.

Cela se présenterait par exemple dans le problème suivant: *Prendre une longueur qui soit* k *fois une longueur donnée,* mais nous n'avons pas ajouté un symbole spécial pour cette opération parce que cela aurait, sans avantages à notre avis, compliqué la méthode.

Toute construction effectuée par la règle et le compas peut donc se représenter par le symbole

$$op: (m_1\,R_1 + m_2\,R_2 + n_1\,C_1 + n_2\,C_2 + n_3\,C_3),$$

nous appellons: *simplicité* ou coëfficient de simplicité, le nombre total: $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ des opérations élémentaires R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 et: *Exactitude* ou coëfficient d'exactitude le nombre $m_1 + n_1 + n_2$; l'exactitude variable de la construction ne dépendant évidemment en somme que des opérations de préparation m_1, n_1, n_2 et non, à proprement parler, des opérations de tracé

Il ne serait pas exact de dire que $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ est une *mesure* de la simplicité, en donnant au mot mesure le sens ordinaire du mot en mathématiques, car les opérations élémentaires R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 sont des unités différentes. Mais ce mot de mesure est commode à employer et la pratique de la méthode montre bien qu'il correspond réellement au but que l'on se propose quand on décompose une construction en ses *opérations élémentaires*. Il faut encore remarquer que nos évaluations ne peuvent suivre exactement la pratique, car des opérations théoriquement identiques sont rendues soit impossibles quelquefois soit très difficiles à cause des longueurs des rayons des cercles, des positions des droites, etc. Ce que nous faisons c'est une *évaluation rationnelle*, rien de plus, mais qui, toutes proportions gardées, est à une évaluation réelle, impossible je crois, ce que la mécanique rationnelle est aux applications de l'industrie.

Nous n'avions eu d'abord que l'idée d'évaluer la *simplicite* des constructions, mais comme la notion de la *durée* des opérations nécessaires à une construction n'entre pas directement dans notre évaluation, nous avons été bientôt conduit à évaluer *théoriquement* l'éxactitude; là encore nous avons évidemment aussi une évaluation seulement *rationnelle* puisque nous ne tenons pas compte des angles sous lesquels les lignes se coupent, etc.; enfin l'application que nous avons faite de notre méthode à de nombreux exemples nous a conduit à trois résultats principaux dont le premier est tout à fait inattendu:

1.° Presque toutes, pour ne pas dire toutes—tant il y a peu d'exceptions — les constructions données séculairement dans les *Traités de Géométrie* pour les constructions fondamentales sont trop compliquées ; même : *mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.* Les unes un peu trop comme celle que nous citons, les autres de plus de moitié, comme : *construire la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données* et nous en avons donné de plus simples. La chose tient à ce que les Grecs, de qui nous tenons la Géométrie, la traitaient uniquement au point de vue spéculatif, ils ne faisaient point d'épures, et nous avons continué leurs routes.

2.° Il y a un art propre des constructions géométriques que nous avons appelé la *Géométrographie* et qui a ses méthodes et son élégance particulières.

3.° La simplicité didactique de l'exposition géométrique n'a *aucun rapport* avec la simplicité et par suite avec la probabilité d'exactitude de la construction effectuée.

Celle-ci doit être étudiée à part au moyen de la *Géométrographie;* nous n'en citerons que deux exemples. La solution si élégante (et donnée dans tous les traités de Géometrie analytique) de *Charles* pour *trouver en grandeur et en position les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et en position* est plus compliquée à construire que d'autres moins connues.

L'admirable solution de *Gergonne* et de *Bobillier* du problème *d'Apollonius: mener les cercles tangents à trois cercles donnés* conduit à une construction de beaucoup la plus compliquée parmi celles du même problème que nous avons analysées.

En résumé, c'est la simplicité spéculative et didactique que les Géomètres ont toujours considerée jusqui'ici. La *Géométrographie* s'occupe au contraire uniquement de la simplicité de la construction effectuée.

La règle et le compas sont les seuls instruments que la *Géométrographie* pure admet et elle s'occupe alors sur un point de vue des problèmes spéculatifs que les Grecs appelaint les questions résolubles par la droite et le cercle, ce qui contient evidemment la Géomètrie de la règle seule et la Géométrie du compas. Si on applique la *Géométrographie* aux épures de la Géométrie descriptive on est conduit à admettre l'usage d'un autre instrument: l'équerre, on n'a pour cela qu'ajouter à R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 le symbole E qui désigne l'operation consistant à faire glisser l'equerre le long de la règle jusqu'à ce que son bord passe par un point donné.

Si on applique la *Géométrographie* aux constructions de la Mécanique ou à la Statique graphique, il faut admettre l'emploi des règles divisées ce qui introduit l'idée générale du *nombrer*, c'est à dire l'arithmologie, mais il n'y a pas besoin de nouveaux symboles et l'opération de prendre entre les branches d'un compas un certain nombre donné de divisions sera $2C_1$ comme cela serait pour prendre une longueur donnée, seulement la différence théorique est essentielle. Ainsi : diviser une droite donnée dans le rapport de deux longueurs données est un problème de *Géométrographie pure* qui se résout aisément; et diviser une droite donnée dans le rapport de deux nombres donnés m et n est un problème qui pour trouver sa solution générale la plus simples possible quels que soient m et n, conduirait par la géométrographie pure à une question d'arithmologie que je ne crois pas résolue car il faudrait d'abord savoir résoudre la suivante : *trouver, le plus simplement possible, une longueur qui soit* k *fois une longueur donné* et l'on verra facilement que cette dernière revient à une question tout à fait analogue à celle-ci : *quel est le nombre minimum de multiplications nécessaires pour élever un nombre* A *à la puissance* p, question non résolue. L'emploi de la règle divisée s'impose pratiquement donc en statique Graphique pour la construction des centres de gravité de n points, etc.

Nous ne pouvons traiter ici en détail les questions dont nous venons de parler et nous renvoyons à notre mémoire développé qui a paru dans les comptes rendus du Congrès de Pau de l'Association Française pour l'avancement des sciences, 1892.

BIBLIOGRAPHIA

F. Porro : Astronomia sferica elementarmente esposta, Roma, 1894.

O presente livro foi escripto pelo sr. Porro, professor de Astronomia na Universidade de Turin, não só para servir aos seus discipulos a fim de aprenderem os primeiros elementos d'esta sciencia, necessarios para estudarem depois os pontos mais elevados d'ella que fazem parte do curso, mas ainda áquelles que se queiram preparar com os conhecimentos astronomicos necessarios para o estudo da Geographia, da Geodesia, da Physica, da Meteorologia, da Engenheria e da Navegação.

Nem sempre os livros de Astronomia apresentam esta sciencia debaixo de fórma attrahente que concorde com a belleza d'ella. Ao livro que acaba de publicar o illustre professor italiano não se póde fazer este reparo; lê-se com prazer e com proveito. É pequeno no formato, mas contém muito assumpto, e este é muito bem escolhido e muito bem exposto. N'esta exposição o auctor leva as suas referencias até aos trabalhos mais modernos e acompanha cada doutrina considerada de notas historicas cheias de interesse.

Os assumptos estão dispostos em dez capitulos, onde são consideradas as materias seguintes:

I A esphera celeste e o seu movimento diurno. II O movimento annual do Sol. III Transformações das coordenadas. IV A medida do tempo. V O movimento da Lua. VI A parallaxe diurna e a refracção. VII As variações dos planos fundamentaes. VIII A aberração e a parallaxe annual. IX A reducção dos logares estellares e os movimentos proprios. X O systema solar.

E. Lucas: Récréations mathématiques, t. IV, *Paris, G. Villars, 1894.*

Quando démos noticia do apparecimento do tomo III das *Récréations mathématiques*, no volume anterior d'este jornal, dissémos que E. Lucas publicou em vida dous tomos d'esta obra e que, depois da sua morte, foram encontrados nos seus papeis dous tomos promptos para serem impressos. O 2.° d'estes volumes, o 4.° da obra, acaba de ser publicado e é, como os anteriores, vivamente interessante. Eis os titulos dos recreios que contém:

I O calendario perpetuo e o calendario automatico dos residuos. II A Arithmetica em bolas. III A Arithmetica em paus. IV O jogo das palhetas no seculo 13.° V Os quadrados magicos de Fermat. VI A Geometria das rêdes e o problema dos dominós. VIII A Geometria das regiões, o problema geographico das quatro côres e as rêdes de pontos triplos. VIII A machina para marchar.

Johann G. Hagen: Synopsis der hoeheren Mathematik, t. II *(Geometrie der algebraischen Gebilde), Berlin, Felix L. Damas, 1894.*

Deu-se no tomo x, pagina 109 d'este jornal, uma breve noticia a respeito do 1.° volume d'esta obra importante. Ahi dissémos que é ella uma vasta encyclopedia mathematica, em que são apresentados, segundo a ordem logica, os differentes assumptos que fazem parte das sciencias mathematicas.

O 2.° volume, que acaba de ser publicado, é consagrado á Geometria. N'elle são considerados todos os ramos da Geometria, a respeito dos quaes são enunciadas as mais importantes proposições, fórmulas, methodos, regras, etc., que têm sido apresentadas pelos geometras, tudo disposto segundo a ordem logica dos assumptos e acompanhado de indicações bibliographicas preciosas. Para o estudo de cada questão o auctor recorreu aos trabalhos dos geometras mais eminentes de todos os paizes, e principalmente áquelles que são considerados como fundamentaes; porisso a obra está inteiramente á altura do estado actual da sciencia que considera.

O volume consideravel de que estamos dando noticia está dividido em treze partes, onde são respectivamente estudados os funfundamentos da Geometria, a Geometria projectiva, os diversos systemas de coordenadas, os systemas de linhas de 1.° e 2.° grau, a Geometria vectorial (methodos de Argand, Grassmann, Hamilton, etc.), a theoria geral das curvas planas, as curvas planas de segunda ordem, as curvas planas de terceira ordem, as curvas planas de quarta ordem, a theoria geral das curvas empenadas e das superficies, as curvas empenadas e as superficies de segunda ordem, as superficies de terceira ordem, as superficies de quarta ordem.

Como o anterior, este volume revela no auctor uma erudição admiravel, tal é a quantidade de factos geometricos que, a respeito de cada um dos assumptos que acabamos de enunciar, elle contém.

A *Synopsis der hoehren Mathematik* é uma obra de grande utilidade, que deve fazer parte da bibliotheca de todo o mathematico, que de certo terá frequentes vezes occasião de a consultar, para saber a respeito de cada assumpto as principaes proposições conhecidas, quaes os auctores que as estudaram, etc.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques (fiches 1 à 100), Paris, Gauthier Villars et Fils, 1894.

No volume IX d'este jornal deu-se noticia da resolução, tomada pelo Congresso de Mathematica que teve logar em Paris em 1889, de publicar um Repertorio bibliographico das sciencias mathematicas, contendo os titulos de todos os trabalhos mathematicos publicados em todos os paizes desde o principio d'este seculo. Hoje temos o prazer de annunciar que uma primeira serie de 100 folhas do Repertorio acaba de ser publicada.

Contém esta serie a indicação de perto de mil trabalhos mathematicos, publicados em diversos paizes, entre os quaes bastantes dos publicados nas collecções periodicas do nosso paiz.

É desnecessario indicar a importancia de semelhante publicação, tão evidente ella é. Todos os que trabalham sobre sciencias mathematicas sabem que a cada passo lhes apparece occasião de necesssitarem conhecer o que sobre algum ponto d'estas sciencias tem sido publicado.

Por meio do Repertorio bibliographico obtêm immediatamente as indicações que necessitam.

Devemos observar que, para fazer uso do Repertorio bibliographico é necessario possuir o *index* d'esta publicação. D'este *index* foram publicadas já duas edições, sendo a ultima publicada em 1893. Eis o seu titulo:

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, Paris, G. Villars, 1893.

D. F. G. Arias: Colección de problemas, teoremas, etc., destinados á estudios de aplication de las enseñansas de Geografia y Fisica, Barcelona, 1894.

Contém esta obra dous volumes. O primeiro volume é consagrado a problemas, exercicios e notas relativas á Cosmographia, á Geographia e á Nautica. O segundo contém tambem problemas, exercicios e notas relativas á Mechanica e á Physica. Os problemas são na sua maior parte simples, elementares e de utilidade pratica.

S. Pincherle: Delle funzioni ipergeometriche e di vari questioni ad esse attinenti (Giornale di Matematiche de Battaglini, t. XXXII).

Contém esta excellente memoria uma parte consideravel de um curso, que sobre as funcções hypergeometricas fez o sr. Pincherle na Universidade de Bolonha, no anno lectivo de 1893 a 1894. N'ella o sabio geometra italiano faz derivar de uma fonte commum varias theorias relativas a estas funcções, anteriormente apresentadas como distinctas, e sem ligação alguma. A exposição d'este assumpto dá-lhe occasião de applicar alguns resultados importantes a que chegou em trabalhos anteriores. A simplicidade com que é tratado o assumpto e os elementos que o auctor apresenta, para facilitar a sua comprehensão, tórnam este trabalho muito proprio para se fazer um estudo assaz desenvolvido da theoria das funcções hypergeometricas.

R. Perrin: Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences, (Journal des mathématiques, 4.ª serie, t. x).

Sendo U a fórma binaria geral de ordem *n* e V a equação aos quadrados das differenças das raizes de U, cada coefficiente de V é origem de um certo covariante de U. O covariante do qual é origem o penultimo coefficiente de V, é o objecto de que se occupa o sr. Perrin n'esta importante memoria.

N'ella estuda o auctor as propriedades d'este covariante, ensina um methodo para o calcular e faz applicação d'este methodo ás fórmas binarias de 3.ª, 4.ª, 5.ª e 6.ª ordem.

E. Picard: Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires (Journal des mathématiques, 4.ª serie, t. IX).

N'esta memoria apresenta o eminente geometra francez um methodo importante de approximação, que permitte obter os integraes dos systemas de equações differenciaes de 2.ª ordem, quando estes integraes têm valores dados para dous valores da variavel, e faz d'este methodo applicações interessantes.

M. d'Ocagne: Mémoire sur les suites récurrentes (Journal de l'Ecole Polytechnique de Paris, 1894).

O auctor d'esta bella memoria simplifica consideravelmente a theoria das series recorrentes, reduzindo todas as series, que têm a mesma escala, a uma d'ellas, a que dá o nome de *fundamental*, e que escolhe de modo a simplificar as formulas de transformação, e substituindo á formula conhecida de Lagrange, que dá o integral das series recorrentes no caso de a equação generatriz ter raizes multiplas, outra que não exige a distincção do gráo de multiplicidade das raizes d'aquella equação. A memoria contém uma exposição da theoria das series recorrentes feita no sentido que acabamos de indicar e ainda muitos resultados novos relativos a estas series, de que não podemos dar noticia em pequeno espaço.

Lia Predella: Sulle soluzioni singolari delle equazioni differenziali ordinarie di 1.° ordine (Giornale di Mathematiche, t. XXXIII).

Abre esta bella Memoria por uma noticia rapida, mas muito completa, dos trabalhos que têm sido publicados a respeito das soluções singulares das equações differenciaes de 1.ª ordem. Assim a auctora refere-se rapidamente aos trabalhos de Taylor, Euler, Lagrange, etc., e aos trabalhos modernos de Darboux, Cayley, Casorati, Kapteyn, Hamburger, etc. Depois, entrando no objecto principal do seu trabalho, a auctora, fazendo notar que nenhum geometra fez ainda uma exposição completa da theoria das soluções singulares, encarrega-se ella d'esta exposição, reunindo os resultados espalhados por differentes memorias, coordenando-os, preenchendo as lacunas, fazendo a critica dos resultados, etc.

Não se limita porém Lia Predella a uma exposição do que é conhecido a respeito do assumpto de que se occupa. Ha pelo contrario muitos pontos em que ella apresenta os resultados das suas proprias indagações.

A memoria está dividida em duas partes.

A primeira parte é consagrada ao estudo das soluções singulares das equações differenciaes do gráu n relativamente á derivada que n'elle entra. N'esta parte a auctora completa algumas proposições relativas aos discriminantes da equação differencial relativamente á derivada e da equação integral relativamente á constante arbitraria, dá demonstrações novas de alguns theoremas de Cayley, continua os estudos de Workman sobre a soperposição dos logares singulares, etc.

Na segunda parte são estudadas primeiramente as equações do 1.° gráo relativamente á derivada; depois as equações do 2.° gráo relativamente á mesma derivada, a respeito das quaes a auctora expõe os trabalhos de Casorati, simplificando-os e aperfeiçoando-os; finalmente um grupo de equações do 3.° gráo relativamente á derivada ao qual Lia Predella pôde estender alguns theoremas que até agora só eram demonstrados para o caso das equações do 2.° gráo.

Por esta rapida noticia vê-se que o nome de Lia Predella é mais um a junctar á lista, não muito numerosa, das mulheres que cultivam com successo as sciencias mathematicas.

E. Pascal: Un capitulo di Calcolo differenziale (Rivista di Matematica, 1895).

Refere-se esta nota á expressão do resto da serie de Taylor dada por Cauchy:

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x+\theta h).$$

Mostrou Pringsheim que, apezar de θ ser funcção de n, é condição necessaria para que a serie de Taylor convirja para $f(x)$ que esta expressão, sendo considerada como funcção de *duas variaveis independentes* θ e n, tenda para 0 quando n tende para o infinito e θ varía entre 0 e 1. É este resultado que E. Pascal demonstra no seu interessante artigo.

E. Pincherle: Sulle operazioni funzionali destributive (Rend. della R. Acad. dei Lincei, 1895).

—— Sulle operazioni destributive commutabili con una operazione data (Atti delle R. Acad. di Torino, 1895).

E. Guallart: Apuntes de Analisis infinitesimal, Zaragoza, 1895.

M. Lerch: Uber eine arithmetische Relation (Sitzungsberichte der K. Gesellschaf der Wissenschaften, Prag, 1894).

Annuaire pour l'an 1895 publié par le Bureau des Longitudes, Paris, G. Villars.

Contém este volume as informações que é uso apresentar esta interessante e util publicação periodica e além d'isso as noticias seguintes:

1.° *Ondas atmosphericas lunares*, por M. Bouquet de la Grye;
2.° *Sobre o Congresso geodesico d'Insprück*, por M. Tisserand;
3.° *O Observatorio do Monte Branco*, por M. Janssen;
4.° *A Photometria photographica*, por M. Janssen;
5.° *Relatorio sobre a unificação dos dias astronomico e civil*, por M. Poincaré.

D. Besso: Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche (Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1894).

G. Peano: Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti (Atti della R. Accademia di Torino, 1894.

E. Weyr : Uber einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechate Eins und seine Auwendung (Sitzungs. der K. Akademia der Wissenschaften in Wien, 1894).

J. Deruyts : Sur les formes à plusieurs séries de variables (Bulletins de l'Académie R. de Belgique, 1894).

D. André : Sur les permutations alternées (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1894).

E. Carvallo : Perfectionnements à la méthode de M. Mouton pour l'étude du spectre calorifique (Journal de Physique. Paris, 1893).
—— Spectres calorifiques (Annales de Chimie et de Physique, 1895).
—— Cas paradoxal de réflexion cristalline (Journal de Physique, 1893).
—— Théorie du pied équilibriste du Gyrescope Gervat (Bulletin de la Société mathématique de France, 1893).
—— Théorèmes de Mécanique (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1893).
—— Nouveau théorème de Mécanique (Item).
—— Sur les surfaces minimes (Bulletin des sciences math., 1894).
—— Intégration des équations de la lumière dans les milieux transparents et isotropes (Comptes rendus de l'Acad. de Paris, 1894).

E. Cesàro: Sulla Geometria intrinseca delle congruenze (Rend. della R. Accademia di Napoli, 1894).

G. Eneström: Om reppkomsten af tecknen + och — samt de matematiska termerna PLUS *och* MINUS *(Bulletim da Acad. de Stockholm, 1894).*

—— Om Taylors och Nicoles imbördes förtjänster betträfande differenskalky lens första utbildande (Item).

H. G. Zeuthen: M. Maurice Cantor et la Géométrie supérieure de l'antiquité (Bulletin des Sciences math., 1894).

E. Picard: Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites (Bulletin de la Société math. de France, 1894).

—— Sur une classe de trancendentes nouvelles (Acta mathematica, t. 18).

—— Remarques sur les équations différentielles (Item, t. 17).

—— De l'équation $\Delta u = ke^u$ *sur une surface de Riemann fermée (Journal des mathématiques, 4.ª serie, t. IX).*

D. Z. G. de Galdeano: El concepto del imaginarismo en la ciencia matematica, Zaragoza, 1894.

G. B. Guccia: Richerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane dotati di singolarità ordinarie (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1894).

—— Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie (Item).

R. Guimarães: O Congresso de Caen (Rev. de Educação e ensino, 1894).

P. Mansion: Notice sur les recherches de M. de Tilly en Metagéométrie (Revue des questions scientifiques, 1895).

G. T.

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XII — N.º 5

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1896

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

SUR DIVERSES FORMULES D'ARITHMÉTIQUE

PAR

M. Lerch

(à Prague)

Représentons, comme il est d'usage, par $\mathrm{E}(x)$ ou $[x]$ le plus grand nombre entier ne surpassant pas la quantité positive x, et posons $\mathrm{E}(x)=0$ lorsque x est négative. Nous aurons d'abord la formule

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m}{u+\alpha}-v\right)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m}{v+\alpha}-u\right),$$

dans laquelle m, u, v représentent des quantités positives quelconques. On l'obtient aisément par la voie géométrique en observant que les deux membres expriment le nombre des points aux coordonnées entières et positives, contenus dans l'aire limitée par les axes et par l'hyperbole équilatère

$$(u+x)\,(v+y)=m.$$

La démonstration purement arithmétique, équivalente au fond au raisonnement géométrique, est aussi facile : Il est clair que la quantité $E\left(\frac{u}{u+\alpha}-v\right)$ représente la totalité des nombres entiers positifs β, pour lesquels $\frac{m}{u+\alpha}-v \geqq$ ou bien $m \geqq (u+\alpha)(v+\beta)$. Le premier membre dans (1) représente donc le nombre des combinaisons α, β (α, $\beta = 1, 2, 3, \ldots$) qui satisfont à l'inégalité $m \geqq (u+\alpha)(v+\beta)$. Il est clair que le même nombre est esprimable par le deuxième membre de l'équation (1), qui se trouve ainsi démontrée.

Dans cette équation prenons $m = n - \sigma a$, $u = ra$, $v = sa$, où a, r, s, n sont des entiers positifs, et faisons la somme pour $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ Dans l'équation qui résulte

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} E\left(\frac{n-a^2rs-(\sigma+as)a}{ra+\alpha}\right)$$

$$=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} E\left(\frac{n-a^2rs-(\sigma+ra)a}{sa+\alpha}\right)$$

transformons les deux membres en introduisant comme les indices des quantités $ra+\alpha$, $s\alpha+\sigma$, respectivement $sa+\alpha$, $r\alpha+\sigma$, ce qui donne

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=ra+1}^{\infty}\ \sum_{\sigma=s\alpha}^{\infty} E\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=sa+1}^{\infty}\ \sum_{\sigma=r\alpha}^{\infty} E\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right)$$

où m est un entier positif quelconque, remplaçant l'expression $n-a^2rs$.

Les conditions sommatoires dans le premier membre étant $\alpha > ra$, $\sigma \geqq s\alpha$ ou bien $ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]$, $\sigma > ras$, la quantité considerée s'écrit

$$\sum \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right),\ \left(\sigma > rsa,\ ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]\right),$$

et nous aurons l'égalité

$$(2^{\circ}) \qquad \sum \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) = \sum \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right),$$

les conditions sommatoires étant

$$\sigma > rsa,\ \ ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right],\ \ sa < \alpha' \leqq \left[\frac{\sigma}{r}\right].$$

Changeons m en $m-1$ et retranchons, il vient

$$\sum_{\sigma > rsa} \ \sum_{ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha'}\right) - \mathrm{E}\frac{m-\sigma a - 1}{\alpha}\right)\right\}$$

$$= \sum_{\sigma > rsa} \ \sum_{sa < \alpha' \leqq \left[\frac{\sigma}{r}\right]} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a - 1}{\alpha'}\right)\right\}.$$

Cela étant, remarquons que la différence

$$\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a - 1}{\alpha}\right)$$

ne diffère de zero que lorsque α est un diviseur de $m-\sigma a$, dans ce cas sa valeur étant l'unité, et que par conséquent la somme

$$\sum_{ra<\alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a-1}{\alpha}\right) \right\}$$

équivaut au nombre des diviseurs de la quantité $m-\sigma a$ qui sont supérieurs à ra et ne surpassent pas $\left[\frac{\sigma}{s}\right]$.

Si nous représentons par $\psi\,(p,\,q)$ le nombre des diviseurs de p supérieurs à q, notre quantité s'écrira $\psi\,(m-\sigma a, ra) - \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{s}\right)$, et il s'ensuit que nous aurons l'équation

$$\sum_{\sigma > rsa} \left\{ \psi\,(m-\sigma a,\, ra) - \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{s}\right) \right\}$$

$$= \sum_{\sigma > rsa} \left\{ \psi\,(m-\sigma a,\, sa) - \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right) \right\}$$

ou bien

$$(3) \qquad \sum_{\sigma} \left\{ \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right) + \psi\,(m-\sigma a,\, ra) \right\}$$

$$= \sum_{\sigma} \left\{ \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{s}\right) + \psi\,(m-\sigma a,\, sa) \right\},\ (\sigma > rsa).$$

On obtient un résultat de forme différente en prenant pour point de départ l'équation (2), dans le cas de $s=0$, où elle ne cesse pas d'être vraie :

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\alpha=r a+1}^{\infty} \left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\sigma=r\alpha}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right).$$

Remarquons que les conditions sommatoires dans le second membre peuvent s'écrire $\sigma > 0$, $0 < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{r}\right]$, et que par conséquent

$$\sum_{\sigma,\alpha} \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) = \sum_{\sigma',\alpha'} \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right), \quad \left(\begin{array}{l} \sigma \geqq 0, \sigma' > 0, \\ \alpha > ra, 0 < \alpha' < \left[\frac{\sigma'}{r}\right] \end{array}\right).$$

En y changeant m en $m-1$ et retranchant les résultats, il vient

$$\sum_{\sigma,\alpha} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma\alpha}{\alpha}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a-1}{\alpha}\right) \right\}$$

$$= \sum_{\sigma',\alpha'} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a-1}{\alpha'}\right) \right\}.$$

Le premier membre est évidemment égal à la somme

$$\sum \psi(m-\sigma a, ra), \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

et le deuxième sera donné par l'expression

$$\sum_{\sigma'} \chi\left(m-\sigma' a, \frac{\sigma'}{r}\right), \ (\sigma'>0),$$

en convenant de représenter par $\chi(p, q)$ *le nombre des diviseurs de* p *ne surpassant pas* q. Nous aurons donc l'équation

$$\sum_{\sigma \geqq 0} \psi(m-\sigma a, ra) = \sum_{\sigma'>0} \chi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right).$$

Retranchons les deux membres de l'identité

$$\sum_{\sigma \geqq 0} \Theta(m-\sigma a) = \psi(m, 0) + \sum_{\sigma'>0} \Theta(m-\sigma' a),$$

où $\Theta(k)=\psi(k,0)$ représente le nombre total des diviseurs de k; il vient de la sorte, en employant l'identité évidente $\chi(p, q) + \psi(p, q) = \Theta(p)$:

$$\sum_{\sigma \geqq 0} \chi(m-\sigma a, ra) = \psi(m, 0) + \sum_{\sigma'>0} \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right),$$

ou bien

$$(4) \quad \sum_{\sigma} \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right) = \sum_{\sigma} \chi(m-\sigma a, ra); \left(\sigma=0, 1, \ldots \left[\frac{m-1}{a}\right]\right).$$

C'est le cas de $r = 1$ que nous avons considéré antérieurement (*), à savoir

$$(5) \qquad \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \psi(m-\sigma a, \sigma) = \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \chi(m-\sigma a, a);$$

il est intéressant de remarquer que, inversement, l'équation (4) se déduit aisément de (5). Soit en effet r un entier supérieur à un; nous pouvons prendre $\sigma = \mu r + \rho$, où $\rho = 0, 1, 2, \ldots r-1$: on a ainsi

$$\sum_{\sigma} \left(\psi(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right) = \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\mu=0,1,2,\ldots} \psi(m-\rho a-\mu ra, \mu),$$

et à cause de l'équation (5) cette quantité peut s'écrire

$$\sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\mu=0,1,2,\ldots} \chi(m-\rho a-\mu ra, ra),$$

ou bien

$$\sum_{\sigma} \chi(m-\sigma a, ra),$$

ce qui en effet coïncide avec le second membre de (4).

(*) Au sujet des fonctions ψ et χ v. deux notes dans le Bulletin de M Darboux, année 1888, puis trois articles parus dans le Bulletin de la Société des Sciences de Boheme, 1894.

Á titre d'exemple considérons l'équation (5) dans les cas de $a=2$; les nombres $\chi\,(m-2\sigma,2)$ seront égaux à 2 ou à 1 suivant que m est pair ou impair. Lorsque m est pair, le deuxième membre sera alors $\frac{m}{2}.\,2=m$, lorsque m est impair, il sera égal à $\frac{m+1}{2}$; on a donc

$$\sum_{\sigma=0,\,1,\,2,\ldots} \psi\,(m-2\sigma,\sigma)=\frac{3m+1}{4}+(-1)^m\,\frac{m-1}{4}.$$

SOBRE UM THEOREMA DE GEOMETRIA SUPERIOR

POR

JORGE FREDERICO DE AVILLEZ

(Visconde de Reguengo)

Se dividirmos n'um mesmo numero de partes eguaes os tres lados d'um triangulo, e tirarmos pelos pontos de divisão de cada um d'estes lados perpendiculares sobre os outros dois, as rectas que unem os pés d'essas perpendiculares envolvem tres parabolas tangentes duas a duas nos vertices do triangulo.

Seja ABC o triangulo dado; imaginemos dividido em n partes o lado BC e por cada ponto de divisão tiremos perpendiculares sobre os outros dois. Os pontos assim obtidos dividem os lados AB e AC em partes proporcionaes, logo as rectas que unem os pontos homologos situados sobre estes dois lados envolvem uma parabola P_1, que passa pelos pontos B e C e é tangente n'esses pontos ás perpendiculares BH_2 e CH_3, tiradas sobre AC e AB.

Effectuando o mesmo em relação a cada um dos outros lados, obteremos mais duas parabolas, uma P_2 passando por A e C e cujas tangentes n'esses pontos são AH_1 e CH_3, e outra P_3 passando por A e B, e cujas tangentes são AH_1 e BH_2.

A recta AH_1 é tangente commum ás parabolas P_2 e P_3, BH_2 é tangente commum ás parabolas P_1 e P_3, e CH_3 ás parabolas P_1 e P_2; as tres parabolas serão pois tangentes duas a duas nos vertices do triangulo dado.

D'este theorema conclue-se immediatamente que, *as tangentes communs ás tres parabolas, nos vertices do triangulo, cortam-se no orthocentro* H *d'este triangulo.*

As equações das tangentes ás tres parabolas, serão pois (*)

$$x \cos A = y \cos B = z \cos C$$

e as coordenadas triangulares do ponto em que ellas se cortam são evidentemente, sendo S a area do triangulo ABC,

$$x = \frac{abc}{2S} \cos B \cos C,$$

$$y = \frac{abc}{2S} \cos C \cos A,$$

$$z = \frac{abc}{2S} \cos A \cos B.$$

Se unirmos H com os meios dos lados do triangulo, os pontos l, m, n, que dividem ao meio as rectas A'H, B'H, C'H, pertencem respectivamente ás parabolas P_1, P_2, P_3, e as tangentes tiradas por elles ás conicas são parallelas respectivamente aos lados BC, AC e AB.

Podemos obter os fócos e as directrizes das tres parabolas pelo methodo de d'Ocagne ou pelo de Rouché. Applicando este ultimo (**), o fóco F_1 da parabola P_1 é o segundo ponto de intersecção de dois circulos, dos quaes um passa por B e toca em H a recta HC e o outro passa por C e toca em H a recta HB. Os fócos F_2 e F_3 das outras duas parabolas determinam-se do mesmo modo.

Segundo o methodo de Rouché, obtém-se a directriz da parabola P_1, tirando por H e B perpendiculares a HC, e por H e C perpendiculares a HB; estas rectas formam um parallelogrammo;

(*) Koehler, *Exercices de Géométrie Analytique et Géométrie Supérieure*, t. I.

(**) Rouché et De Comberousse, *Traité de Géométrie*, t. II.

a diagonal d'este parallelogrammo, que não passa por H, será a directriz da parabola P_1.

Como temos porém já a posição do fóco F_1, a directriz obtem-se mais facilmente construindo os pontos symetricos de F_1, em relação ás tangentes BH_2, CH_3; a recta que passa por elles é a directriz Δ_1 da parabola P_1.

Da mesma fórma construindo os pontos symetricos de F_2 e F_3 com relação ás tangentes AH_1, CH_3 e AH_1, BH_2, obtemos as directrizes Δ_2, Δ_3 das outras duas parabolas.

As perpendiculares E_1, E_2, E_3 tiradas dos fócos sobre as directrizes respectivas são os tres eixos das parabolas P_1, P_2, P_3.

Como já dissémos as tres rectas T, T′, T″ são tangentes ás tres parabolas e parallelas aos lados do triangulo dado; estas tres rectas formam um triangulo $A_1 B_1 C_1$, cujos vertices estão sobre as alturas do triangulo fundamental, que tem por orthocentro o ponto H e cujas alturas são evidentemente eguaes a metade das alturas do triangulo ABC. Os lados do triangulo $A_1 B_1 C_1$ tambem são eguaes a metade dos lados de ABC; os dois triangulos são pois homotheticos, e temos, representando por S_1 a area de $A_1 B_1 C_1$,

$$S = 4S_1.$$

Unindo os pontos A′ com B_1, C′ com A_1 e B′ com C_1, obtemos tres rectas que são evidentemente parallelas ás alturas CH_3, BH_2, AH_1; o triangulo $\alpha\beta\gamma$ formado por ellas é pois semelhante ao triangulo fundamental e circumscripto ao triangulo $A_1 B_1 C_1$, tangente ás tres parabolas.

Os pontos A′, B′, C′, H_1, H_2, H_3, A_1, B_1, C_1 estão sobre o circulo dos nove pontos do triangulo ABC, cuja equação em coordenadas triangulares normaes (*) é

$$x^2 \operatorname{sen} 2A + y^2 \operatorname{sen} 2B + z^2 \operatorname{sen} 2C - 2yz \operatorname{sen} A -$$

$$- 2zx \operatorname{sen} B - 2xy \operatorname{sen} C = 0$$

(*) Koeler, Ibidem.

e em coordenadas tangenciaes, entrando o seu raio,

$$\lambda \operatorname{sen} A \cos(B-C) + \mu \operatorname{sen} B \cos(C-A) + \gamma \operatorname{sen} C \cos(A-B) =$$

$$= \frac{abc}{4S} \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

O triangulo formado pelos tres arcos de parabola AB, BC, CA, tem os seus lados tangentes aos do triangulo $A_1 B_1 C_1$. Da mesma fórma os triangulos $B_1 H C_1$, $A_1 H C_1$, $A_1 H B_1$ têm os seus lados tangentes ás parabolas P_1, P_2, P_3. O orthocentro do primeiro d'estes triangulos é evidentemente o ponto A_1, e da mesma fórma os orthocentros dos triangulos $A_1 H C_1$ e $A_1 H B_1$ são os pontos B_1 e C_1.

Podemos pois dizer que: *o circulo dos nove pontos do triangulo fundamental é o circulo circumscripto ao triangulo* $A_1 B_1 C_1$, *cujos lados são tangentes ás tres parabolas, e a circumferencia d'este circulo passa pelos orthocentros dos tres triangulos, cujos lados são tangentes a cada uma das tres parabolas* P_1, P_2, P_3.

Tambem se vê immediatamente que: *o circulo dos nove pontos do triangulo* $A_1 B_1 C_1$ *é o circulo circumscripto ao triangulo* lmn *cujos vertices estão sobre as tres conicas.*

BIBLIOGRAPHIA

H. Faye: Sur l'origine du monde. Théories cosmogoniques des anciens et des modernes, 3.^e ed., Paris, G. Villars, 1896.

A obra de que vamos dar noticia é altamente interessante, já pela natureza do assumpto, já pela fórma elegante e superior como está redigida. N'ella considera o eminente sabio francez as theorias cosmogonicas que têm sido apresentadas pelos primeiros sabios tanto da antiguidade como dos tempos modernos, terminando-a pela exposição da sua propria theoria, tão bella e interessante. É consagrada á memoria do illustre Arago, o mestre do auctor, que o iutroduziu na carreira astronomica, e na verdade tão bellas paginas são dignas do nome a que são consagradas.

Abre o livro por uma pequena introducção sobre a ideia que se deve fazer de Deus á face da sciencia, á qual se segue a *primeira parte*, que é consagrada ás ideias cosmogonicas dos primeiros tempos, ideias expostas por Moyses no *Genesis*, o mais antigo monumento da sciencia primitiva.

A *segunda parte* da obra é destinada á exposição das ideias cosmogonicas dos antigos, as quaes, graças á influencia das viagens e dos observatorios construidos nos templos para a observação dos astros, se foram aperfeiçoando, passando-se da concepção da terra como um vasto disco chato, coberto por uma aboboda solida, á concepção da terra como um corpo redondo immovel, cercado por uma aboboda formada por sete espheras solidas transparentes, encaixadas umas nas outras, movendo-se á roda da terra e arrastando comsigo a lua, as estrellas e os cinco planetas então conhecidos. Estas ideias cosmogonicas dominaram até ao seculo XVI, em que, com Copernico e Kepler, a Astronomia entrou na sua phase scientifica.

Todavia, como faz observar o sr. Faye, já um dos maiores philosophos da antiguidade, Pythagoras, ensinava aos seus discipulos, na intimidade da escola, a rotação da terra á roda do seu eixo e a sua translação á roda do sol, expondo comtudo ao publico as ideias correntes da epocha, provavelmente para não ferir susceptibilidades religiosas. N'esta parte da obra são tambem expostas, em capitulos especiaes, as ideias de Platão, Aristoteles, Cicero, Lucrecio, Ovidio e Virgilio a respeito do mundo, sendo transcriptas e analysadas as passagens das obras d'estes homens celebres onde as suas ideias são expostas.

A *terceira parte* do livro é consagrada ás theorias cosmogonicas dos modernos. Abre pela exposição das ideias de Copernico e de Kepler, em que principia o triumpho das ideias pythagoricas, e apresenta depois em quatro formosos capitulos as ideias cosmogonicas de Descartes, Newton, Kant e Laplace.

A *quarta parte* da obra occupa quasi metade do volume e é consagrada ás theorias cosmogonicas do seculo IX e especialmente á bella hypothese imaginada pelo proprio auctor da obra. Antes de a expor, menciona o sr. Faye quaes as descobertas scientificas modernas a que se deve attender para formar uma theoria cosmogonica, descreve n'um largo capitulo o que se conhece a respeito dos mundos, que compõem o universo, e estuda finalmente n'outro largo capitulo a constituição physica do sol.

Preparado o leitor com estes elementos, expõe-lhe no capitulo seguinte a sua theoria cosmogonica, explicando como, com materia, que primitivamente estava no estado cahotico, se formaram as estrellas isoladas, as estrellas duplas, o systema solar, os anneis circulares, os planetas, os satellites e os cometas. N'um outro capitulo mostra-se a concordancia da theoria exposta com a geologia. O capitulo seguinte, ultimo da obra, é consagrado ás hypotheses relativas á existencia da vida nos corpos celestes e ao destino final do mundo actual.

Terminaremos esta rapida noticia repetindo que a leitura da obra do sr. Faye é das mais agradaveis, e acrescentando que está escripta de modo a poder ser lida por quem possue aspenas uma instrucção geral regular.

H. Vogt: Leçons sur la résolution algébrique des équations, Paris' Nony, 1895.

A theoria das equações algebricas, da qual foram fundadores

Lagrange, Gauss, Abel e Galois, é uma theoria difficil e extremamente interessante, que tem dado logar a trabalhos do mais alto interesse da parte de alguns dos maiores geometras modernos, como Kronecker, Netto, Jordan, etc. Expôr didacticamente esta theoria e indicar o que ha de mais essencial nas memorias que a respeito d'ella têm sido publicadas é o objecto principal do livro interessante e util que vem de publicar o sr. Vogt. N'um livro que tem este destino, as duas qualidades que principalmente se devem apreciar são, além da boa escolha dos assumptos, a clareza e a concisão; estas qualidades tem-as na verdade a nova obra, e por isso é ella muito propria para servir para o primeiro estudo da doutrina a que é consagrada.

Eis os assumptos dos treze capitulos em que o livro está dividido:

I Dos grupos de substituição. II Dos sob-grupos. Grupos simples e compostos. III Das funcções racionaes de muitas variaveis independentes. IV Relações algebricas entre as funcções racionaes de muitas variaveis. V Das funcções cyclicas e metacyclicas de muitas variaveis. VI Dominio de racionalidade. Reductibilidade das funcções inteiras. VII Das funcções racionaes das raizes d'uma equação. Grupo d'uma equação algebrica. VIII Das equações do segundo, terceiro e quarto gráo. Indagações de Lagrange. IX Da resolução algebrica das equações. X Das equações abelianas. XI Das equações da divisão do circulo. XII. Das equações resoluveis irreductiveis do gráo primo. XIII Do grupo d'uma equação.

H. Laurent: Traité d'Algèbre (Complements), Paris, G. Villars, 1894.

N'este opusculo o auctor estuda as propriedades fundamentaes das funcções inteiras de muitas variaveis, a theoria das funcções symetricas e a theoria da eliminação. A fórma empregada para estudar estas theorias, fundada n'um theorema importante de Jacobi, demonstrado no primeiro capitulo, é muito clara e simples. Os assumptos estão distribuidos por cinco capitulos, cujos titulos são: I Theorema de Jacobi. II As funcções symetricas e a eliminação. III Equações homogeneas. IV Propriedades das soluções. V Equivalencias algebricas.

B. Niewenglowski : Cours de Géométrie analytique, t. II, Paris, G. Villars, 1895.

Deu-se na pagina 91 d'este volume uma breve noticia a respeito do tomo I d'este excellente curso. O volume presente é consagrado á construcção das curvas planas e ao complemento da theoria das conicas.

Nos primeiros septe capitulos considera o auctor diversos assumptos de Geometria infinitesimal relativos á theoria geral das curvas planas, principalmente das algebricas. N'elles são estudadas a theoria dos pontos de inflexão, a theoria dos pontos multiplos e dos pontos singulares, a theoria da curvatura, a theoria das asymptotas, os theoremas de Newton, Maclaurin e Carnot relativos ás transversaes que cortam uma curva algebrica qualquer, as regras para a construcção das curvas, etc.

Os capitulos VIII e IX são destinados o primeiro ao estudo geral das curvas unicursaes e o segundo ao estudo de algumas curvas notaveis (cubicas unicursaes, ovaes de Cassini, hypocycloide com tres reversões, etc.).

Em todas as questões anteriores o auctor usa das coordenadas cartesianas e algumas vezes das coordenadas trilineares. No capitulo X são consideradas as coordenadas polares e applicadas ao estudo das principaes questões anteriormente consideradas e ainda a algumas outras onde estas coórdenadas são de preferencia usadas.

Os capitulos XI a XV são respectivamente consagrados a completar a theoria da ellipse, da hyperbole e da parabola, cujo estudo havia sido principiado no tomo anterior. N'elles é estudada a curvatura das conicas, a theoria das normaes a estas curvas, a theoria dos diametros, as propriedades focaes, a determinação das conicas por meio de condições dadas, etc.

O capitulo XVI é consagrado á resolução graphica das equações e finalmente o capitulo XVII á applicação dos imaginarios á geometria analytica.

Todos os assumptos considerados n'esta obra são expostos com muita clareza, rigor e desenvolvimento. São além d'isso acompanhados por muitos exemplos e exercicios muito bem escolhidos. Por todos estes motivos recomendal-a-hemos vivamente aos professores e alumnos das nossas escolas, que terão n'ella um auxiliar excellente os primeiros para o seu ensino, os segundos para o seu estudo.

G. Papelier: Leçons sur les coordonnées tangentielles, t. II, Paris, Nony, 1895.

Deu-se na pag. 52 d'este volume uma rapida noticia a respeito do tomo I d'esta obra, no qual é considerada a Geometria plana, e n'esse logar apreciámos a utilidade de uma tal publicação. No volume presente occupa-se o auctor da Geometria no espaço, distribuindo por onze capitulos os assumptos de que tracta, como vamos ver.

O capitulo I é consagrado aos primeiros principios da theoria que é o objecto do volume, isto é ao estudo da representação do ponto, do plano e da recta por meio de coordenadas tangenciaes e á resolução de diversos problemas fundamentaes, em que figuram sómente estas tres entidades geometricas, por meio d'estas coordenadas.

O capitulo II é destinado á exposição da theoria geral das curvas e das superficies. N'ella occupa-se o sr. Papelier da representação das curvas e das superficies por meio de equações entre coordenadas tangenciaes, mostra que as superficies planificaveis são representadas por duas equações e que as curvas e as superficies empenadas são representadas por uma só equação, acha a condição para que uma equação entre coordenadas tangenciaes represente uma curva, estuda a transformação das coordenadas ponctuaes para coordenadas tangenciaes, determina a classe das curvas, etc. Depois no capitulo III são estudadas as superficies planificaveis, e é estendida ao espaço a theoria, tão fecunda, da dualidade, que no tomo anterior tinha sido com muito cuidado estudada no caso da Geometria plana.

No capitulo IV são considerados diversos problemas relativos aos planos tangentes e aos planos normaes, que apparecem habitualmente nos livros de Geometria analytica.

10

Expostos os principios geraes da theoria das curvas e das superficies, são elles, nos capitulos seguintes, applicados á theoria das quadricas, que são estudadas com grande desenvolvimento, sendo o capitulo v consagrado á sua classificação, o capitulo vi á theoria dos pólos e das polares, o capitulo vii á theoria dos centros, diametros, planos diametraes e eixos, o capitulo viii ao estudo da reducção da equação geral do 2.° grão, o capitulo ix ao estudo das coordenadas tetraedricas, o capitulo x á theoria dos fócos e das superficies homogeneas, o capitulo xi ao estudo das propriedades dos systemas de duas quadricas.

Terminando diremos ainda que a redacção de toda a obra está feita com grande cuidado e que, pela clareza com que está escripta, a sua leitura é extremamente facil.

G. Pesci: Trattato elementare di Trigonometria piana e sferica, Livorno, 1895.

Contém este livro excellente um tractado bastante extenso de Trigonometria plana e espherica, escripto com muita clareza e bom methodo.

Abre por uma introducção, onde o auctor expõe de uma maneira rapida e simples algumas noções relativas á medida dos arcos e dos angulos, ao uso dos signaes na medida dos segmentos, e ao uso das coordenadas para determinar os pontos de um segmento, de uma circumferencia e d'uma esphera.

Segue depois a parte primeira da obra, que é consagrada á exposição da theoria das funcções trigonometricas. Estas funcções são definidas por meio das coordenadas cartesianas das extremidades dos arcos, meio o mais simples para as definir e para representar na memoria as suas variações.

A parte segunda é destinada á exposição da resolução dos triangulos planos e a parte terceira á resolução dos triangulos esphericos. Na exposição d'estes assumptos o auctor emprega, quanto possivel, o mesmo methodo para tractar as questões de Trigonometria plana e as de Trigonometria espherica que são analogas.

Em todas estas partes da sua obra o sr. Pesci faz com todo o cuidado as discussões das questões, que vae considerando, e apresenta muitas observações sobre as circumstancias a que é necessario attender para bem applicar os resultados obtidos. Além d'isso não apresenta sómente as formulas de Trigonometria mais usadas; apresenta tambem algumas de uso mais especial. Contém ainda a obra a que nos estamos referindo, além dos exemplos que vêm no fim de cada doutrina para a esclarecer, uma collecção de 2027 exercicios, dispostos gradualmente segundo a ordem da sua difficuldade, que augmentam o seu interesse, tornando-a muito util para os alumnos e professores.

Termina o volume por um appendice, onde é estudada com sufficiente desenvolvimento a doutrina relativa aos calculos numericos sobre numeros approximados, de que se faz uso em Trigonometria, o meio de empregar as taboas trigonometricas e as precauções a tomar para obter os resultados do calculo com approximação determinada, etc.

Terminando diremos que a obra do sr. Pesci, assaz desenvolvida, debaixo do ponto de vista theorico, é completa debaixo do ponto de vista pratico.

C. A. Laisant: Recueil de problemes de Mathématiques (Algèbre. Théorie des nombres. Probabilités. Géométrie de situation), Paris, G. Villars, 1896.

Deu-se em alguns numeros anteriores d'este jornal noticia dos quatro volumes d'esta importante collecção de problemas, até agora publicados, e disse-se que ella contém os enunciados dos problemas que têm sido propostos nos jornaes de mathematica que apresentam aos leitores questões a resolver. Os problemas publicados no presente volume referem-se á Algebra, á theoria dos numeros, á theoria das probabilidades e á Geometria de situação, e estão dispostos em 15 capitulos classificados do modo seguinte:

I Calculo algebrico. II Derivadas, series, limites. III Equações. IV Funcções. V Identidades e desigualdades. VI Problemas diversos. VII Numeração decimal. VIII Decomposição dos numeros em sommas. IX Divisibilidade arithmetica. X Numeros primos. XI Analyse indeterminada. XII Propriedades de numeros particulares. XIII Series, identidades, questões diversas. XIV Calculo das probabilidades. XV Geometria de situação.

De novo recommendaremos esta collecção de problemas, que são quasi todos interessantes e muitos devidos a geometras eminentes, devendo ainda notar-se que bastantes d'estes problemas não foram ainda resolvidos e outros podem dar logar a novas indagações (uns e outros são indicados) ; o sr. Laisant encarrega-se de mandar publicar as soluções que lhe forem enviadas dos problemas que estão nas circumstancias precedentes).

Ed. Brahy: Exercices méthodiques de Calcul intégral, Paris, G. Villars, 1895.

Esta collecção de problemas é muito propria para os alumnos se exercitarem nos methodos e regras de Calculo integral, porque os problemas apresentados estão dispostos de uma maneira muito bem graduada, principiando pelos exercicios que são uma simples applicação das regras de calculo e seguindo-lhes outros cada vez menos faceis, sem jámais attingirem um gráo de difficuldade que os torne improprios para as pessoas a quem são destinados. Todos estes exercicios estão dispostos em 18 capitulos, que abrangem os assumptos que fazem parte de um curso regular de Calculo integral, principiando cada capitulo por um resumo do theorema ou methodo que vae ser applicado nos exercicios que contém o capitulo. Os assumptos d'estes capitulos são:

I Integração immediata. II Integração por transformações algebricas. III Integração por partes. IV Integração das fracções racionaes. V Racionalisação. VI Integraes definidos. VII Quadratura das superficies planas. VIII Rectificação das curvas. IX Volumes. X Quadraturas das superficies curvas. XI Integração das funcções explicitas de muitas variaveis independentes. XII Integração das equações differenciaes de primeira ordem a duas variaveis. XIII e XIV Integração das equações lineares de ordem superior á primeira. XV Integração das equações não lineares de ordem superior á primeira. XVI Integração das equações lineares simultaneas com coefficientes constantes. XVII Integração das equações ás derivadas parciaes. XVIII Integração por series.

Terminando diremos que este livro mereceu o elogio do illustre geometra E. Catalan, que diz d'elle: *il est fort bien fait et pourra rendre de grands services.*

B. d'Engelhardt: Observations astronomiques, t. III, Dresde, 1895.

Demos já noticia n'este jornal dos dois primeiros volumes d'esta obra importante, que contém as observações astronomicas feitas pelo eminente astronomo sr. B. d'Engelhardt no seu observatorio particular, situado em Dresde.

O terceiro volume, que vem de ser publicado, abre por uma serie de observações micrometricas de satelites de Saturno, feitas no principio do anno de 1890. Seguem-se depois observações do eclipse de sol de 17 de junho de 1890, do eclipse da lua de 23 de maio de 1891, das occultações de Jupiter e seus satellites pela lua de 7 de agosto de 1889, de passagem de Mercurio sobre o disco do sol de 9 de maio de 1891, etc.

Vêm depois muitas observações de cometas feitas no intervallo de tempo que vae desde 1889 até 1894 e algumas observações dos planetas Themis e Diana feitas no mesmo intervallo.

Os volumes anteriores continham uma grande collecção de observações de nebulosas. No presente volume continua o sr. B. d'Engelhardt estas observações, constituindo assim um catalogo com as posições de 421 nebulosas, que foram por elle determinadas por meio de 1126 observações de ascenções rectas e 1107 observações de declinação. A estas observações segue-se a lista das estrellas que serviram para comparação.

Termina o volume uma grande collecção de medidas micrometricas de estrellas com movimento proprio, feitas no intervallo de 1871 a 1874, e uma collecção de novas medidas micrometricas de estrellas de Bradley, que são a continuação de outras publicadas no volume anterior.

A. J. da Silva Basto: Sobre a equação de Laplace a tres variaveis, Coimbra, 1895.

A equação de Laplace

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

é uma das que figuram na lista das equações particulares de maior importancia, que se consideram no Calculo integral, já por causa do seu uso em Physica mathematica, já por causa dos bellos e profundos trabalhos a que tem dado logar. Por isso foi muito feliz a ideia que teve o sr. Silva Basto escolhendo-a para objecto da sua Dissertação inaugural, que constitue uma boa monographia, onde está exposto com elegancia e clareza o que de mais importante se tem escripto a respeito d'esta equação celebre.

No primeiro capitulo são estudadas as propriedades geraes dos integraes da equação de Laplace, que são uniformes, finitos e continuos n'um volume dado, as quaes são obtidas por meio da formula de Green. No capitulo segundo são estes integraes desenvolvidos em serie.

No capitulo terceiro são dadas as primeiras indicações sobre o problema de Dirichlet, isto é, sobre o problema que tem por fim determinar uma funcção que nos pontos de um volume dado represente um integral da equação de Laplace e que tome valores dados nos pontos da superficie que limita este volume; n'este mesmo capitulo é resolvido este problema no caso da esphera.

O objecto do capitulo quarto é a transformação da equação de Laplace por meio de um systema de coordenadas curvilineas, devido a Lamé, e a resolução de um problema celebre considerado por este grande geometra, que o sr. Bastos estuda de uma maneira mais rigorosa do que a que é habitualmente empregada.

Os tres ultimos capitulos são consagrados o primeiro á representação conforme no espaço, o segundo á exposição do methodo dado por C. Neumann para resolver o problema de Dirichlet e finalmente o terceiro ao methodo dado para o mesmo fim por Poincaré, o qual o auctor simplifica muito.

A. dos Sanctos Lucas: Transformações de contacto, Coimbra, 1895.

A theoria das transformações de contacto é uma theoria toda moderna, que tomou em poucos annos um grande desenvolvimento, graças aos trabalhos successivos do seu fundador, Sophus Lie, e dos discipulos d'este geometra eminente. Por isso bem fez o sr. Lucas em publicar o seu trabalho, onde é exposta de um modo resumido e claro a parte fundamental d'esta doutrina.

O opusculo está dividido em quatro capitulos. No primeiro é estudada, em alguns casos particulares, a equação differencial de Pfaff

$$F_1\, dx_1 + \ldots + F_n\, dx_n = 0,$$

onde $F_1, \ldots, F_n$ representam funcções das variaveis $x_1, \ldots x_n$, e são apresentadas algumas noções preliminares de que se faz uso na theoria considerada. No capitulo segundo dá o auctor a definição das transformações de contacto e as suas propriedades fundamentaes. No capitulo terceiro continua o estudo das propriedades das transformações de contacto e expõe um processo para a determinação d'estas transformações, que é independente de qualquer integração. Finalmente no capitulo quarto vêm as applicações da doutrina exposta nos capitulos anteriores ao problema da integração das equações ás derivadas parciaes de primeira ordem com qualquer numero de variaveis independentes e ao problema de Pfaff.

Antonio Cabreira: Analyse geometrica de duas espiraes, Lisboa, 1895.

O auctor d'este interessante opusculo estuda n'elle as espiraes definidas pela equação

$$r = \sqrt[n]{\frac{n\theta}{\pi}},$$

ás quaes dá o nome de espiraes parabolicas de ordem n, considerando mais especialmente as espiraes de primeira e segunda ordem, das quaes apresenta um grande numero de propriedades. Os resultados achados são applicados á solução approximada do problema que tem por fim a quadratura do circulo e a cubatura da esphera.

D. Zoel G. de Galdeano: Discurso leido en la Universidad de Zaragoza en la solemne apertura del curso academico de 1895 á 1896, Zaragoza, 1895.

Contém este opusculo o bello discurso inaugural do anno academico de 1895 a 1896, pronunciado pelo sr. Galdeano na Universidade de Saragossa, o qual versa sobre o caracter e o estado das mathematicas na epocha presente. É um trabalho ao mesmo tempo historico e philosophico, em que o distincto professer hespanhol examina a origem dos diversos ramos que constituem as sciencias mathematicas e as relações que elles têm uns com os outros. Contém ainda o opusculo 16 notas em que o auctor dá informações interessantes sobre alguns pontos que no seu discurso apenas pôde indicar.

Annuaire pour l'an 1896 publié par le Bureau des longitudes, Paris, G. Villars.

Foi publicado em 1795 o primeiro volume d'esta importante e bem conhecida collecção de annuarios e desde então até hoje nem um só anno deixou de ser publicado o volume respectivo. O volume d'este anno vem, como nos annos anteriores, muito interessante. Contém, além das informações que todos os annos apresenta, as seguintes noticias scientificas:

1.ª *As forças a distancia e as ondulações*, por M. A. Cornu.

2.ª *Os trabalhos de Fresnel em Optica*, por M. A. Cornu.

3.ª *Sobre a construcção das nossas cartas magneticas do globo*, por M. Bernardières.

4.ª *Sobre uma terceira ascenção ao observatorio do vertice do*

Monte Branco e os trabalhos executados em 1895 n'esta montanha, por M. J. Janssen.

5.ª *Noticia sobre a vida e os trabalhos do contra-almirante Fleuriais*, por M. Bernardières.

6.ª *Discursos pronunciados nos funeraes de M. Brunner*, por MM. Janssen e Tisserand.

Statuts de la Société belge d'Astronomie, Bruxelles, 1895.

Com o titulo de *Société belge d'Astronomie* foi fundada em Bruxellas uma sociedade, que tem por fim a vulgarisação e o ensino mutuo de Astronomia e das sciencias que têm relação com ella. No Conselho geral d'esta Sociedade figuram muitos dos principaes astronomos belgas.

Bulletin de Mathématiques élémentaires.

O jornal interessante que com este titulo principiou este anno a publicar-se em Paris é dirigido pelo sr. Niewenglowski, inspector da Academia de Paris, e pelo sr. L. Gérard. A publicação é feita pela *Société des éditions scientifiques* em fasciculos que apparecem nos dias 1 e 15 de cada mez. Os assumptos considerados são aquelles que constituem o programma das mathematicas que se ensinam nos nossos lyceus. Em todos os numeros são propostas questões, cujas soluções apparecem nos numeros seguintes.

D. E. Guallart Elias: Pantógrafo planimetro, Madrid, 1895.

N'este opusculo é descripto pelo auctor um instrumento engenhoso que serve ao mesmo tempo para a reducção ou amplificação de um desenho e para determinar o valor das areas planas.

Este instrumento tem, como mostra o auctor, algumas vantagens sobre o planimetro de Amsler.

A. R. Forsyth: Obituary Notice. Arthur Cayley (Proceedings of the Royal Society, vol. 58).

Contém este opusculo uma noticia muito desenvolvida e muito interessante sobre a vida e os trabalhos do grande geometra inglez A. Cayley, do qual um excellente retrato adorna a primeira pagina.

Cayley nasceu em Richmond em 16 de agosto de 1821 e morreu em 26 de janeiro de 1895. Cultivou todos os ramos da Mathematica e em todos elles deixou vestigios do seu genio profundo. O numero de memorias que publicou é consideravel e são todas de um alto valor. Na noticia dada pelo sr. Forsyth encontram-se a respeito d'ellas valiosas informações.

A. Bassani: Sulle funzioni determinanti e generatrici di Abel (Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, série 2.ª, vol. VII).

N'esta memoria importante estuda o auctor a dependencia e as propriedades das duas funcções ligadas pela equação.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda} e^{-xz} F(z)\, dz,$$

o integral sendo tomado ao longo da curva fechada λ. Como applicação determina alguns integraes definidos e alguns desenvolvimentos de funcções analyticas em serie d'outras funcções. Acompanha o assumpto um resumo da historia das indagações a que tem dado logar a equação precedente.

Emory McClintock: Theorems in the Calculus of Enlargment (American Journal of Mathematics, vol. XVII).

O novo ramo de calculo, que é objecto da presente memoria, foi exposto pelo auctor n'uma memoria importante publicada no vol. II do *American Journal of Mathematics.* Este calculo é uma extensão do calculo das differenças finitas e constitue uma especie de algebra formal na qual a theoria da differenciação corresponde á theoria dos logarithmos na algebra ordinaria. Na presente memoria o auctor apresenta as series que no novo calculo correspondem ás series de Lagrange e Laplace para o desenvolvimento das funcções implicitas.

Emory McClintock: A Method for Calculating Simultaneously all the Roots of an Equation (American Journal of Mathematics, vol. XVII).

N'esta memoria é apresentado pelo auctor um methodo para determinar simultaneamente todas as raizes de uma equação algebrica qualquer dada. Para esse fim apresenta o auctor series ás quaes chega por meio do calculo a que nos referimos na noticia anterior. Assim, por exemplo, para resolver a equação

$$x^6 = -1 - x,$$

apresenta a serie

$$x = \omega + \frac{1}{6}\omega^2 - \frac{1}{24}\omega^3 + \frac{1}{81}\omega^4 - \ldots$$

onde ω representa as seis raizes de -1.

R. Marcolongo: Deformazione di una sfera isotropa (Annali di Matematica, serie 2.ª, t. XXIII).

Depois de algumas noções historicas a respeito do estudo da deformação de uma esphera isotropa, o auctor resolve dous novos problemas relativos a esta questão, suppondo a esphera solicitada por forças quaesquer e que não são dadas, sobre a superficie limite, nem todas as componentes do deslocamento nem todas as componentes das forças. Na segunda parte da sua bella e importante memoria dá o sr. Marcolongo ás equações em coordenadas polares do equilibrio de um corpo elastico isotropo uma fórma nova muito simples, por meio da qual demonstra e generalisa as formulas dadas por Borchardt para resolver por meio de integraes definidos o problema da deformação da esphera e os desenvolvimentos em series dados por Chree para resolver o mesmo problema.

S. Pincherle: L'Algebra delle forme lineari alle differenze (Memorie delle R. Accademia delle Scienze di Bologna, serie 5.ª, t. v).

O assumpto d'esta memoria pertence ao calculo a que o auctor chama *Calculo funccional*, isto é a um genero de calculo em que as funcções representam o papel que os numeros representam nas operações da Algebra ordinaria. A presente memoria é o primeiro d'alguns trabalhos que o eminente geometra italiano tenciona consagrar ao estudo das operações funccionaes, que gosam da propriedade distributiva, e n'ella é considerada a mais simples d'estas operações, isto é, aquella cujo effeito sobre uma funcção é augmental-a de uma unidade. Esta operação é designada por θ, de modo que temos

$$\theta f(x) = f(x+1), \quad \theta^a (fx) = f(x+a),$$

e dá logar a fórmas lineares

$$\mathrm{F} = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \ldots + a_m \theta^m ,$$

onde a_0, a_1, a_2, ... são funcções de x, que representam a operação por meio da qual a funcção $f(x)$ se converte em

$$a_0 f(x) + a_1 f(x+1) + \ldots + a_m f(x+m),$$

as quaes são estudadas tanto no caso de m ser finito como no caso de ser infinito.

M. Lerch: Bemerkungen über eine classe arithmetischer Lehrsätze (Sitzungsberichte der konigl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1894).

—— Zur Theorie der Kronecker, schen Doppelreihe Ser (ξ, ζ, u, v, w) *(Monatsheft für Mathematik, t. v).*

Gutzmer: Ueber den analytischen Ausdruck des Huygenschen Princips (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 114).

—— Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen (Item, t. 115).

M. d'Ocagne: Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'École Polytechnique (Nouvelles Annales, 3.e série, t. XIV).

—— Sur la composition des lois de probabilité des erreurs de situation d'un point sur un plan (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXIII).

—— Sur une application de la théorie de la probabilité des erreurs aux nivellements de haute précision (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1895).

C. A. Laisant: Note sur les invariants des polynômes entiers (Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. VII).

—— Extension de l'expression de la dérivée logarithmique d'un polynôme entier (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen, 1894).

Pirondini: Quelques propriétés de l'hyperbole (Mathésis, 2.ª série, t. III).

—— Di alcune superficie che ammettono un sistema di linnee eguali o simili (Annali di Matematica, 1894).

E. Pascal: Sulle funzioni σ ellittiche pari (Rend. del R. Ist. Lomb, 1895).

E. Carvallo: Sur la dépolarisation de la lumière dans le voisinage des axes optiques des cristaux biaxes (Journal de Physique, 3.ª série, t. IV).

E. Lemoine: Étude sur le triangle et sur certains points de Géométrographie (Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. XIII).

C. Burali-Forti: Sul limite delle classi variabili (Atti della R. Accademia di Torino, 1895).

G. Pesci: Errori prodotti dalla interpolazione simplice nell' uso delle tavole logarithmo-trigonometriche (Rivista maritima, 1895).

G. Vivanti: Preliminari per lo studio delle funzioni di due variabili (Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. IX).

—— Über gewisse der Ikosaederirrationalitat analoge irrationalitäten (Monstshefte für Mathematik, t. VI).

—— Sulle superficie a curvatura media constante (Rend. del R. Ist. Lombardo, 1895).

Macfarlane: On the units of light and radiation (American Institute of Elctrical Engineers, 1895).

D. Besso: Di una formula relativa all' integrale ellittico completo di prisma specie, contenuta in una precedente Nota (Rend. delle R. Accademia dei Lincei, 1895).

G. B. Guccia: Sur une question concernant les points singuliers des courbes gauches algébriques (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1895).

—— Sur les points doubles d'un faisceau de surfaces algébriques (Item).

—— Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques douées de singularités quelconques (Bulletin de la Société mathématique de France, 1895).

G. Peano: Sopra lo spostamento del polo sulla terra (Atti della R. Academia di Torino, 1895).

Gino Loria: Per Lean Battista Alberti (Bibliotheca mathematica de Eneström, 1895).

G. T.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XII—N.º 6

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1896

SUR UN CAS PARTICULIER DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI

PAR

R. MARCOLONGO

(Professeur à l'Université de Messina)

Les équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, données par Kirchhoff (Jorn. Crelle T. 71), ont été transformées par Clebsch (Math. Ann. T. III) dans les suivantes:

$$1)\quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3 \frac{\delta T}{\delta y_2} - x_2 \frac{\delta T}{\delta y_3}\text{ ; etc.} \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_3 \frac{\delta T}{\delta x_2} - x_2 \frac{\delta T}{\delta x_3} + y_3 \frac{\delta T}{\delta y_2} - y_2 \frac{\delta T}{\delta y_2}\text{ ; etc.} \end{aligned}$$

T est la force vive du liquide et du corps et est une fonction homogène quadratique positive des six variables x, y.

C'est un système de six équations différentielles du premier ordre, dont on connaît le dernier multiplicateur, égal à l'unité, et les intégrales:

$$2T = l;\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2;\quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = n.$$

Le problème est résolu si l'on peut trouver une quatrième intégrale indépendante du temps. Clebsch cherche si le système 1) admet une intégrale linéaire en x et y et il trouve que cela est possible seulement dans un cas ; et puis si le même système admet une intégrale fonction homogène du second ordre en x et y; ce qui est possible dans deux cas, dans lesquels l'intégration se fait par les fonctions hyperelliptiques. Ces cas ont été traités par M. Weber (Math. Ann., T. XIV) et puis par M. Kötter F. (Journ. Crelle, CIX).

Il y a cependant un autre cas échappé à l'analyse de Clebsch et signalé par M. Stekloff (Math. Ann., T. XLII).

Dans le premier cas la quatrième intégrale est: $y_3 = \text{const.}$

Alors il faut que:

$$x_2 \frac{\delta T}{\delta x_1} - x_1 \frac{\delta T}{\delta x_2} + y_2 \frac{\delta T}{\delta y_1} - y_1 \frac{\delta T}{\delta y_2} = 0.$$

Donc T est une fonction de:

$$x_1^2 + x_2^2; \quad y_1^2 + y_2^2; \quad x_1 y_1 + x_2 y_2;$$

et encore de x_3 et y_3 ; on doit donc pouvoir donner à T la forme:

$$2T = p\left(x_1^2 + x_2^2\right) + p' x_3^2 + 2q(x_1 y_1 + x_2 y_2) + 2q' x_3 y_3 +$$
$$+ r\left(y_1^2 + y_2^2\right) + r' y_3^2,$$

où p, p', r, r', q, q' sont des constantes ; les quatres premières sont positives.

C'est ce qu'on prouve en effet par un choix convenable des axes.

Dans ce cas l'intégration se fait par les fonctions elliptiques ; Halphen (Fonct. Ellipt. T. II) le traite avec sa superiorité habituelle, et puis déduit, d'une manière assez pénible, le cas particulier où l'on a $p=p'$, très intéressant pour les analogies qu'il présente avec le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe.

Je me propose de traiter directement ce cas; beaucoup des simplifications obtenues peuvent aussi s'obtenir dans le cas général.

Soient $(x_0\, y_0\, z_0)$ les axes fixes; $(x_1\, y_1\, z_1)$ les axes mobiles avec le corps; u_1, v_1, w_1 les composantes sur les axes mobiles de la translation du corps; p_1, q_1, r_1 les composantes, sur les mêmes axes, de la rotation instantanée du liquide par rapport au corps. Si l'on se rappelle que:

$$p_1=\frac{\delta T}{\delta y_1},\quad q_1=\frac{\delta T}{\delta y_2},\quad r_1=\frac{\delta T}{\delta y_3},$$

les trois premières équations du système 1) montrent aussitôt que x_1, x_2, x_3 sont proportionnelles respectivement à:

$$\cos(x_1\, z_0);\ \cos(y_1\, z_0);\ \cos(z_1\, z_0).$$

De sorte que:

$$x_1=m\cos(x_1\, z_0);\ x_2=m\cos(y_1\, z_0);\ x_3=m\cos(z_1\, z_0).$$

Le système 1) peut être remplacé par le suivant:

$$\frac{d\log(x_1+ix_2)}{dt}=i(q'-q)x_3+ir'y_3-irx_3\frac{y_1+iy_2}{x_1+ix_2}$$

$$2)\qquad \frac{dx_3}{dt}=r(x_2y_1-x_1y_2)$$

$$\frac{y_1+iy_2}{x_1+ix_2}=\frac{(y_1+iy_2)(x_1-ix_2)}{m^2-x_3^2}=\frac{y_3\left(n_1-x_3-\dfrac{i}{ry_3}\dfrac{dx_3}{dt}\right)}{m^2-x_3^2};$$

$$n_1=\frac{n}{y_3}.$$

..

On a cette propriété : après avoir déterminé x_3 en fonction du temps, l'intégration du système s'achève par une quadrature.

En effet la troisième équation nous donnerà $\dfrac{y_1+iy_2}{x_1+ix_2}$; et la première, avec une quadrature, x_1+ix_2 ; x_1-ix_2 se déduira tout de suite aussi, car on connaît $x_1^2+x_2^2=m^2-x_3^2$; et puisque de l'intégrale $2T=l$ on tire

$$y_1^2+y_2^2=\frac{2(q'-q)y_3}{r}(m_1-x_3)$$

où m_1 est constante, de la valeur de y_1+iy_2, on déduira celle de y_1-iy_2.

La deuxième équation nous donne

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)-(x_1\,x_2+y_1\,y_2)\,;$$

c'est à dire

$$(3)\qquad \frac{1}{r^2}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2=\frac{(q'-q)y_3}{2r}\left\{4\left(x_3^2-m^2\right)(x_3-m_1)-\right.$$

$$\left.-\frac{2r\,y_3}{q'-q}(x_3-n_1)^2\right\}.$$

Donc x_3 est une fonction elliptique du temps.

Disons $3h$ le coefficient de x_3^2 dans le polinôme entre parenthèse, ρ la constante d'homogénéité ; si nous posons :

$$u = \frac{i\rho r y_3}{s} t + \text{const} ;$$

$$s = i\sqrt{\frac{2y_3 \rho r}{q' - q}}$$

l'on a :

$$x_3 = -\frac{1}{4} h + \rho p u.$$

Soient a, a_1, a_2, trois constantes telles que :

$$x_3^2 - m^2 = \rho^2 (pu - pa)(pu - pa_1); \quad x_3 - m_1 = \rho (pu - pa_2) ;$$

h, m, m_1, s'expriment au moyen de a, a_1, a_2, par les formules

$$h = 2\rho (pa + pa_1) ; \quad 2m = \rho (pa - pa_1) ; \quad 2m_1 = \rho (2pa_2 - pa - pa_1)$$

Par conséquent

$$x_3 - m = \rho (pu - pa) ; \quad x_3 + m = \rho (pu - pa_1),$$

$$x_3 = -\frac{\rho}{2} \frac{\sigma^2 a_1 \sigma (u-a) \sigma (u+a) + \sigma^2 a \sigma (u-a_1) \sigma (u+a_1)}{\sigma^2 a \sigma^2 \sigma_1 \sigma^2 u},$$

$$x_3^2 - m^2 = \rho^2 \frac{\sigma (u-a) \sigma (u+a) \sigma (u-a_1) \sigma (u+a_1)}{\sigma^2 a \sigma^2 a_1 \sigma^4 u}.$$

L'équation (3) se transforme ainsi :

$$p'^2 u - \frac{s^2}{\rho^4}\{(x_3 - n_1)^2 = 4\,(pu - pa)\,(pu - pa_1)\,(pu - pa_2).$$

Faisons

$$\varphi\,(u) = p'u - \frac{s}{\rho^2}\,(x_3 - n_1),$$

et nous aurons

$$\varphi\,(u)\,\varphi\,(-u) = -4\,(pu - pa)\,(pu - pa_1)\,(pu - pa_2).$$

Le premier membre est une fonction entière de pu; elle a les zéros $\pm a$; $\pm a_1$; $\pm a_2$ et l'infini sextuple $u = 0$; donc $\varphi\,(u)$ a les zéros $-a, -a_1$, $a_2 = a + a_1$; d'où il suit que :

$$\varphi\,(u) = \frac{2}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma\,(a + a_1)}\;\frac{\sigma\,(u + a)\,\sigma\,(u + a_1)\,\sigma\,(u - a - a_1)}{\sigma^3 u},$$

$$\varphi\,(-u) = \frac{2}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma\,(a + a_1)}\;\frac{\sigma\,(u - a)\,\sigma\,(u - a_1)\,\sigma\,(u + a + a_1)}{\sigma^3 u}.$$

Mais $\varphi\,(u)$ a aussi la forme

$$\mathrm{A}pu + \mathrm{B}p'u + \mathrm{C},$$

et avec les méthodes connues on trouve

$$A = \frac{p'a_1 - p'a}{pa_1 - pa}; \quad B = 1;$$

$$C = \frac{pa\, p'a_1 - pa_1\, p'a}{pa - pa_1}.$$

On peut donc aussi exprimer les deux constantes s, n_1 au moyen de a et a_1. Ainsi :

$$\frac{p'a_1 - p'a}{pa_1 - pa} = 2\left\{\zeta(a+a_1) - \zeta a - \zeta a_1\right\} = -\frac{s}{\rho}.$$

Enfin, observons que :

$$x_3 - m_1 = -\rho\,\frac{\sigma(u-a-a_1)\,\sigma(u+a+a_1)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(a+a_1)},$$

$$y_1^2 + y_2^2 = -\frac{4\rho^2 y_3^2}{s^2}\,\frac{\sigma(u-a-a_1)\,\sigma(u+a+a_1)}{\sigma^2 u\sigma^2(a+a_1)}.$$

Comme il a été observé, il faut exprimer $\frac{y_1 + iy_2}{x_1 + ix_2}$ en fonction de u. Or :

$$(y_1 + iy_2)(x_1 - ix_2) = y_3\left\{\frac{\rho^2}{s}\,p'u - (x_3 - n_1)\right\} = \frac{\rho^2 y_3}{s}\,\varphi(u),$$

$$(y_1 - iy_2)(x_1 + ix_2) = -\frac{\rho^2 y_3}{s}\,\varphi(-u),$$

d'où :

$$\frac{y_1 + iy_2}{x_1 + ix_2} = \frac{2y_3}{s} \frac{\sigma a \sigma a_1}{\sigma(a+a_1)} \frac{\sigma u \sigma(u-a-a_1)}{\sigma(u-a)\sigma(u-a_1)}.$$

Maintenant on peut détérminer $x_1 + ix_2$; en effet la première équation du système 2) devient :

$$\frac{d(\log(x_1+ix_2)}{du} + \frac{2\rho}{s} pu = \frac{\rho}{s}(pa + pa_1) + \frac{sr'}{\rho r} -$$

$$-(2pu - pa - pa_1)\frac{\sigma a \sigma a_1 \sigma u \sigma(u-a-a_1)}{\sigma(a+a_1)\sigma(u-a)\sigma(u-a_1)}.$$

Il s'agit de décomposer le second membre, qui est une fonction rationnelle de pu et $p'u$, en éléments simples. Les pôles sont : 0, a, a_1 ; elle a donc la forme

$$\alpha + \mathrm{A}\zeta(u-a) + \mathrm{A}_1\zeta(u-a_1) + \mathrm{B}\zeta u.$$

Les valeurs des constantes se trouvent aisément ; elles sont :

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 = 1 ; \quad \mathrm{B} = -2 ;$$

$$\alpha = \zeta a + \zeta a_1 + \frac{\rho}{s}(pa + pa_1) + \frac{s(r'-r)}{\rho r}.$$

Donc:

$$\frac{d\log(x_1+ix_2)}{du} = -\frac{2\rho\, pu}{s} + \alpha + \frac{d}{du}\log\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-a_1)}{\sigma^2 u}.$$

En intégrant et disposant convenablement de la constante, on a:

$$x_1+ix_2 = \rho\,\mathrm{E}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-a_1)}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma^2 u}\, e^{\left(\frac{2\rho}{s}\zeta u+\alpha u\right)}.$$

Les formules suivantes s'en déduisent aussitôt:

$$x_1-ix_2 = -\frac{\rho}{\mathrm{E}}\,\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u+a_1)}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma^2 u}\, e^{-\left(\frac{2\rho}{s}\zeta u+\alpha u\right)}$$

$$y_1+iy_2 = \frac{2\rho\, y_3\mathrm{E}}{s}\,\frac{\sigma(u-a-a_1)}{\sigma(a+a_1)\,\sigma u}\, e^{\left(\frac{2\rho}{s}\zeta u+\alpha u\right)}$$

$$y_1-iy_2 = -\frac{2\rho\, y_3}{s\mathrm{E}}\,\frac{\sigma(u+a+a_1)}{\sigma(a+a_1)\,\sigma u}\, e^{-\left(\frac{2\rho}{s}\zeta u+\alpha u\right)}.$$

Pour achever la solution il faut déterminer les composantes de la rotation, les cosinus des angles des axes mobiles, les coordonnées de l'origine en fonction de u. Puisque:

$$p_1 = qx_1 + ry_1;$$

$$q_1 = qx_2 + ry_2;$$

$$r_1 = q'x_3 + r'y_3$$

et:

$$p_1 + iq_1 = q(x_1 + ix_2) + r(y_1 + iy_2)$$

la détermination des composantes de la rotation n'offre de difficulté. Pour les cosinus observons que:

$$\cos(x_1 z_0) \pm i \cos(y_1 z_0) = \frac{1}{m}(x_1 \pm ix_2).$$

Donc:

$$\cos(x_1 z_0) + i\cos(y_1 z_0) =$$

$$= \frac{2E\,\sigma a \sigma a_1}{\sigma(a_1 + a)\sigma(a_1 - a)} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-a_1)}{\sigma^2 u} e^{\left(\frac{2\rho}{s}\zeta u + \alpha u\right)}$$

$$\cos(x_1 z_0) - i\cos(y_1 z_0) =$$

$$- \frac{2\sigma a \sigma a_1}{E\sigma(a_1 + a)\sigma(a_1 - a)} \frac{\sigma(u+a)\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u} e^{-\left(\frac{2\rho}{s}\zeta u + \alpha u\right)}$$

$$\cos(z_1 z_0) = \frac{2\,pu - pa - pa_1}{pa - pa_1}.$$

Rappellons maintenant la formule :

$$\frac{d}{dt}\log(\cos x_0 z_1 + i\cos y_1 z_0) = -\frac{i}{2}\left\{\frac{(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)(p_1 - iq_1)}{1+\cos z_0 z_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1)(p_1 + iq_1)}{1-\cos z_0 z_1}\right\}.$$

Le second membre est égal à :

$$-\frac{i}{2}\left\{\frac{x_1+ix_2}{m+x_3}[q(x_1-ix_2)+r(y_1-iy_2)] + \frac{x_1-ix_2}{m-x_3}[q(x_1+ix_2)+\right.$$

$$\left. + r(y_1+iy_2)]\right\}.$$

ou encore à :

$$-iqm - \frac{ir\rho y_3}{2s}\left\{\frac{\varphi(u)}{pu-pa} - \frac{\varphi(-u)}{pu-pa_1}\right\}.$$

Considérons la fonction :

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi(u)}{pu-pa} = -\frac{\sigma a}{\sigma a_1\,\sigma(a+a_1)}\frac{\sigma(u+a_1)\,\sigma(u-a-a_1)}{\sigma(u-a)\,\sigma u}.$$

Les pôles étant 0, a, les zéros $-a_1$, $a+a_1$, on la met sous la forme :

$$\zeta a_1 - \zeta(a+a_1) - \zeta(u-a) - \zeta u$$

et par conséquent :

$$\frac{d}{dt}\log(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1) =$$

$$= -iqm - \frac{ir\rho y_3}{s}\left\{\zeta a_1 - \zeta a - \frac{d}{du}\log\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u}\right\}.$$

Donc :

$$\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1 =$$

$$= \frac{2\mathrm{E}e^{-iqtm}\sigma a\sigma a_1}{\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)}\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u}e^{(\zeta a-\zeta a_1)u},$$

$$\cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1 =$$

$$= -\frac{2e^{iqmt}\sigma a\sigma a_1}{\mathrm{E}\sigma(a-a_1)\sigma(a+a_1)}\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a_1)}{\sigma^2 u}e^{-(\zeta a-\zeta a_1)u}.$$

Representons enfin par X, Y, Z les coordonnées de l'origine des axes mobiles. Kirchhoff a prouvé que :

$$X = \frac{1}{m}\left\{y_1 \cos(x_1 y_0) + y_2 \cos(y_1 y_0) + y_3 \cos(z_1 y_0)\right\},$$

$$Y = -\frac{1}{m}\left\{y_1 \cos(x_1 x_0) + y_2 \cos(y_1 z_0) + y_3 \cos(z_1 x_0)\right\},$$

d'où :

$$X + iY =$$

$$= -\frac{i}{m}\left\{y_1(\cos x_1 x_0 + i\cos x_1 y_0) + y_2(\cos y_1 x_0 + + i\cos y_1 y_0) + \right.$$

$$\left. + y_3(\cos z_1 x_0 + i\cos z_1 y_0)\right\}.$$

Or on a :

$$(\cos x_1 x_0 + i\cos x_1 y_0) + i(\cos y_1 x_0 + i\cos y_1 y_0) =$$

$$= \frac{(\cos z_1 x_0 + i\cos z_1 y_0)(\cos x_1 z_0 + i\cos y_1 z_0)}{1 + \cos z_1 z_0},$$

$$(\cos x_1 x_0 + i\cos x_1 y_0) - i(\cos y_1 x_0 + i\cos y_1 y_0) = -$$

$$- \frac{(\cos z_1 x_0 + i\cos z_1 y_0)(\cos x_1 z_0 - i\cos y_1 z_0)}{1 - \cos z_1 z_0}.$$

Donc :

$$X + iY = -\frac{i}{2m}(\cos z_1 y_0 + i\cos z_1 y_0)\left\{\frac{(\cos x_1 z_0 + i\cos y_1 z_0)(y_1 - iy_2)}{1 + \cos z_1 z_0}\right.$$

$$\left. - \frac{(\cos x_1 z_0 - i\cos y_1 z_0)(y_1 + iy_2)}{1 - \cos z_1 z_0} + 2y_3\right\}.$$

On pourra donc regarder comme connus les binômes $X \pm iY$; la recherche de Z n'offre de difficulté.

Si l'on rapproche les formules qui donnent $\cos z_0 z_1$; $\cos z_0 x_1 \pm i \cos z_0 y_1$, avec les formules analogues dans le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe de symétrie, on conclut que le mouvement de l'axe du corps dans un liquide et de l'axe d'un corps grave de révolution diffèrent par une rotation uniforme dont la vitesse est mq.

Messina: mars 1896.

BIBLIOGRAPHIA

F. Klein: Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire. Redaction française par J. Griss, Paris, Nony, 1896.

Contém este opusculo uma serie de conferencias feitas pelo eminente professor da Universidade de Gottingen, F. Klein, durante as ferias da Paschoa de 1894, n'aquella Universidade.

O objecto d'estas conferencias, vivamente interessante e magistralmente tratado pelo auctor, é o estudo de alguns problemas de Geometria elementar que se tornaram celebres em virtude dos esforços empregados pelos geometras antigos para os resolverem. São elles:

1.° O problema da duplicação do cubo, tambem chamado problema de Délos;

2.° O problema da trisecção do angulo;

3.° A quadratura do circulo.

A respeito de cada um d'estes problemas o auctor examina as condições da possibilidade ou impossibilidade de uma solução geometrica, e para esse fim não emprega outros meios que os puramente elementares, isto é os que possuem os alumnos das nossas escholas superiores de mathematica no fim do 1.° anno.

Os geometras antigos procuraram resolver os problemas, a que vimos de nos referir, por meio da régoa e do compasso ordinario, isto é por meio do traçado de rectas e circulos, sem o poderem conseguir. A falta de successo dos esforços empregados para os resolver por este meio levou depois os geometras a considerar como provavel a impossibilidade de um tal modo de solução, sem todavia a demonstrarem, continuando por isso a haver quem se occupasse d'elles. Só modernamente foi esta impossibilidade demonstrada, e é a esta questão que é principalmente consagrado o livro de Klein.

Para conseguir este fim, estabelece primeiramente o auctor que é condição necessaria e sufficiente para que uma expressão analytica possa ser construida por meio da régoa e do compasso, que ella se deduza das grandezas conhecidas por meio de operações racionaes ou por meio de raizes quadradas em numero finito. Depois mostra que esta condição não se verifica nos problemas enunciados.

Contém o livro a que nos estamos referindo uma introducção e dez capitulos.

Na introducção menciona o auctor resumidamente o objecto do seu trabalho.

No capitulo I são apresentadas algumas proposições, tiradas da theoria das equações algebricas, as quaes são relativas á resolução d'estas equações por meio de radicaes. Estas proposições são usadas no capitulo II para se demonstrar a impossibilidade de resolver por meio da régoa e do compasso o problema da duplicação do cubo (construcção d'um cubo duplo d'um cubo dado) e o problema da trisecção do angulo.

O capitulo III é dedicado ao theorema celebre de Gauss, segundo o qual é condição necessaria e sufficiente para que o circulo possa ser dividido em p partes iguaes por meio da régoa e do compasso, p representando um numero primo, que este numero seja da fórma $2^{2^m}+1$. O caso de ser $m=2$, isto é o caso da divisão do circulo em 17 partes iguaes, é desenvolvidamente estudado no capitulo IV, onde é exposto o meio de executar esta divisão.

No capitulo V apresenta o auctor algumas generalidades sobre a construcção das expressões algebricas por meio de conicas e por meio de curvas de ordem superior, quando o problema não póde ser resolvido por meio de rectas e circumferencias.

Passa depois o auctor a estudar o problema da quadratura do circulo. Para preparar para este estudo, demonstra em primeiro logar a existencia de numeros transcendentes. Demonstra depois o theorema de Hermite, segundo o qual o numero e, base dos logarithmos neperianos, é transcendente, e finalmente o theorema a que Lindemann foi levado por uma extensão da demonstração dada por Hermite do theorema precedente, segundo o qual o numero π é tambem transcendente. Para demonstrar estas proposições notaveis, emprega Klein um methodo muito elementar, devido a Gordan. Como conseqnencia do theorema de Lindmann resulta que o numero π não póde ser construido com régoa e compasso, nem portanto por meio d'estes instrumentos póde ser resolvido o problema da quadratura do circulo. Termina o livro um rapido exame d'um instrumento inventado por um engenheiro russo, Abdank-Akakanowicz, por meio do qual se póde traçar, por um movimento continuo, uma curva transcendente que determina o numero π.

Todas as questões tratadas no bello livro de Klein são acompanhadas de informações historicas do maior interesse.

E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Paris, t. I, *A. Hermann, 1896*

Ha alguns annos publicou o sr. Goursat um volume importante sobre a integração das equações ás derivadas parciaes, no qual se occupava unicamente das equações de 1.ª ordem.

No volume actual continua o sabio geometra os seus trabalhos sobre este assumpto importante, considerando agora as equações de 2.ª ordem, das quaes promette continuar ainda a occupar-se n'um segundo volume.

O auctor dividiu o seu bello e importante trabalho em quatro capitulos, do assumpto dos quaes vamos dar uma noticia resumida.

No capitulo I são consideradas em primeiro logar as equações ás derivadas parciaes das superficies geradas pelas curvas d'um complexo ou envolvidas pelas superficies d'um complexo. Em seguida é considerada a questão que tem por fim determinar uma superficie integral d'uma equação ás derivadas parciaes $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ dada, que passa por uma curva dada e é tangente ao longo d'esta curva a uma superficie planificavel tambem dada, questão a que o auctor dá o nome de *problema de Cauchy*, por estar ligada com a theoria da existencia dos integraes, considerada por este grande geometra. Fundado nos resultados d'este problema, define o auctor com precisão o que se deve intender por *integral geral* das equações ás derivadas parciaes de 2.ª ordem.

No capitulo II estuda o sr. Goursat desenvolvida e profundamente a equação $Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$, (H, K, L, M, N representando funcções de x, y, z, p, q), conhecida pelo nome de equação de Monge e Ampère, por ter sido considerada primeiramente por Monge, no caso de ser $N = 0$, e em seguida por Ampère em duas memorias celebres publicadas no Jornal da Escola Polytechnica de Paris. A respeito d'esta equação o auctor considera o problema de Cauchy, os methodos de integração de Monge e Ampère, a applicação d'estes methodos á integração da equação das superficies minimas, etc. Para dar mais generalidade ás theorias expostas, o auctor estende a definição de integral, seguindo o caminho aberto por S. Lie para o caso das equações de 1.ª ordem.

No capitulo III faz o auctor muitas applicações interessantes dos methodos expostos nos capitulos anteriores. Assim, determina as *superficies de Joachimstal*, isto é as superficies em que as linhas de curvatura d'um dos systemas são curvas planas, cujos planos passam por uma recta fixa; determina as *superficies de Monge*, isto é as superficies em que as linhas de curvatura d'um dos systemas estão situadas sobre espheras concentricas; determina as superficies para as quaes a representação espherica d'um dos systemas de linhas de curvatura se compõe de circulos passando por dous pontos fixos da esphera; procura as superficies que admittem uma representação espherica dada, etc.

No ultimo capitulo o auctor extende a noção de *caracteristica*, primeiramente definida só para a equação de Monge e Ampère, a equações de fórma qualquer, estuda profundamente esta noção e d'este estudo tira consequencias do maior interesse para a theoria a que o livro é consagrado.

Todos os assumptos d'esta obra importante são tratados com muita elegancia, clareza e originalidade.

P. Painlevé: Leçons sur le frottement, Paris, Hermann, 1895.

Contém este volume algumas bellas lições feitas na Faculdade das Sciencias de Paris pelo sr. P. Painlevé. N'ellas se occupa este illustre geometra do movimento dos systemas dotados de attricto, considerando os systemas formados por pontos materiaes isolados e os systemas formados por corpos continuos, cuja posição só depende d'um numero finito de parametros.

As primeiras 57 paginas do volume são destinadas á exposição da theoria. Encontram-se n'estas paginas a definição das forças de attricto e as suas leis e propriedades, o estudo da combinação, compatibilidade e superabundancia das ligações dos systemas, a enumeração das ligações simples entre solidos, etc.

As 54 restantes paginas do volume são consagradas ás applicações. N'ellas é considerado o movimento d'um ponto sobre uma curva em diversas circumstancias; o movimento dos systemas cujo centro de gravidade descreve uma curva dada; o movimento dos systemas que comprehendem uma curva movel sobre a qual escorrega um ponto do systema; o movimento d'um ponto sobre uma superficie em diversas circumstancias; o movimento dos systemas cujo centro de gravidade descreve uma superficie; o movimento dos systemas que encerram uma superficie solida movel sobre a qual escorrega um ponto do systema; o movimento dos systemas de solidos cujas reacções dependem das leis do attricto, etc. Exemplos muito bem escolhidos contribuem para esclarecer alguns dos assumptos considerados.

Ch. Méray: Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques (Deuxième partie), Paris, G. Villars, 1895.

Deu-se em um dos numeros anteriores d'este jornal uma noticia a respeito do 1.° volume d'esta obra importante. Como dissémos, n'elle occupa-se o auctor dos principios, methodos e theoremas geraes da theoria das funcções, deixando para o volume seguinte o estudo das funcções particulares. Hoje temos o prazer de annunciar que o volume consagrado a estas funcções particulares, complemento indispensavel do anterior, está já publicado, e que graças ao desenvolvimento e generalidade com que foram tratadas as doutrinas expostas no volume I, se marcha rapidamente na leitura dos assumptos mais particulares expostos no presente volume.

Dividiu o sr. Méray o 2.° tomo da sua obra em 13 capitulos, de cujo assumpto vamos dar uma noticia resumida.

O capitulo I é consagrado á theoria das funcções a que o auctor dá o nome de *olotropas* (funcções *holomorphas*), funcções cuja theoria é a continuação da theoria das funcções algebricas inteiras. Nota-se n'este capitulo uma demonstração engenhosa do theorema fundamental da theoria das equações inteiras.

No capitulo II occupa-se o auctor da theoria das funcções *meromorphas*, doutrina que é o seguimento natural da doutrina relativa ás fracções racionaes, que se estuda em Algebra.

No capitulo III são estudadas as funcções definidas por um radical simples. Este estudo é feito sem a intervenção de considerações trigonometricas, que o auctor considera como estranhas á Analyse pura.

O capitulo IV é consagrado ao estudo das funcções implicitas definidas por uma equação unica. N'elle estende o auctor ás raizes das equações olotropas a theoria celebre de Puiseux relativa ás funcções algebricas.

No capitulo V são considerados o logarithmo e a exponencial. O logarithmo é definido pela equação differencial $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$ e pela condição de ser $u=0$ quando $x=1$. A exponencial é definida como funcção inversa do logarithmo.

O estudo das funcções circulares é o objecto dos capitulos VI e VII. Este estudo é feito sem a intervenção de considerações geometricas, recorrendo o auctor para as definir á inversão dos integraes em que a differencial é composta racionalmente da variavel de integração e da raiz quadrada d'um trinomio do segundo gráo.

A theoria das funcções ellipticas é estudada nos capitulos VIII a XII. O ponto de partida para introduzir estas funcções é a consideração da equação differencial primitivamente empregada pelos geometras para este fim. Para preparar o leitor para este modo de exposição, tinha já o sr. Méray, nos capitulos anteriores, empregado, como vimos, para iniciar o estudo das funcções logarithmicas e circulares, a consideração das equações differenciaes a que ellas satisfazem.

O capitulo XIII, ultimo do livro, é consagrado á theoria das funcções eulerianas.

No modo de tratar os assumptos que são considerados ha, n'este volume da obra, uma grande originalidade, como a havia tambem, já o dissemos, no volume anterior.

E. Pascal: Teoria delle funzioni ellittiche, Hoepli, Milano, 1896.

Este volume faz parte da importante collecção de manuaes publicado pela casa Hoepli de Milão, a que por varias vezes nos temos referido n'este jornal. Contém elle uma exposição muito bem feita da theoria das funcções ellipticas, onde se acha o que ha de mais essencial n'esta importante doutrina.

O ponto de partida do auctor é a theoria das funcções θ de Jacobi, ás quaes liga depois as funcções p e σ de Weierstrass e as funcções $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} n$, $\operatorname{dn} u$.

O livro está dividido em seis capitulos, onde são considerados os assumptos seguintes:

No capitulo I estuda o auctor as quatro funcções θ de Jacobi. Define-as por meio das series periodicas descobertas por este eminente geometra, procura as relações entre ellas, determina as equações differenciaes a que satisfazem, desenvolve-as em productos infinitos, etc.

No capitulo II estuda o sr. Pascal as funcções ellipticas $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ e as relações d'estas funcções com as funcçães θ.

O capitulo III é consagrado ao estudo das funcções σ de Weierstrass, que são definidas pelas suas relações com as funcções θ.

No capitulo IV occupa-se o auctor da funcção $p(u)$ de Weierstrass, que é definida pela equação que a liga á funcção $\sigma(u)$.

O capitulo V é destinado ao estudo dos integraes ellipticos de 1.ª, 2.ª e 3.ª especie e ás suas relações com as funcções ellipticas. N'este capitulo, e depois no capitulo VI, encontram-se resultados do mais alto interesse a respeito d'um integral introduzido na theoria das funcções ellipticas por Klein.

Terminaremos dizendo que, pela clareza com que está escripto, pelo bom methodo de exposição e pelo ponto de vista moderno em que o auctor se collocou, é este excellente livro muito proprio para se estudar a parte essencial da theoria das funcções ellipticas.

E. Rouché et Ch. de Comberouse: Leçons de Géométrie. Première partie. Paris, G. Villars, 1896.

—— *Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les leçons de Géométrie. Première partie. Paris, G. Villars, 1896.*

Os programmas para o *ensino secundario moderno*, em França, sendo differentes dos programmas para o *ensino secundario classico*, os srs. Rouché e Comberousse vêem de publicar os dous volumes a que acima nos referimos, para servir de texto aos alumnos que seguem o primeiro d'estes ensinos. A estes volumes, que são destinados aos alumnos de 4.ª classe, seguir-se-hão outros destinados aos alumnos de 3.ª, 2.ª e 1.ª classe.

O primeiro dos volumes annunciados está dividido em trinta lições onde são considerados os assumptos seguintes: I Introducção (primeiras noções). II Angulos. Angulos verticalmente oppostos. III Rectas perpendiculares. Igualdade dos angulos rectos. IV Triangulos. V Egualdade dos triangulos. VI Outras propriedades dos triangulos. VII Perpendiculares e obliquas. VIII Egualdade dos triangulos rectangulos. IX Logares geometricos. X e XI Parallelas. XII Angulos cujos lados são respectivamente parallelos ou perpendiculares. XIII Somma dos angulos d'um triangulo, d'um polygono convexo. XIV Pontos de intersecção notaveis no triangulo. XV Propriedades dos parallelogrammos. XVI Figuras symetricas relativamente a uma recta ou a um ponto. XVI Uso da régoa e do compasso. XVIII Circumferencia do circulo. Intersecção d'uma recta e d'uma circumferencia. XIX Propriedades dos arcos e das cordas. Diametros perpendiculares a uma corda. XX Tangente e normal á circumferencia. Parallelas no circulo. XXI Tres pontos não em linha recta determinam uma circumferencia. Posições relativas de duas circumferencias. XXII Recordações das noções de Arithmetica relativas á medida das grandezas. XXIII Medida dos angulos. XXIV Logar dos pontos d'onde se vê uma recta debaixo d'um angulo dado. Quadrilatero inscriptivel. XXV Uso da régoa e do compasso. Construcção dos angulos. Divisão da circumferencia. XXVI, XXVII e XXVIII Problemas elementares. XXIX Circulos circumscriptos e inscriptos. XXX Tangentes communs a duas circumferencias.

No fim de cada lição vem uma collecção de exercicios correspondentes, dispostos segundo a ordem da sua difficuldade. No segundo dos livros annunciados vêem as soluções d'estes exercicios, Para obrigar os alumnos a um trabalho proprio e ao mesmo tempo auxilial-o n'este trabalho, são apenas esboçadas as soluções dos exercicios simples e completamente indicadas as soluções dos exercicios mais difficeis.

A respeito das qualidades dos livros mencionados não é necessario dizer cousa alguma. Os livros de Geometria publicados anteriormente pelos srs. Rouché e Comberousse são, com effeito, muito conhecidos e apreciados pelos professores e os actuaes em nada são inferiores áquelles.

E. Carvallo : Methode pratique pour la résolution numérique des équations algébriques ou transcendentes, Paris, Nony, 1896.

O fim d'este trabalho importante é completar o methodo inventado por Graff em 1839 e continuado por Encke em 1841, para resolver as equações numericas. Graff limitou-se a determinar as raizes reaes e os módulos das raizes imaginarias, quando estas raizes não téem módulos eguaes. Encke completou este methodo determinando as raizes imaginarias, mas o meio que para isso empregou, theoricamente exacto, não tem nada de pratico. Na sua Memoria o sr. Carvallo, estudando profundamente o methodo de Graff, mostra como elle póde dar immediatamente e sem novos calculos tanto as raizes imaginarias, quer tenham quer não módulos iguaes, como as raizes reaes. Além d'isso estende este methodo ás equações transcendentes.

O auctor trata o assumpto com toda a clareza e rigor, de modo a concorrer para que este methodo notavel seja introduzido no ensino, e além d'isso insiste sobre as observações de caracter pratico proprias para simplificar a applicação do methodo. Para esclarecer as considerações que expõe e para mostrar quanto o methodo é pratico, são resolvidas no trabalho, a que nos estamos referindo, algumas equações.

E. Picard : Sur les groupes des transformations des équations différentielles linéaires (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1894).

O auctor estende n'este trabalho importante a theoria de Galois, relativa ás equações algebricas, ás equações differenciaes lineares.

E. Carvallo: Principe d'Huygens dans les corps isotropes (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1895).

Como as demonstrações conhecidas do principio de Huygens são baseadas em algumas hypotheses que o tornam inaplicavel a algumas theorias d'Optica, o auctor dá uma nova demonstração d'este principio, em que se não recorre a estas hypotheses.

L. F. Marrecas Ferreira: Estudo sobre o planimetro de Amsler (Revista de obras publicas, t. xxv).

N'este artigo, muito util e interessante, o auctor expõe de uma maneira clara, simples e completa a theoria do planimetro de Amsler, hoje muito empregado pelos engenheiros. Parte para isso do esboço d'essa theoria, apresentado por Resal no tomo III do seu importante *Traité de Mecanique genérale*, que examina com attenção e que corrige em alguns pontos.

C. A. Laisant: Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure (Bulletin de la Société mathématique de France, t. xxIII).

O auctor demonstra que, se uma curva plana C tiver uma asymptota e transformarmos a figura por inversão relativamente a um ponto O do plano, a curva transforma-se n'outra curva C_1, que passa pelo ponto O, e a transformada da asymptota é o circulo de curvatura da curva C_1 no ponto O. Esta proposição muito interessante estabelece uma ligação entre a theoria da curvatura e a theoria das asymptotas.

G. Lazzeri: Sulla teoria delle equivalenza geometrica (Periodico di Matematica, t. x).

O auctor expõe a theoria da equivalencia geometrica, para as tres classes de grandezas constituidas por polygonos planos, polygonos esphericos de uma mesma esphera e prismas, independentemente de qualquer postulado especial para esta theoria, da consideração de áreas negativas e de noções arithmeticas ou algebricas, evitando assim postulados ou considerações extranhas ao assumpto, empregadas pelos auctores que se têm occupado d'esta theoria.

M. d'Ocagne : Abaque en points isoplèthes de l'équation de Kepler (Bulletin de la Société mathématique de France, 1894).

O auctor applica á equação de Kepler

$$u - e \text{ sen } u = nt$$

as doutrinas expostas na obra importante intitulada *Nomographie*, da qual se deu noticia n'um dos volumes anteriores d'este jornal.

P. Mansion : Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann, Paris, G. Villars, 1895.

A memoria que é o objecto principal d'este opusculo foi apresentada pelo auctor no Congresso scientifico internacional dos catholicos. Está escripta com muita simplicidade e clareza, e é porisso muito propria para o primeiro estudo da Geometria de Riemann. Contém ainda o opusculo quatro notas muito interessantes, a primeira relativa á historia da Geometria não euclideana, que n'elle é resumidamente exposta, a segunda ás indagações de Schering sobre a Metageometria, a terceira relativa ao alcance philosophico da Metageometria, o quarto relativo aos primeiros principios d'esta sciencia.

J. L. V. Jensen: Sur une expression simple du reste dans la formule d'interpolation de Newton (Bulletin de l'Académie des Sciences de Danemark, 1894).

Seja $F(x)$ uma funcção da variavel real ou complexa x e $g(x)$ uma funcção inteira do gráo n, que se torne egual a $F(x)$ quando x toma os valores $x_1, x_2 ..., x_n$. A formula demonstrada pelo sr. Jensen é a seguinte:

$$F(x) = g(x) + \lambda \frac{(x-x_0)...(x-x_n)}{(n+1)!} F^{(n+1)} [\theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + ...$$

$$+ \theta_n x_n + \theta_{n+1} x],$$

onde λ representa uma quantidade cujo modulo é inferior á unidade e $\theta_0, \theta_1 ..., \theta_{n+1}$ são numeros positivos menores do que a unidade. O modo como a ella chega o illustre geometra dinamarquez é muito simples.

E. Carvallo: Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique (Bulletin de la Société mathématique de France, 1894).

A equação estudada pelo auctor é a seguinte:

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{d^2U}{dx^2} - U = F(x, t),$$

anteriormente estudada pelo sr. Poincaré no caso particular de ser nullo o segundo membro.

J. M. Colaw: Alexandre Macfarlane (The american mathematical Monthly, 1895).

Biographia d'este illustre physico e mathematico, de cujos trabalhos temos dado noticia em diversos numeros d'este jornal.

Stouff: Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces (Annales de l'École Normale superieure de Paris, 1896).

O objecto d'esta interessante memoria é a applicação da formula de Taylor á solução do problema de Plateau generalisado para uma equação ás derivadas parciaes qualquer de segunda ordem. As indagações n'ella contidas têm relação com os trabalhos de Schwartz relativos ás superficies minimas e com os trabalhos de Darboux relativos á theoria das caracteristicas das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem.

S. Pincherle: Sopra alcune equazioni simboliche (Memorie delle R. Accademia di Bologna, 1895).

O auctor chama operação funccional distribuitiva a operação que, sendo applicada a uma funcção analytica, dá outra funcção analytica e que é tal que sendo representada por A, gosa das propriedades

$$A(\varphi+\psi)=A(\varphi)+A(\psi),\quad A(a\varphi)=aA(\varphi),$$

a representando uma constante e φ e ψ duas funcções analyticas; chama derivada funccional de A a operação A' determinada pela equação

$$A'(\varphi) = A(t\varphi) - xA(\varphi),$$

t representando a variavel que figura em φ e ψ, e chama equação differencial symbolica toda a equação em que entram estas operações e suas derivadas. O objecto da presente memoria é dar as propriedades e as soluções d'algumas d'estas equações differenciaes symbolicas.

—— *Della validitá effetiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni (Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1896).*

E. Pascal: Sopra dne relazioni rimarcheveli fra i valori delle derivate delle funzioni θ ellittiche per argumento zero (Annali di Matematica, 1895).

A. Botelho: Estudo sobre os systemas de forças girantes, Lisboa, 1894.

O objecto d'este trabalho é o estudo da rotação das forças em volta dos seus pontos de applicação, ao qual o nosso eminente geometra, Daniel A. da Silva, consagrou uma bella e importante Memoria, cheia de originalidade, que foi publicada nas collecções da Academia Real das Sciencias de Lisboa. No presente trabalho o sr. Botelho expõe com clareza a parte principal d'esta theoria importante, fundando-se principalmente nos trabalhos d'aquelle geometra. O livro está dividido em cinco capitulos, sendo os dous primeiros consagrados ás configurações planas, os tres seguintes ás configurações no espaço, e sendo em cada um d'estes casos considerados os systemas em que ha resultante e os systemas em que a não ha.

F. Gerbaldi: Sulle serie di funzioni analitiche (Rivista di Matematica, 1896).

—— Un teorema sulle singularitá della jacobiana di quattro superficie algebriche (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1896).

Guldberg: Sur l'intégration des équations différentielles ordinaires (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1895).

—— Om differentialliguinger, derbesidder ferste fundamental-integraler, Christiania, 1895).

E. Carvallo: Absorption de la lumière par les cristaux (Annales de Ch. et de Physique, 1896).

Bettazi: Sulla catena di un ente in un gruppo (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896).

—— Gruppi finiti ed infiniti di enti (Item).

—— Teoria dei limite. Parte VII *del Formulario publicato dalla Rivista di Matematica.*

G. Veronese: Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali (Mathematische Annalen, 47 Bande).

A. Bassi: Sulle radice della derivata di una funzione olomorfa di genere qualunque (Rend. del R. Instituto lombardo, 1895).

A. Bassi: Sulle radici della derivata di una funzione olomorfa di genero zero ed uno (Item).

Burali-Forti: Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'une ensemble variable (Mathematische Annalen, 47 Bande).

F. Klein: Sulle spirito aritmetico nella Matematica (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1896).

G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlhere (Mathematische Annalen, 46 Bande).

G. T.

INDICE(*)

Pag.

(*) Os signaes que precedem cada artigo indicam a sua classificação segundo o methodo adoptado no Congresso internacional de bibliographia das Sciencias mathematicas que teve logar em Paris em 1889.

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.