11.º grau

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Vê-se bem, como, para qualquer outro numero *n primo*, se póde formar o respectivo quadrado magico. Se para o quarto grau em vez de $n=2$, como a formula dá, se quizesse fazer $n=4$, não se poderia obter um quadrado d'estes resultando:

1	2	3
2	*	2
3	2	1;

da mesma sorte, para o nono grau, em que deve ser igual a 3 o valor de n, adoptando o valor 9, resulta:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	1	3	5	7
3	6	*	3	6	*	3	6
4	8	3	7	2	6	1	5
5	1	6	2	7	3	8	4
6	3	*	6	3	*	6	3
7	5	3	1	8	6	4	2
8	7	6	5	4	3	2	1

As estrellas estão representando o valor de n, que não póde entrar nos quadrados magicos.

No nono grau a expressão da raiz, para as equações, cujas raizes são todas conjugadas, é $a+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}$ e não $a+\sqrt[9]{b}+\sqrt[9]{c}$, como era indispensavel que fosse para haver quadrado magico.

Não sendo as raizes de $x^6=1$ todas primitivas, excepto 1, tambem é impossivel o haver n'ellas a raiz $a+\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{c}$, e, para este caso, obtemos, em lugar de quadrado magico, o seguinte:

1	2	3	4	5
2	4	*	2	4
3	*	3	*	3
4	2	*	4	2
5	4	3	2	1

Reconhece-se aqui mais uma vez, que n deve ser primo.

Demonstração especial para o terceiro grau, de que as raizes *d'esta equação são sempre conjugadas e determinação directa dos seus valores.* — A equação de terceiro grau póde considerar-se sempre desdobrada em duas, ou o seu primeiro membro composto de dois factores: um de primeiro grau, outro de segundo $y^2 - 2ay + (a^2 - b^2) = 0$, com as duas raizes $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$; a e b quaesquer.

Uma equação de terceiro grau, sem segundo termo, resultará da multiplicação do factor do segundo por $y + 2a$:

$$y^3 - (3a^2 + b)\, y + (a^2 - b)\, 2a = 0$$

com as tres raizes: $-2a$; $a + \sqrt{b}$; $a - \sqrt{b}$, e identificando-a com uma equação dada, $y^3 + py + q = 0$, será:

$$p = -(3a^2 + b);\; q = (a^2 - b)\, 2a$$

ou

$$a^2 + \frac{b}{3} = -\frac{p}{3};\; a^3 - ab = \frac{q}{2};$$

$$a^6 + a^4 b + \frac{a^2 b^2}{3} + \frac{b^3}{27} = -\frac{p^3}{27};$$

$$a^6 - 2a^4 b + a^2 b^2 = \frac{q^2}{4}$$

$$-\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4} = 3a^4 b - \frac{2}{3} a^2 b^2 + \frac{b^3}{27} = 3\left[a^4(\sqrt{b})^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{9} a^2 (\sqrt{b})^4 + \frac{(\sqrt{b})^6}{81}\right] = 3\left[a^2\sqrt{b} - \frac{(\sqrt{b})^3}{9}\right]^2$$

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}} = \pm\left[\sqrt{3}\,.\,a^2\sqrt{b} - \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3\right] = \pm k$$

e, como $a^3 - ab = \frac{q}{2}$, vem

$$\frac{q}{2} + k = a^3 - ab + \sqrt{3} \,.\, a^2 \,.\, \sqrt{b} \,.\, \sqrt{-1} - \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 \sqrt{-1} =$$

$$= \left(a + \sqrt{\frac{b}{3}} \,.\, \sqrt{-1}\right)^3$$

$$\frac{q}{2} - k = a^3 - ab - \sqrt{3} \,.\, a^2 \,.\, \sqrt{b} \,.\, \sqrt{-1} + \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 \sqrt{-1} =$$

$$= \left(a - \sqrt{\frac{b}{3}} \,.\, \sqrt{-1}\right)^3.$$

Vem para uma raiz:

$$2a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + k} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - k} = \mathrm{H} + \mathrm{J}.$$

$$\pm \sqrt{b} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{-1}} (\mathrm{H} - \mathrm{J}) = -\frac{\sqrt{-3}}{2} \mathrm{H} - \mathrm{J}),$$

logo, as duas outras têem por expressões:

$$a + \sqrt{b} = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \mathrm{H} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \mathrm{J},$$

$$a - \sqrt{b} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \mathrm{H} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \mathrm{J}.$$

Não ha, pois, a indeterminação da formula de Cardan, apresentando-se conjugadas as raizes, que têem para expressões:

$$H+J; \quad rH+r^2J; \quad r^2H+rJ.$$

Póde da mesma sorte fazer-se a demonstração especial para o quarto grau com a unica difficuldade de serem laboriosos os calculos; mas nem n'este, nem no caso do terceiro grau, era precisa a confirmação do que se deduziu.

Transformadas. Resolução das equações cujas raizes são conjugadas.

2.º grau

Póde reduzir-se ao primeiro, privando-a do segundo termo, mas o que unicamente interessa n'este estudo é o consideral-a como transformada de uma equação de quarto grau, cujas raizes são:

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c} \qquad a+\sqrt{b}-\sqrt{c}$$

$$a-\sqrt{b}-\sqrt{c} \qquad a-\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

e

$$K_1^2=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$$

$$K_2^2=(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2.$$

A transformada, de raizes K_1^2 e K_2^2, é:

$$y^2-2(b+c)y+(b-c)^2=0;$$

identificando-a com a equação $y^2+py+q=0$ resulta:

$$b+c=-\frac{p}{2};\ b-c=\pm\sqrt{q};\ b=-\frac{p}{4}\pm\frac{\sqrt{q}}{2};$$

$$c=-\frac{p}{4}\mp\frac{\sqrt{q}}{2};$$

$$K_1^2=-\frac{p}{2}+2\sqrt{\frac{p^2}{16}-\frac{q}{4}}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$K_2^2=-\frac{p}{2}-2\sqrt{\frac{p^2}{16}-\frac{q}{4}}=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Obtêem-se assim as formulas classicas, reconhecendo-se *à posteriori*, que a equação de segundo grau se subordina nas suas raizes á formula geral das conjugadas. Este processo, que não é praticamente o mais simples, creio que apresenta algum interesse, não só por se apoiar na analogia d'esta equação com as dos graus seguintes, como tambem por se affastar consideravelmente dos processos seguidos: o usual e os indicados por Grunert, Sommer, Heilermann e Clebsch.

A resolução da equação póde ainda fazer-se, sem obter a transformada, introduzindo n'ella, em vez de y, o valor de K_1^2, ou ou de K_2^2, e virá no primeiro caso:

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^4+p(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2+q=0$$

que, fazendo nullo o coefficiente de $\sqrt{bc}$, se desdobra nas duas equações:

$$(b+c)^2+4bc+p(b+c)+q=0,$$

$$2(b+c)+p=0,$$

d'onde:

$$(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})^2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

resultando as duas raizes e, se $y=(x-a)^k$;

$$a+r^i\sqrt[k]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

sendo r^i uma das raizes de $x^k=1$ para cada grupo de duas raizes de $\mathrm{F}(y)=0$.

3.º grau

É transformada da equação do nono grau, cujas raizes são:

$$a+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \quad a+\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c} \quad a+r\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

$$a+r\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c} \quad a+r\sqrt[3]{b}+r^2\sqrt[3]{c} \quad a+r^2\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c}$$

$$a+r^2\sqrt[3]{b}+r^2\sqrt[3]{c} \quad a+r^2\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \quad a+\sqrt[3]{b}+r^2\sqrt[3]{c}$$

em que r e r^2 representam as duas raizes, differentes da unidade, de $x^3=1$. As raizes da transformada têem por expressões:

$$\mathrm{K}_1^3=(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3;\ \mathrm{K}_2^3=(\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c})^3;$$

$$\mathrm{K}_3^3=(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3,$$

ou os cubos das raizes da segunda, ou da terceira linha, na relação das do nono grau; o que é indispensavel vem a ser que as tres expressões: K_1^3, K_2^3, K_3^3, diversifiquem.

A transformada, com segundo termo, é:

$$y^3-3(b+c)y^2+3[(b+c)^2-9bc]y-(b+c)^3=0$$

e, privada d'elle:

$$y^3-27bc.y-27bc(b+c)=0.$$

As raizes da ultima equação vêem a ser:

$$(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3-(b+c);\ (\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c})^3-(b+c);$$

$$(r\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3-(b+c)$$

ou

$$\mathrm{S}_1=3\sqrt[3]{bc}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c});\ \mathrm{S}_2=3\sqrt[3]{bc}(r\sqrt[3]{b}+r^2\sqrt[3]{c});$$

$$\mathrm{S}_3=3\sqrt[3]{bc}(r^2\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c}).$$

Nestas expressões ha de notavel o resaltar d'ellas a significação analytica das quantidades ξ e η, a que recorreu Cayley (*), para fazer cessar a indeterminação da formula de Cardan, a fim de obter os tres valores necessarios entre os nove, que a formula dá.

Raizes obtidas

$$3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}=3\sqrt[3]{bc}\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right),$$

$$r.3\sqrt[3]{b^2c}+r^2.3\sqrt[3]{bc^2}=3\sqrt[3]{bc}\left(r\sqrt[3]{b}+r^2\sqrt[3]{c}\right),$$

$$r^2.3\sqrt[3]{b^2c}+r.3.\sqrt[3]{bc^2}=3\sqrt[3]{bc}\left(r^2\sqrt[3]{b}+r\sqrt[3]{c}\right).$$

Raizes de Cayley

$$\xi^2\eta+\xi\eta^2=\xi\eta(\xi+\eta),$$

$$r.\xi^2\eta+r^2\xi\eta^2=\xi\eta(\xi+\eta),$$

$$r^2\xi^2\eta+r\xi\eta^2=\xi\eta(\xi+\eta).$$

Podemos, por simplicidade, representar as tres raizes d'este modo:

$$\alpha+C;\quad r\alpha+r^2C;\quad r^2\alpha+rC$$

(*) Cayley, *Phil. Mag.*, vol. XXI, 1861; *Collected Mathematical Papers*, vol. V, n.º 310; Weber, *Traité de Algèbre superieure*, pagg. 141 e 142.

e virá a equação:

$$y^3-3\alpha C\,.\,y-(\alpha^3+C^3)=0,$$

e, identificando-a com:

$$y^3+py+q=0\,;\quad q=-(\alpha^3+C^3)$$

ou

$$q=-\left(\alpha^3-\frac{p^3}{27\alpha^3}\right);\quad \alpha^6+q\alpha=\frac{p^3}{27}$$

ou

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ C\end{matrix}\right\}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^3}{4}+\frac{p^4}{27}}},$$

que é a expressão classica, da qual se deduzem todas as raizes. Pode substituir-se $\overset{3}{K_1}$ $\overset{3}{K_2}$ ou $\overset{3}{K_3}$, por y na equação de 3.º grau, e, annullando os coefficientes dos incommensuraveis, chegaremos ao mesmo resultado.

Ora

$$\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)^3=b+c+3\left(\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt{bc^2}\right)=\overset{3}{K_1},$$

e na transformada, sem segundo termo, a expressão da incognita é

$$y=\overset{3}{K_1}-(b+c)=\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{w}:$$

substituindo este valor em

$$y^3+py+q=0$$

resulta

$$\omega+w+3\sqrt[3]{\omega w}\left(\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{w}\right)+p\left(\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{w}\right)+q=0,$$

d'onde

$$\omega + w + q = 0; \quad 3\sqrt[3]{\omega w} + p = 0,$$

e

$$\omega + w = -q; \quad \omega w = -\frac{p^3}{27},$$

chegando-se, assim, por um caminho bem curto á formula de Cardan.

Se

$$y = (x - a)^k$$

obter-se-hão as raizes com facilidade.

4.º grau

É transformada da equação do oitavo grau, cujas raizes são

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}; \quad a - \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d};$$

$$a + \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}; \quad a + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d};$$

$$a - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d}; \quad a + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d};$$

$$a - \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}; \quad a - \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d};$$

serão

$$K_1^2 = \left(\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^2; \quad K_2^2 = \left(-\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^2;$$

$$K_3^2 = \left(\sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^2; \quad K_4^2 = \left(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}\right)^2$$

as raizes da transformada, com segundo termo, a qual

$$y^4 - 4(b+c+d)y^3 + \{b(b^2+c^2+d^2) + 4(bc+bd+cd)\}y^2$$

$$-4\{b^3+c^3+d^3-(b^2c+b^2d+c^2b+c^2d+d^2b+d^2c)+$$

$$+10\,bcd\}\,y$$

$$+b^4+c^4+d^4-4(b^3c+b^3d+c^3b+c^3d+d^3b+d^3c)+$$

$$+6(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)+4bcd(b+c+d)=0.$$

A transformada, sem segundo termo

$$y^4-2(bc+bd+cd)y^2-8\,bcd\,.y+(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$$

$$-2bcd(b+c+d)\}=0,$$

cuja resolução está dependente da equação de terceiro grau

$$z^3-\frac{4r-p^2}{2q}\,.z^2-\frac{p}{2}\,.z+\frac{9}{8}=0,$$

se identificarmos a ultima transformada com

$$y^4+py^2+qy+r=\theta.$$

Podemos ainda, como anteriormente para o segundo e terceiro grau, deduzir os valores das raizes por substituição do **valor de y** na ultima equação.

Podemos ainda, como anteriormente para o segundo e terceiro grão, deduzir os valores das raizes por substituição na ultima equação do valor de y:

$$S_1 = K_1^2 - (b + c + d) = 2\left\{\sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}\right\}$$

$$= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\xi} = y,$$

o que dá

$$\begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma)^2 + 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + p(\alpha + \beta + \gamma) + r = 0, \\ 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2p = 0, \\ 8\sqrt{\alpha\beta\gamma} + q = 0; \end{cases}$$

donde

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{p}{2}\,;\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\,;\ \alpha\beta\gamma = -\frac{q}{8}$$

e

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)z + \frac{q}{8} = 0\,;$$

ou

$$z^3 - \frac{p^2}{2^4.3^2}z - \frac{p^3}{2^5.3^3} + \frac{pr}{2^3.3} + q = 0,$$

fazendo desapparecer o segundo termo da equação anterior.

Faça-se

$$A = -\frac{1}{2}\left(-\frac{p^3}{2^5.3^3} + \frac{pr}{2^3.3} + q\right).$$

$$B = \frac{1}{4}\left(-\frac{p^3}{2^5.3^3} + \frac{pr}{2^3.3} + 9\right)^2 + \frac{p^6}{2^{12}.3^6}.$$

Resultará

$$\alpha = z_1 = -\frac{p}{2.3} + \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = M,$$

$$\beta = z_2 = -\frac{p}{2.3} + r\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + r^2\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = N.$$

$$\gamma = z_3 = -\frac{p}{2.3} + r^2\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} + r\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = P,$$

e para a equação proposta obteremos sem indeterminação alguma as quatro raizes seguintes:

$$y' = \{\sqrt{M} + \sqrt{N} + \sqrt{P}\}^2 - (M + N + P),$$

$$y'' = \{-\sqrt{M} + \sqrt{N} + \sqrt{P}\}^2 - (M + N + P),$$

$$y''' = \{\sqrt{M} - \sqrt{N} + \sqrt{P}\}^2 - (M + N + P),$$

$$y^{\text{IV}} = \{\sqrt{M} + \sqrt{N} - \sqrt{P}\}^2 - (M + N + P).$$

TERCEIRO CONGRESSO SCIENTIFICO LATINO-AMERICANO

O terceiro Congresso scientifico latino-americano ha de reunir em 1905 no Rio de Janeiro em dias que ainda não estão fixados. A Commissão organisadora apresentou já os seus trabalhos a respeito das questões que n'elle serão tratadas, entre as quaes figuram as seguintes:

1.º As diversas escolas mecanicas, e particularmente a de Hertz;

2.º A theoria dos mecanismos segundo as ideias de Königs e Reuleaux;

3.º Os methodos graphicos nas mathematicas applicadas;

4.º As orbitas hecubianas;

5.º As perturbações cometarias;

6.º Os phenomenos thermo-capillares.

O Congresso anterior teve logar em Buenos-Aires, e a respeito do que se passou na secção de mathematica já os leitores d'este jornal têem conhecimento pela noticia que n'elle se deu do volume das actas correspondente.

BIBLIOGRAPHIA

G. Loria: Spezielle algebraiche und transscendente ebene kurven. Leipzig, Teubner, 1902.

Esta obra magistral é consagrada á historia e theoria das curvas, notaveis por qualquer conceito, que têem sido até agora consideradas pelos geometras. Para escrever um trabalho sobre tal assumpto poucas pessoas estavam tão bem preparadas como o illustre professor da Universidade de Genova, ao mesmo tempo geometra e analysta distincto, e cujo nome figura entre os dos primeiros historiadores da mathematica do nosso tempo.

É tão grande o numero de curvas consideradas pelo sr. Loria n'esta obra e são tantos os detalhes scientificos, historicos e bibliographicos que são apresentados a respeito de cada uma d'ellas, que, ao percorrel-a, admira-se a cada passo a vastissima erudição do sabio mathematico que a escreveu. Mas, por estes mesmos motivos, não nos é possivel dar aqui, em jornal de tão pequenas dimensões, noticia assaz detalhada da obra, e vamos limitar-nos a indicar quaes as principaes curvas que n'ella são consideradas.

A *primeira parte* da obra, composta de 3 capitulos, é consagrada á recta, ao circulo e ás conicas. A respeito d'estas linhas são dadas apenas algumas indicações historicas, visto que a sua theoria faz parte de obras especiaes bem conhecidas.

A *parte segunda*, composta de 14 capitulos, é consagrada ás cubicas. Os tres primeiros capitulos são consagrados á classificação dada por Newton d'estas curvas, á theoria das cubicas unicursaes e á theoria das cubicas circulares. Nos restantes capitulos são estudadas a *cissoide* de Diocles e suas generalisações, o *folium* de Descartes, a *strophoide* e suas generalisações, a concoide de Sluse, a cubica de Agnesi, as trisectrizes de Maclaurin, Catalan e Longchamps, etc.

A *parte terceira*, composta de 16 capitulos, é destinada ás quarticas, sendo o primeiro consagrado á classificação d'estas curvas, o segundo ás quarticas unicursaes, o terceiro ás bicirculares e os restantes ás spiricas de Perseo, á concoide de Nicomedes, ao caracol de Pascal, á hypocicloide de tres reversões, á *parabola virtualis*, ás ovaes de Descartes, etc.

Na *parte quarta* são estudadas as curvas de grau determinado, superior ao quarto. Ahi são consideradas a astroide, a curva de Watt, a atriphtaloide, etc.

A *parte quinta* é consagrada ás curvas algebricas de ordem qualquer. São n'ella estudadas as parabolas e hyperboles de qualquer ordem, as curvas de Lamé, as rosaceas de Grandi, as spiraes sinusoides, as curvas de Lissajous, e muitas outras ligadas a diversas theorias geometricas, que não podemos aqui indicar.

A *parte sexta* é destinada *ás curvas transcendentes*. São n'ella estudadas a quadratriz de Dinostrato, a de Tschirnhausen, as espiraes de Archimedes e de Cotes, a espiral logarithmica, a espiral parabolica, a espiral hyperbolica, a clothoide, as linhas cycloidaes, as curvas de Debeaune, de Klein e Lie, de Mercator, etc.

A *parte setima* é destinada ao estudo de algumas curvas derivadas de outras por diversos meios. N'ella são considerados os principaes meios de derivação, e as curvas notaveis a que cada um d'estes meios de derivação dá origem.

Termina o livro por algumas notas e por um epilogo, muito interessante, sobre o desenvolvimento historico da theoria das curvas planas.

R. Marcolongo: Teoria matematica delle equilibrio dei corpi elastici. Milano, U. Hoepli, 1904.

A bella collecção de *Manuali Hoepli*, apesar de ser já vastissima, é todos os annos enriquecida com novos volumes. Para os redigir o seu editor recorre aos homens mais distinctos do seu paiz, onde tem encontrado um apoio digno de todo o elogio.

O presente volume, composto de 366 paginas, é consagrado á theoria mathematica do equilibrio dos corpos elasticos e, para o escrever, encontrou Hoepli um homem de grande competencia no sr. R. Marcolongo, o sabio professor da Universidade de Messina, que os leitores d'este jornal conhecem bem pelos artigos interessantes com que têem honrado as suas paginas.

Na sua redacção procurou o sr. Marcolongo ser o mais claro possivel, para que o livro podesse ser util ao maior numero possivel de leitores, e, em especial, aos engenheiros, que tanto necessitam de conhecer a doutrina que n'elle é estudada. Mas, apezar d'isso, penetrou com certa profundeza na theoria a que o livro é consagrado, para que os leitores fiquem conhecendo o que n'ella existe de mais essencial, incluindo os resultados mais recentemente obtidos.

Para o mesmo fim, já indicado, de ser util ao maior numero possivel de leitores, abriu o auctor a sua obra por um capitulo sobre a theoria das funcções harmonicas, ao qual segue outro sobre a theoria das funcções potenciaes newtonianas e outro ainda sobre os principios de Mechanica dos corpos continuos.

Entrando depois propriamente na doutrina a que o livro é consagrado, occupou-se dos assumptos seguintes:

Cap. IV. Equações do equilibrio e do movimento dos corpos elasticos isotropos. Cap. V. As equações da elasticidade para os corpos anisotropos. Cap. VI. Theoremas geraes sobre as equações do equilibrio dos corpos elasticos. Methodo de integração de Betti. Cap. VII. Problema de Boussinesq e Cerruti. Cap. VIII. A deformação de uma esphera isotropa. Cap. IX. O problema de Saint-Venant sobre as deformações das varas cylindricas. Cap. X. Deformações das pilastras cylindricas, ou problema complementar de Saint-Venant. Cap. XI. O problema de Voigt e a deformação das constantes elasticas dos cristaes.

Terminaremos recommendando este excellente manual aos professores e alumnos das nossas escolas de engenharia, e tambem aos alumnos da cadeira de Physica mathematica da nossa Universidade, que encontrarão n'elle, exposto com a maxima clareza e com uma feição muito moderna, o que de mais importante se tem encontrado sobre a doutrina a que é consagrado desde Navier, Cauchy, Lamé e Saint-Venant até Boussinesq, Voigt, Cerruti, Fredholm, Gebbia.

H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, G. Villars, 1904.

Este bello trabalho faz parte de uma collecção de monographias sobre a theoria das funcções, que, debaixo da direcção de M. Borel, anda publicando M. Gauthier-Villars, e é consagrado ao estudo do desenvolvimento da noção de integral no caso das funcções de variaveis reaes. O auctor introduz uma noção de integral mais geral do que a de Riemann, necessaria para resolver alguns problemas que offerecem interesse.

Eis aqui o objecto dos sete capitulos em que a obra está dividida:

I. O integral antes de Riemann. II. A definição de integral dada por Riemann. III. Definição geometrica de integral. IV. A funcção de variação limitada. V. A integração das funcções primitivas. VI. Auxilio prestado pelo integral definido ás funcções primitivas. VII. As funcções sommaveis.

Ao que precede accrescentaremos que, para lêr esta obra, é apenas necessario conhecer as propriedades elementares das funcções continuas.

E. Borel: Leçons sur les séries à termes positifs. Paris, G. Villars, 1902.

Este opusculo pertence á mesma collecção de monographias que o anterior, e contém as lições sobre a theoria das séries de termos positivos, professadas pelo sr. Borel no Collegio de França em 1900-1901, as quaes foram recolhidas e redigidas pelo sr. R. Adhémar. São nellas estudadas de uma maneira magistral a theoria da convergencia das séries e a correspondente da convergencia dos integraes, tanto no caso das séries e integraes simples, como das séries e integraes multiplos, e uma theoria, constituida pelo eminente auctor do volume, do crescimento das funcções, importante, como elle faz notar, em muitas questões de analyse, e em particular n'aquella a que o livro é consagrado.

J. Tannery et J. Molk: Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, t. IV. Paris, G. Villars, 1902.

Temos-nos occupado por varias vezes, n'este jornal, d'esta obra importante, dando noticia dos tres primeiros volumes á medida que elles foram apparecendo, e temos feito n'essas occasiões referencia ás suas excellentes qualidades. Hoje temos a acrescentar que no volume presente revelam-se as mesmas qualidades que tornam esta obra tão propria para estudar desenvolvidamente a theoria a que é consagrado.

No volume terceiro tinham os auctores principiado, como já se disse, a exposição da theoria da inversão. A primeira parte do presente volume é ainda destinado a esta doutrina, á qual são n'elle consagrados quatro capitulos.

Outra parte d'este volume é destinado ás applicações das funcções ellipticas, sendo um capitulo consagrado a diversas applicações geometricas e outro a diversas applicações á Algebra e á Arithmetica.

Terminam o volume diversas notas, cheias de interesse, uma das quaes é devida a Hermite, onde o grande geometra demonstra algumas formulas que anteriormente tinha dado, sem demonstração, no seu trabalho sobre a equação do 5.° grau.

H. G. Zeuthen: Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Paris, G. Villars, 1902.

Não é necessario fazer o elogio de uma obra composta por um homem tão altamente collocado na sciencia e que tem estudado tão profundamente os methodos empregados pelos antigos geometras, como o sabio professor de Copenhague. Vamos porém indicar rapidamente o ponto de vista em que se collocou para escrever esta obra. Este ponto de vista é por elle mesmo indicado no prefacio, onde diz que se esforçou para pôr principalmente em relevo o que aos estudantes e professores importa saber, que é, não um grande numero de detalhes historicos, nem quem primeiro descobriu esta ou aquella verdade, este ou aquelle methodo, mas as fórmas debaixo das quaes estas verdades e methodos se manifestaram.

Abre a obra por algumas paginas consagradas ao periodo prehistorico das mathematicas e á historia d'estas sciencias no velho Egypto e na Babylonia.

Vem depois a historia das Mathematicas na antiga Grecia, e ahi o auctor, seguindo os *Elementos* de Euclides passo a passo, e, em connexão com elles, as obras de Archimedes, Appolonio, etc., estuda as fórmas que os antigos geometras davam aos methodos de indagação que empregavam, germen dos methodos modernos. Assim considera as hypotheses geometricas dos *Elementos*, que faz seguir de um commentario cheio de interesse, a sua theoria da proporcionalidade, a demonstração por exaustão, as determinações infinitesimaes feitas por Archimedes, etc. Considera tambem os problemas celebres a que os antigos applicaram os seus methodos, dando a historia dos problemas da trisecção do angulo, da quadratura do circulo e da duplicação do cubo.

Depois da historia das mathematicas helenicas, a que é consagrada, como é natural, a maior parte da obra, vêem alguns capitulos, cheios de interesse, consagrados á historia das mesmas sciencias na India e, na edade media, entre os arabes, e ao seu reapparecimento na Europa.

Accrescentaremos ao que precede que esta obra foi primitivamente publicada em dinamarquez, que foi em seguida traduzida em allemão e que é ao sr. Mascart que é devido o importante serviço de traducção franceza, a que nos estamos referindo.

G. Vivanti: Complementi di Matematica ad uso dei chimici e dei naturalisti. Milano, U. Hoepli, 1903.

Eis um outro trabalho excellente com que vem de ser enriquecida a collecção do *Manuali Hoepli*. Contém a parte das sciencias mathematicas que têem necessidade de estudar aquelles que cursam estas sciencias como preparatorias para o estudo das sciencias chimicas ou naturaes.

A primeira parte é consagrada á Algebra e contém os assumptos mais applicados na Geometria analytica e a theoria das séries.

A parte segunda é consagrada á Geometria analytica, e contém a theoria da recta e do plano, das curvas e das superficies de segunda ordem, o estudo de algumas curvas notaveis, etc.

A parte terceira é consagrada ao Calculo infinitesimal. São estudadas nella com cuidado as noções de funcção, de derivada e de integral, as regras mais simples de derivação e integração, algumas applicações geometricas, a theoria dos maximos e minimos, a theoria da série de Taylor, a integração de algumas equações differenciaes simples, etc.

A parte quarta é consagrada ao Calculo das probabilidades, e a este respeito são dados os principios geraes e a theoria dos erros.

As definições e os principios fundamentaes da Mechanica são o objecto da parte quinta e os principios da Thermodynamica e da Mechanica chimica são o objecto da parte sexta da obra.

A exposição dos assumptos é feita com muita simplicidade e clareza, como é indispensavel em um livro com o destino que este tem, sem todavia faltar o rigor. Os exemplos que esclarecem os assumptos são quasi sempre relativos ás sciencias para o estudo das quaes o auctor tem em vista preparar e são quasi todos interessantes.

G. Papelier: Précis d'Algèbre et de Trigonométrie: Paris, Nony et C.ie, 1903.

Contém este volume a parte da Algebra e da theoria das funcções angulares que em Portugal se estuda no primeiro anno dos nossos cursos superiores de Mathematica. Escripto com muita clareza e completo rigor, póde elle ser vivamente recommendado aos alumnos que seguem os cursos a que venho de me referir.

Eis o objecto de cada um dos capitulos em que está dividido:

Livro primeiro. I. Identidade dos polynomios. II. Formula do binomio. III. Divisão dos polynomios. IV. Maior divisor commum de dois polynomios. V. Theoria dos determinantes.

Livro segundo. I. Funcções e limites. II. Funcção exponencial e logarithmica. III. Funcções trigonometricas. IV. Theoria das séries. V. Desenvolvimento de *e*. VI. Derivadas e differenciaes. VII. Funcções primitivas e integraes. VIII. Desenvolvimento das funcções em série. IX. Fórmas indeterminadas. X Variação das funcções. XI. Funcções de muitas variaveis.

Livro terceiro. I. Numeros imaginarios. II. Propriedades geraes dos polynomios. III. Continuidade das raizes. IV. Funcções symetricas. V. Eliminação. VI. Theoria das raizes eguaes. VII. Theorema de Descartes. VIII. Theorema de Rolle. IX. Methodos de approximação. X. Decomposição das fracções racionaes.

Trigonometria. I. Divisão dos angulos. II. Equação binomia. III. Equação do terceiro grau.

Stoffaes: Cours de Mathématiques supérieures. Paris. G. Villars, 1904.

Os que estudam as sciencias mathematicas como preparatorias para as sciencias physicas não têem necessidade de conhecer alguns assumptos que os que pretendem seguir um curso regular das primeiras sciencias têem de aprender, nem de penetrar tão profundamente, como estes, nos assumptos de quo uns e outros têem de occupar-se.

Por isso, é bem util a publicação de livros especiaes, onde estes encontrem só as doutrinas de que carecem, e expostas do modo mais proprio para os fins que têem em vista. Ora a obra cujo titulo vem de ser enunciado é destinada principalmente aos que se querem preparar para o estudo da physica e é um bom auxiliar para este fim.

Os assumptos n'ella considerados estão dispostos em seis livros.

O primeiro é consagrado a uns complementos de Algebra, e n'elle são estudadas a theoria dos determinantes, o calculo combinatorio, o calculo dos imaginarios, as séries, os logarithmos, etc.

O livro segundo é destinado ao calculo das derivadas.

O livro terceiro e quarto contêem os primeiros principios de Geometria analytica, sendo um destinado á Geometria plana e o outro á Geometria a tres dimensões.

No livro quinto apresenta o auctor uns elementos de Calculo differencial e integral e as suas applicações analyticas mais importantes.

No livro sexto é completada a Geometria analytica e são dadas as applicações mais usuaes do Calculo differencial e integral a esta sciencia.

Finalmente o livro setimo é consagrado á theoria das equações differenciaes.

Todos os assumptos são expostos de um modo muito claro e simples, em conformidade com o destino que o livro tem.

P. Constan: Cours élémentaire d'Astronomie et de Navigation, Deuxième Partie. Paris, G. Villars, 1904.

O primeiro volume d'esta obra utilissima é consagrado á Astronomia. O presente volume é consagrado á arte de navegar.

Abre por um capitulo onde são minuciosamente descriptos os instrumentos e os methodos que se empregam para medir as alturas dos astros e o tempo no mar. Depois são estudados com todo o desenvolvimento necessario os tres problemas que um capitão de navio deve saber resolver:

1.° Orientar-se e dirigir-se no mar. A este problema é consagrado o capitulo segundo.

2.° Determinar o caminho a seguir e a distancia a percorrer para ir de um logar dado a outro. A este problema é consagrado o capitulo terceiro.

3.° Determinar em um instante qualquer as coordenadas geographicas do logar onde está. A este problema é consagrado o quarto capitulo.

Alguns problemas, algumas questões theoricas complementares, etc., são o objecto de um outro capitulo com que termina a obra.

H. Dulac: Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Este trabalho importante, apresentado como these á Faculdade das Sciencias de Paris, é consagrado ao estudo dos integraes da equação differencial

$$X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0,$$

na vizinhança do ponto (x_0, y_0), quando as funcções x e y são holomorphas na vizinhança d'este ponto e se annullam n'elle. Esta questão tem sido objecto de estudo de alguns dos geometras mais eminentes do nosso tempo, e aos resultados por elle obtidos juncta outros, novos e importantes, o sr. Dulac na sua notavel these.

G. Comberiac: Calcul des triquaternions. Paris, Gautier-Villars, 1902.

Os quaterniões constituem, como é sabido, uma analyse geometrica independente dos eixos das coordenadas, mas dependente de uma origem, o que deixa subsistir nas fórmulas elementos estranhos ás questões geometricas consideradas. Por isso, para obter uma analyse geometrica independente de todo o systema de referencia, o sr. Comberiac recorre a um systema complexo de doze unidades, a que dá o nome de triquaterniões. É a este systema complexo que é consagrado o presente trabalho, apresentado como these á Faculdade das Sciencias de Paris.

Abre por uma introducção, consagrada á exposição de algumas noções conhecidas sobre unidades complexas e quaterniões. Segue-se um capitulo consagrado á theoria dos triquaterniões, e depois tres capitulos consagrados ás applicações d'esta doutrina á theoria dos deslocamentos sem deformação, á theoria dos complexos lineares e á theoria das superficies de segunda ordem.

L'abbé M. de Montcheuil: Sur une classe de surfaces. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

N'este bello trabalho, apresentado como these á Faculdade das Sciencias de Paris, o auctor reune em uma mesma classe varios grupos de superficie importantes, que têem sido separadamente estudados por diversos geometras; faz o estudo geral das suas propriedades, partindo de uma equação ás derivadas parciaes extremamente simples, que todas ellas verificam; e dá um methodo geral para as construir. Os resultados obtidos são depois applicados aos mais notaveis grupos de superficies que a classe geral considerada contém.

G. Papelier: Formulaire de Mathématiques spéciales. Paris, Vuibert et Nony, 1904.

Eis uma publicação que deve prestar grandes serviços aos estudantes. Contém as fórmulas que os alumnos de Mathematicas especiaes dos lyceus de França encontram nos seus estudos, dispostos ordenadamente, de modo a poderem ser encontrados immediatamente quando ha necessidade de as empregar. É desnecessario ajuntar que não é só aos estudantes que um tal trabalho é proveitoso; é-o a todos os que exercem profissões em que têem de resolver questões elementares do dominio da Algebra, da Trigonometria ou da Geometria analytica.

Revista dos Cursos da Escola Polytechnica de Rio de Janeiro, t. 1. Rio de Janeiro, 1904.

A Escola Polytechnica do Rio de Janeiro vem de iniciar a publicação de uma revista consagrada ás sciencias que são professadas n'este importante estabelecimento de instrucção. O primeiro volume, que vem de ser publicado, encerra, entre outros trabalhos, dois muito interessantes, relativos ás sciencias mathematicas. O primeiro, devido ao sr. Pereira Reis, é consagrado á questão do traçado das linhas geodesicas, problema que é estudado com a maxima clareza e simplicidade, quer debaixo do ponto de vista theorico, quer debaixo do ponto de vista pratico. O segundo, devido ao sr. Otto A. Silva, é consagrado ás applicações geometricas da equação de Riccati, que é n'este bello trabalho estudada de um modo elegante, claro, e, em alguns pontos, original.

E. Cesàro: Elementares Lehrbuch der algebraichen analysis und der infinitesimalrechnung. Leipzig, Teubner, 1904.

Deu-se n'este jornal noticia ha bastante tempo de dous livros excellentes, um, consagrado á Analyse algebrica e o outro ao Calculo infinitesimal, devidos ao sr. Cesàro, e fez-se n'essa occasião referencia ás qualidades d'estes livros, escriptos com a elegancia e originalidade que o eminente professor da Universidade de Napoles costuma empregar em todos os seus trabalhos. Estas qualidades levaram o sr. G. Kowalewski, professor na Universidade de Greifswald, a traduzil-os, reunindo-os em um mesmo volume, fazendo d'este modo aos alumnos das escolas allemãs o alto serviço de lhes tornar possivel a leitura d'estas obras tão bem feitas.

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars.

Este volume contém, como nos annos anteriores, uma grande quantidade de informações indispensaveis aos engenheiros e homens de sciencia. Entre as noticias scientificas que contém devemos assignalar uma de M. P. Hatt intitulada — *Explicação elementar das marés.*

A. Macfarlane: Bibliography of quaternions and allied systems of Mathematics. Dublin, 1904.

Formou-se ha annos uma Sociedade internacional que tem por objecto promover o estudo dos quaterniões e outros systemas de Mathematica ligados a elles. Esta Sociedade vem de publicar uma lista de todos os trabalhos até agora publicados a respeito dos assumptos que entram no seu programma, elaborado pelo illustre secretario da mesma, com o fim de auxiliar os que se quizerem occupar do estudo de algum dos capitulos das theorias que pretende vulgarisar.

R. Bettazzi: Arithmetica razionale. Torino, 1904.

Este pequeno livro, escripto para uso dos gymnasios italianos, está escripto com uma clareza tão grande e os assumptos n'elle tratados foram escolhidos com um criterio tão sensato, para poderem ser comprehendidos pelos alumnos a que são destinados e aos quaes hão de dirigir os primeiros passos na arte de bem raciocinar, que os recomendamos vivamente aos alumnos e professores dos nossos Lyceus que puderem ler a lingua em que está escripto, tão facil para os portuguezes.

G. T.

SUR LES PSEUDO-SPIRALES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

---

§ I

Nous appelons *pseudo-spirales* les lignes planes L qui, en coordonnées intrinsèques r, s (rayon de courbure, arc), sont représentées par l'équation :

$$(1) \qquad r = a^{1-k} \, . \, s^k,$$

a, k étant des constantes.

Entre ces lignes on trouve: *le cercle* $(k=0)$, *la spirale logarithmique* $(k=1,\ a^{1-k}=\cot i)$, *la developpante de cercle* $\left(k=\frac{1}{2}\right)$, *la clotoïde* $(k=-1)$, etc.

Si

$$\rho = \alpha^{1-k} . \sigma^k$$

est une autre pseudo-spirale, il suffit d'écrire cette équation sous la forme

$$\rho = \frac{\alpha}{a} a^{1-k} \left(\frac{a}{\alpha} \sigma \right)^k,$$

pour reconnaître que, si l'on pose

$$r = \varphi(s),$$

il est

$$\rho = \frac{\alpha}{a} \varphi\left(\frac{a}{\alpha} \sigma \right).$$

Il suit d'ici (*): *Les pseudo-spirales déduisibles d'une même équation* (1), *en changeant la constante a d'une façon arbitraire, sont semblables entre elles.*

Développées. — En désignant par L_i la développée d'ordre i de L, on a:

$$r_i = r_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{ds_{i-1}} \quad , \quad s_i = r_{i-1}.$$

Il suffit de faire ici successivement

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1), n$$

pour en déduire que: *La développée* L_n *d'ordre* n *de la pseudo-spirale* (1) *est représentée par l'équation intrinsèque :*

(2) $$r_n = A_n \, s_n^{\frac{k+(k-1)n}{1+(k-1)n}},$$

(*) Sulla similitudine delle curve — *Annali di Matematica pura e applicata,* Serie II, tomo XV, 1887.

A_n *étant définie par l'égalité :*

$$A_n = [1+(k-1)n]^{\frac{k+(k-1)n}{1+(k-1)n}} \cdot \left[\prod_{i=1}^{i=n} (1+(k-1)i)\right]^{\frac{1-k}{1+(k-1)n}} \cdot a^{\frac{1-k}{1+(k-1n)}}$$

Par exemple : *La développée d'ordre* n *de la clotoïde*

$$(3) \qquad r = a^2 s^{-1}$$

est la courbe :

$$(4) \quad r_n = (1-2n)^{\frac{2n+1}{2n-1}} \left[\prod_{i=1}^{i=n} (1-2i)\right]^{\frac{2}{1-2n}} \cdot a^{\frac{2}{1-2n}} \; s_n^{\frac{2n+1}{2n-1}}$$

Développantes principales.— Entre les développantes successives de L, celles dont l'origine est à l'origine de l'arc s, sont appelées *principales*.

La première développante principale Λ_1 de L est représentée par l'équation :

$$\rho_1 = (2-k)^{\frac{1}{2-k}} \; a^{\frac{1-k}{2-k}} \; \sigma_1^{\frac{1}{2-k}}.$$

Si l'on déduit de celle-ci l'équation de la développante principale Λ_2 et on suit un procédé analogue jusqu'à la développante Λ_n, on trouve que : *La développante principale* Λ_n *d'ordre* n *de la pseudo spirale* (1) *est représentée par l'équation intrinsèque :*

$$(5) \qquad \rho_n = B_n \, \sigma_n^{\frac{k-(k-1)n}{1-(k-1)n}},$$

B_n *étant définie par l'égalité :*

$$B_n = [1-(k-1)n]\left[\prod_{i=1}^{i=n}(1-(k-1)\,i)\right]^{\frac{k-1}{1-(k-1)n}} .\, a^{\frac{1-k}{1-(k-1)n}}.$$

En particulier : *Les développantes principales d'ordre* n *de la clotoïde* (3) *et du cercle de rayon* $\frac{1}{2}$ *a sont représentées respectivement par les équations :*

(6) $$\rho_n = (1+2n)\left[\prod_{i=1}^{i=n}(1+2i)\right]^{\frac{-2}{1+2n}} .\, a^{\frac{2}{1+2n}}\, \sigma_n^{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

$$\rho_n = \left[\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}\right]^{\frac{1}{n+1}} .\, a^{\frac{1}{n+1}}\, \sigma_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

L'application de l'équation (2) n'est pas possible quand $k = \frac{n-1}{n}$. Mais, dans ce cas, on ne peut pas raisonnablement avoir recours à l'équation (2), car la ligne donnée est la développante principale d'ordre $(n-1)$ d'un cercle, et conséquemment sa développée $n^{\text{ème}}$ se réduit à un point.

On conclut : *Les développées successives d'une pseudo-spirale sont d'autres pseudo-spirales. Ces développées constituent : une série finie, quand la pseudo-spirale primitive est la développante principale (d'ordre arbitraire) d'un cercle ; une série infinie, dans tout autre cas.*

Pour $k = \frac{n}{n-1}$ l'équation (1) se réduit à :

(7) $$r = a^{\frac{1}{1-n}}\, s^{\frac{n}{n-1}}.$$

L'équation (5) est applicable jusqu'à la développante principale d'ordre $(n-2)$; mais comme celle-ci a pour équation intrinsèque

$$\rho_{n-2} = B_{n-2}\,\sigma^2_{n-2},$$

la développante principale $(n-1)^{ème}$ de la ligne donnée est représentée par l'équation:

$$\rho_{n-1} = \alpha e^{B_{n-2}\sigma_{n-1}},$$

α étant une constante arbitraire.

Conséquemment: *Les développantes principales d'une pseudo-spirale, sont, en général, d'autres pseudo-spirales. Il n'y a d'exception que pour la pseudo-spirale* (7) (n *nombre entier positif*), *dont les développantes principales se rangent en deux familles: celles dont d'ordre n'est pas supérieur à* (n — 2) *sont des pseudo-spirales, celles dont l'ordre est supérieur à* (n — 2) *sont des lignes d'autre nature.*

§ II

Relation entre les rayons de courbure. — Quand le rayon de courbure r d'une ligne plane est proportionnel à une puissance du rayon de courbure r_1 de sa développée, on a:

$$r_1 = r\,\frac{dr}{ds} = hr^p,$$

h et p étant des constantes.

On déduit d'ici par intégration :

$$(8)\qquad r=[h(2-p)]^{\frac{1}{2-p}}\,s^{\frac{1}{2-p}},$$

quand $p \gtrless 2$,

$$(9)\qquad r=\alpha e^{hs},$$

quand $p=2$.

Et si l'on remarque que les développées successives des lignes (8), (9) sont aussi des pseudo-spirales, on déduit :

Quand le rayon de courbure d'une ligne plane est proportionnel à une puissance du rayon de courbure de la première développée, il est aussi proportionnel à une puissance des rayons de courbure de toutes les développées successives. Les lignes jouissant de cette propriété sont les pseudo-spirales et la ligne (9)

Allons trouver, dans les deux cas, la relation liant les rayons de courbure r, r_n.

S'il s'agit de la ligne (1), on a :

$$r_1=ka^{\frac{1-k}{k}}.r^{\frac{2k-1}{k}},$$

$$r_2=(2k-1)k^{\frac{1-k}{2k-1}}.a^{\frac{1-k}{2k-1}}s_2^{\frac{3k-2}{2k-1}}=k(2k-1)a^{\frac{2(1-k)}{k}}.r^{\frac{3k-2}{k}}$$

.... etc.

ce qui démontre :

Le rayon de courbure d'une pseudo-spirale est lié au rayon de courbure de la développée d'ordre n *par la relation :*

$$(10)\qquad r_n=\left[\prod_{i=1}^{i=n}(1+(k-1)i)\right]a^{\frac{n(1-k)}{k}}.r^{\frac{k+(k-1)n}{k}}$$

S'il s'agit au contraire de la ligne (9), comme on a :

$$r_1 = hs_1^2,$$

pour avoir la relation entre r_n et r_1 il suffit d'employer la relation (10), en y remplaçant a^{1-k}, k, n respectivement par h, 2, $n-1$.

Et comme $r_1 = hr^2$, on a :

Le rayon de courbure de la ligne (9) *est lié au rayon de courbure de la développée d'ordre* n *par la relation :*

$$r_n = \underline{|n}\, h^n\, r^{n+1}.$$

Relation entre les arcs. — Si l'arc s d'une ligne plane L est proportionnel à une puissance de l'arc s_1 de sa développée L_1, on a

$$s_1 = hs^p.$$

Et comme

$$s_1 = r \quad , \quad s = \rho_1,$$

[ρ_1 (σ_1) étant le rayon de courbure de la première développante Λ_1], il résulte :

$$r = h\rho_1{}^p,$$

d'où il suit que Λ_1 est la ligne définie par une des équations intrinsèques

$$\rho_1 = [h(2-p)]^{\frac{1}{2-p}} \cdot \sigma_1{}^{\frac{1}{2-p}},$$

quand $p \gtrless 2$,

$$\rho_1 = \alpha e^{h\sigma_1},$$

quand $p = 2$.

La ligne L est la développée de A_1 ; conséquemment L est une pseudo-spirale.

En remarquant que

$$r_n = s_{n+1} \quad , \quad r = a^{1-k}\, s^k,$$

l'équation (10) donne :

$$s_{n+1} = \left[\prod_{i=1}^{i=n} (1+(k-1)\,i)\right] a^{(1-n)(1-k)} \,.\, s^{k+(k-1)n}$$

d'où, en remplaçant n par $n-1$:

Si l'arc d'une ligne plane est proportionnel à une puissance de l'arc de la première développée, il est aussi proportionnel à une puissance des arcs de toutes les développées successives. Les lignes jouissant de cette propriété sont les pseudo-spirales, et la relation liant s *à* s_n *est :*

$$s_n = \frac{\prod_{i=1}^{i=n} (1+(k-1)\,i)}{1+(k-1)\,n} \,.\, a^{n(1-k)}\, s^{1+(k-1)n}.$$

Radiales des pseudo-spirales. — La courbe (1) peut être représentée par une relation :

$$r = \varphi(\theta)$$

entre le rayon de courbure r et l'angle θ formé par la normale avec une direction fixe. Or si l'on remarque que

$$r_1 = \varphi'(\theta),$$

en appliquant la relation (10) pour $n=1$, on trouve que la fonction φ vérifie l'équation différentielle :

$$\varphi^{\frac{1-2k}{k}} \cdot \varphi' = ka^{\frac{1-k}{k}}.$$

On trouve d'ici par intégration :

$$(11) \qquad r=(1-k)^{\frac{k}{1-k}} \cdot a\theta^{\frac{1}{1-k}}, \qquad \text{pour } k \gtrless 1$$

$$r = ce^{\cot i \cdot \theta}, \qquad \text{pour } k=1$$

c étant une constante et i l'inclinaison de la spirale logarithmique sur les rayons vecteurs issus du pôle.

Si vice versa on parte de la ligne plane :

$$(12) \qquad r = \beta\theta^m,$$

on a :

$$r_1 = \frac{dr}{d\theta} = \beta m \theta^{m-1},$$

d'où, en éliminant θ :

$$r_1 = m\beta^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{m-1}{m}}.$$

Il suffit alors d'avoir recours aux équations (8), (9) pour voir que l'équation (12) représente une ligne dont l'équation intrinsèque est :

$$r=\beta^{\frac{1}{m+1}}(m+1)^{\frac{m}{m+1}}.s^{\frac{m}{m+1}} \qquad (\text{pour } m \gtrless -1)$$

et

$$(13) \qquad r=\alpha e^{-\frac{s}{\beta}} \qquad (\text{pour } m=-1).$$

La courbe l qu'on déduit d'une ligne plane L en menant, par un point fixe, des segments égaux et parallèles aux rayons de courbure de L est (suivant *R. Tucker*) *la radiale* de cette ligne.

Cela étant, l'analyse précédente conduit aux résultats suivants :

1. *Toute pseudo-spirale a pour radiale une spirale d'ordre supérieur.*

La spirale logarithmique a pour radiale une spirale logarithmique égale à la primitive.

2. *Les lignes planes ayant pour radiales des spirales (non reductibles à une spirale hyperbolique) sont des pseudo-spirales.*

3. *La ligne plane dont la radiale est une spirale hyperbolique, est représentée par l'équation intrinsèque* (13). [*Parallèle idéale du point* — V. § IV].

Remarque. — Ce sont le propriétés contenues dans les derniers théorèmes qu'ont suggéré la dénomination de *pseudo-spirales*, donnée aux courbes (1).

§ III

Relation entre les surfaces. — Désignons par S la surface comprise entre un arc de la ligne (1) compté de l'origine, l'arc correspondant de sa développée et les rayons de courbure menés par les extrémités.

En posant en outre la condition qu'il soit $S=0$ pour $s=0$, on trouve :

$$(14) \qquad S=\frac{1}{2}\int r ds=\frac{1}{2}.\frac{a^{1-k}}{k+1}.s^{k+1}.$$

Si l'on désigne par S_i la quantité analogue à S relative à la développée d'ordre i, on a :

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{3k-1} \cdot a^{\frac{1-k}{k}} s_1^{\frac{3k-1}{k}} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{3k-1} \cdot a^{3(1-k)} s^{3k-1}$$

$$= 2^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \frac{k^2 (k+1)^{\frac{3k-1}{k+1}}}{3k+1} \cdot a^{\frac{4(1-k)}{1+k}} \cdot S^{\frac{3k-1}{k+1}}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k-1)^2 k^{\frac{1-k}{2k-1}}}{5k-3} \cdot a^{\frac{1-k}{2k-1}} s_2^{\frac{5k-3}{2k-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k-1)^2 k^2}{5k-3} a^{5(1-k)} s^{5k-3}$$

$$= 2^{\frac{4(k-1)}{k+1}} \frac{k^2 (2k-1)^2 (k+1)^{\frac{5k-3}{k+1}}}{5k-3} \cdot a^{\frac{8(1-k)}{k+1}} \cdot S^{\frac{5k-3}{k+1}}$$

.... etc.

Un procédé analogue, appliqué jusqu'à la développée d'ordre n, démontre que :

La surface S *relative à une pseudo-spirale* (1) [*qui n'est pas une clotoïde* $(k = -1)$, *ni la développante principale d'ordre* n *d'une clotoïde* $\left(k = \frac{2n-1}{2n+1}\right)$] *est liée à la surface analogue* S_n, *relative à la développée d'ordre* n, *par la relation :*

$$(15) \qquad S_n = C_n \, S^{\frac{(2n+1)k-(2n-1)}{k+1}},$$

C_n *étant définie par l'équation :*

$$(16)\quad C_n = 2^{\frac{2n(k-1)}{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^{\frac{(2n+1)k-(2n-1)}{k+1}}}{(2n+1)k-(2n-1)} \cdot \left[\prod_{i=1}^{i=n}(1+(k-1)i)\right]^2 \cdot a^{\frac{4n(1-k)}{k+1}}.$$

Cas exceptionnel. — Les formules (15), (16) ne sont pas applicables, quand entre la suite de lignes L, L_1, L_2, ..., L_{n-1}, L_n il y a la clotoïde.

Si la ligne donnée L est la développante principale d'une clotoïde, on a :

$$r = a^{\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad r_1 = \frac{1}{3} a^2 s_1^{-1}.$$

$$S = \frac{3}{8} a^{\frac{2}{3}} \left(s^{\frac{4}{3}} - h^{\frac{4}{3}} \right) \quad ; \quad S_1 = \frac{a^2}{6} \log \left(\frac{s^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} \right),$$

(h étant une constante), d'où il suit :

$$(17)\quad S_1 = \frac{a^2}{6} \log \left[h^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{8}{3} a^{-\frac{2}{3}} S + h^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} \right].$$

Si la ligne donnée L est une clotoïde, on a :

$$r = a^2 s^{-1} \quad ; \quad r_1 = \frac{s_1{}^3}{a^2}$$

$$S = \frac{a^2}{2} \log \left(\frac{s}{h} \right) \quad ; \quad S_1 = \frac{a^6}{8} (s^{-4} - h^{-4}),$$

d'où il suit

$$(18) \qquad S_1 = \frac{a^6}{8h^4}\left(e^{-\frac{8S}{a^2}} - 1\right).$$

On voit d'ici que, dans le cas exceptionnel qu'on vient de remarquer, la détermination de la relation entre S èt S_n se fait en combinant convenablement les équations (15), (17), (18) entre elles.

Remarque. — Si l'on fait exception pour la relation :

$$S_1 = \alpha S,$$

qui est bien caractéristique pour la spirale logarithmique, les autres relations entre les surfaces S, que nous venons de déterminer, ne sont pas caractéristiques pour les pseudo-spirales.

Si, par exemple, on demande la famille générale de lignes planes pour lesquelles on a :

$$(19) \qquad S_1 = \frac{S^2}{h^2}$$

ou bien :

$$(20) \qquad S_1^2 = h^2 S,$$

on est ramené respectivement aux équatins différentielles :

$$2h^2 r' r'' = r \quad ; \quad rr'^3 = -2h^2 r'',$$

d'où l'on déduit par intégration :

$$\int \frac{dr}{\sqrt[3]{3r^2+c}} = \frac{s}{\sqrt[3]{4h^2}} \quad ; \quad \int \sqrt[3]{3r^2+c}\, dr = \sqrt[3]{4h^2}.s$$

(c étant une constante).

Pour $c=0$ on a respectivement :

$$r = \frac{s^3}{(6h)^2} \quad ; \quad r = \sqrt[5]{\frac{500}{81}}.h^{\frac{2}{5}} s^{\frac{3}{5}}.$$

En comparant ces équations aux égalités (4), (6) du § I, on déduit :

Il y a deux familles de lignes planes jouissant de la propriété (19), ou de l'autre (20). Entre ces lignes, les seules qui appartiennent à la famille des pseudo-spirales sont respectivement la développée première de la clotoïde, et la développante principale deuxième de la clotoïde.

§ IV

Généralisations.— Dans les équations (2), (5) n est nécessairement un nombre entier, positif, car il désigne l'ordre de la développée ou de la développante.

Néanmoins ces équations, par une valeur quelconque de n (entière, fractionnaire, irrationnelle, positive ou négative) donnent d'autres lignes, qui peuvent être appelées encore les *développées* ou les *développantes principales* d'ordre n de la pseudo-spirale (1), pourvu qu'on ne donne à cette dénomination aucune signification géométrique explicite.

Il suit alors :

1. Les développées et les développantes d'un ordre arbitraire n *d'une pseudo-spirale, sont d'autres lignes de la même famille.*

2. *Une pseudo-spirale quelconque peut être considérée comme une dévéloppée ou une développante principale d'un certain ordre d'une autre pseudo-spirale donnée d'avance.*

Ainsi par exemple:

«*La développante ordinaire d'un cercle est la développée d'ordre* $-\frac{3}{2}$, *ou la développante principale d'ordre* $\frac{3}{2}$ *d'une clotoïde; la clotoïde est la développante principale d'ordre* $-\frac{1}{2}$ *d'un cercle,* etc.

Allons appliquer ces considérations à la développante principale ordinaire d'ordre $(n-1)$ du cercle, représentée par l'équation:

$$r = a^{\frac{1}{n}} s^{\frac{n-1}{n}},$$

n étant un nombre entier, positif (§ I).

Bien que dans l'application de l'équation (2) on doit s'arrêter aussitôt qu'on arrive à la développée $n^{ème}$ (car celle-ci est un point, les lignes:

$$r_{n+1} = A_{n+1}\, s^2_{n+1} \quad , \quad r_{n+2} = A_{n+2}\, s_{n+2}^{\frac{3}{2}}, \ldots\ldots\ldots$$

que l'on trouve pour les successives valeurs de n, peuvent être considérées comme des développées (idéales) d'ordre $n+1$, $n+2, \ldots.$ de la ligne donnée.

Il suit que: *La pseudo-spirale représentée par l'équation intrinsèque*

$$r = a^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{n+1}{n}} \tag{21}$$

est la développée idéale d'ordre n *du point.*

On arrive à la même conclusion, en considérant la ligne (7), dont les développantes principales, à partir de celle d'ordre $n-1$, ne sont pas des pseudo-spirales (§ 1).

En effet l'équation (5), appliquée successivement quand $k=\frac{n}{n-1}$, donne la série indéfinie de lignes :

$$\rho_n = B_n \quad , \quad \rho_{n+1} = B_{n+1}\, \sigma_{n+1}^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \rho_{n+2} = B_{n+2}\, \sigma_{n+2}^{\frac{2}{3}} \ldots\ldots$$

formée par le cercle et par ses développantes principales successives.

La courbe (7) est donc à considérer comme la développée $n^{ème}$ (idéale) du cercle, et conséquemment comme la développée $(n-1)^{ème}$ (idéale) du point. Cela est conforme au résultat précédent.

L'équation (21), pour $n=1$, démontre que : *La courbe*

$$r = a^{-1} s^2$$

est la première développée idéale du point.

Or, au § I, nous nous somme occupé de cette ligne, en démontrant que sa développante principale est la courbe :

$$r = \alpha e^{\frac{s}{a}}.$$

Il suit que : *La ligne plane.*

$$r = a^{-1} s^2$$

CONDIÇÕES DE ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa Cabral.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XV—N.º 6

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1905

a pour développante principale effective la courbe

$$r = \alpha e^{\frac{s}{a}}$$

et pour développante principale idéale un point.

Conséquemment : *La ligne*

$$r = \alpha e^{\frac{s}{a}}$$

est à considérer comme une parallèle idéale du point.

§ V

Quelques propriétés remarquables des pseudo-spirales et de la parallèle idéale du point :

A) La comparaison des égalités (1), (8) démontre que les conditions :

$$p = 1, \qquad p = 3, \qquad p = -1, \qquad p = \frac{1}{3}$$

équivalent respectivement aux autres :

$$k = 1, \qquad k = -1, \qquad k = \frac{1}{3}, \qquad k = \frac{3}{5}.$$

Il s'ensuit que : *Les propriétés*

$$\frac{r_1}{r} = \text{cost.}, \qquad \frac{r_1}{r^3} = \text{const.}, \qquad r_1 r = \text{const.}, \qquad \frac{r_1{}^3}{r} = \text{const.}$$

caractérisent respectivement la spirale logarithmique, la clotoïde, la première et la deuxième dévéloppante principale de la clotoïde.

B) L'équation (10) du § II donne:

$$r_1{}^2 = \frac{k}{2k-1} r r_2; \qquad r_1{}^3 = \frac{k^2}{(2k-1)(3k-2)} r^2 r_3;$$

$$r^4{}_1 = \frac{k^3}{(2k-1)(3k-2)(4k-3)} r^3 r_4; \ldots .$$

Et comme on déduit d'ici:

$$\frac{k}{r_1} = \frac{(m-1) r_{m-1}}{m r_1 r_{m-1} - r r_m}$$

$$(22) \qquad \frac{r}{r_1} = \frac{(m-n) r_{m-1} r_{n-1}}{(m-1) r_{m-1} - (n-1) r_{n-1} r_m},$$

m et n étant des nombres entiers positifs quelconques, on a la propriété:

«*Dans toute pseudo-spirale les quantités*

$$\frac{(m-1) r_{m-1}}{m r_1 r_{m-1} - r r_m}, \qquad \frac{(m-n) r_{m-1} r_{n-1}}{(m-1) r_{m-1} r_n - (n-1) r_{n-1} r_m}$$

sont tout-à-fait indépendantes des valeurs de m *et* n».

Que l'on remplace n par $m-1$ dans l'équation (22), et m par $m-1$ dans l'équation que l'on va obtenir. Après cela, si l'on compare les deux valeurs du rapport $\frac{r}{r_1}$, on à le théorème:

Dans la suite de lignes planes formée par une pseudo-spirale et *par ses développées, les rayons de courbure de quatre lignes successives quelconques* L_{m-3}, L_{m-2}, L_{m-1}, L_m *sont liés entre eux par la relation :*

$$\frac{r_m}{r_{m-}} + \frac{r_{m-2}}{r_{m-3}} = 2\,\frac{r_{m-1}}{r_{m-2}}.$$

Remarque. — Si l'o. ·appelle la relation $r_i = s_{i+1}$, les propriétés relatives aux rayons .. courbure que nous venons de démontrer, donnent lieu à d'autıes propriétés remarquables relatives aux arcs correspondants d'une pseudo-spirale et de ses développées.

C) En considérant les exposants de s_n et σ_n dans les équations (2), (5), on a :

$$\lim_{n=\infty} \frac{k \pm (k-1)n}{1 \pm (k-1)n} = 1.$$

Si donc on désigne par ε, τ deux facteurs constants déterminés de façon qu'il résulte :

$$\lim_{n=\infty} (A_n \varepsilon) = A \quad , \quad \lim_{n=\infty} (B_n \tau) = B,$$

A et B étant deux nombres finis, on a :

« *Une pseudo-spirale quelconque peut être considérée soit comme une développée, soit comme une développante principale d'ordre infini d'une spirale logarithmique* ».

D) Si l'on élimine r entre les équations (1), (11), on a une relation qui, en vertu de l'égalité (1), peut être mise sous la forme :

(23) $$s = (1-k) \,.\, r\theta.$$

Celle-ci vaut pour toute pseudo-spirale, la spirale logarithmique exceptée.

L'élimination de s entre les équations (14), (23) donne la relation :

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-k}{1+k}\cdot r^2\theta,$$

applicable à toute pseudo-spirale, la spirale logarithmique et la clotoïde exceptées.

Quant à la parallèle idéale du point (13), on déduit de l'équation (12) :

$$r\theta=\beta \quad , \quad S=-\frac{1}{2}\beta r=-\frac{1}{2}r^2\theta.$$

Cette analyse démontre :

L *étant une pseudo-spirale et* A_i *un point quelconque de cette courbe, que l'on trace l'arc circulaire* $A_i M_i$, *ayant pour centre et pour rayon le centre et le rayon de courbure, et qui est compris entre le rayon de courbure* $A_i A_{1i}$ *et la droite* $A_{1i} M_i$ *menée par le centre de courbure parallèlement à la normale à l'origine* ($s=0$).

Après cette construction :

1.° *Si* L *n'est pas une spirale logarithmique, l'arc* s *de la ligne est proportionnel à l'arc circulaire* $A_i M_i$ [$(1-k)$ *facteur de proportionnalité*].

2.° *Si* L *n'est pas une spirale logarithmique ni une clotoïde, la surface* S *relative à la ligne est proportionnelle au secteur circulaire* $A_i A_{1i} M_i$ $\left[\frac{1-k}{1+k}\right.$ *facteur de proportionnalité* $\left.\right]$.

Si l'on applique la construction précédente à la *parallèle idéale du point* (13), *en menant les droites* $A_{1i} M_i$ *parallèlement à la normale inclinée de l'angle* $\frac{\beta}{\alpha}$ *sur la normale à l'origine* ($s=0$) :

1.° *L'arc circulaire* $A_i M_i$ *a une longueur constante* ($=\beta$).

2.° *La surface* S *relative à la ligne est égale au secteur circulaire* $A_i A_{i1} M_i$.

E) r_a et r_b étant les rayons de courbure en deux points quelconques A et B d'une pseudo-spirale, on déduit de l'équation (1):

$$\text{(24)} \qquad \text{arc AB} = a^{\frac{k-2}{k}} \left(r_b^{\frac{1}{k}} - r_a^{\frac{2}{k}}\right).$$

Si donc M est le point de AB déterminé de façon que:

$$\frac{\text{AM}}{\text{MB}} = \frac{m}{n},$$

et x le rayon de courbure relatif au point M, on a:

$$\frac{x^{\frac{1}{k}} - r_a^{\frac{1}{k}}}{r_b^{\frac{1}{k}} - x^{\frac{1}{k}}} = \frac{m}{n},$$

d'où il suit:

$$\text{(25)} \qquad x^{\frac{1}{k}} = \frac{n r_a^{\frac{1}{k}} + m r_b^{\frac{1}{k}}}{m+n}.$$

S'il s'agit de la parallèle idéale du point

$$r = e\alpha^{\frac{s}{a}},$$

les équations (24), (25) sont remplacées respectivement par les autres :

$$\text{arc AB} = a \,.\, \log\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$$

(26) $$x = \sqrt[n+m]{r_a^n \, r_b^m}.$$

Supposons vice versa que, dans une certaine ligne plane L, soit vérifié la relation (25), ou la (26), par un arc quelconque AB et par des valeurs arbitraires de m, n.

À cause d'une telle arbitrariété, les relations ci-dessus doivent être vérifiées aussi quand $m = n$ et A, B sont infiniment rapprochés. Dans cette hypothèse on a :

$$r_a = r, \qquad x = r + dr, \qquad r_b = r + 2dr + d^2r\,;$$

et si l'on porte ces valeurs dans les équations (25), (26), dans lesquelles on a fait préalablement $m = n$, on trouve les équations différentielles :

$$\left(\frac{1}{k} - 1\right)(dr)^2 + r\,.\,d^2r = 0$$

$$(dr)^2 = rd^2r,$$

donnant par intégration :

$$r = a^{1-k} s_k\,; \qquad r = \alpha e^{\frac{s}{a}} \qquad (a,\ \alpha \text{ constantes}).$$

On voit d'ici que: *Les relations* (25), (26) *entre deux rayons de courbure quelconques* r_a, r_b *d'une ligne plane et le rayon de courbure* x *relatif au point* M *qui partage l'arc* AB *en deux parties* AM, MB *ayant entre elles un rapport donné* $\frac{m}{n}$, *sont caractéristiques respectivement pour les pseudo-spirales et pour la parallèle idéale du point.*

En supposant $m = n$ dans les équations (25), (26) et en outre $k = 1$, $k = -1$ dans l'équation (25), on a:

«*La spirale logarithmique, la parallèle idéale du point et la clotoïde ont la propriété caractéristique que le rayon de courbure relatif au milieu d'un arc quelconque, est respectivement la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique entre les rayons de courbure relatifs aux point extrèmes*».

Dans la même hypothèse $m = n$, l'équation (25) pour $k = \frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$, démontre que:

«*La développante de cercle et la courbe*

$$r = a^{\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \tag{27}$$

ont la propriété caractéristique que le carré du rayon de courbure relatif au milieu d'un arc quelconque, est respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique entre les carrés des rayons de courbure extrèmes».

En désignant par x, y, les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne plane exprimées par l'arc s, on a:

$$\sum \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

d'où il suit:

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} = -\sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = -\frac{1}{r^2}$$

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} = -2\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)' - \sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} = -3.\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)'.$$

On voit d'ici: *La pseudo-spirale* (27) *est la seule ligne plane vérifiant l'équation différentielle:*

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} + \frac{dy}{ds}\frac{d^4y}{ds^4} = \text{constante}\left(= -\frac{3}{2a^3}\right).$$

En supposant d'abord $\frac{m}{n} = \frac{r_a}{r_b}$ et ensuite $\frac{m}{n} = \frac{r_b}{r_a}$ dans l'équation (25), on trouve respectivement:

(28) $$x^{\frac{1}{k}} = \frac{r_a r_b \left(r_a^{\frac{1-k}{k}} + r_b^{\frac{1-k}{k}}\right)}{r_a + r_b}$$

(29) $$x^{\frac{1}{k}} = \frac{r_a^{\frac{1+k}{k}} + r_b^{\frac{1+k}{k}}}{r_a + r_b}$$

Ces relations sont caractéristiques pour les pseudo-spirales.

En particulier, si l'on suppose $k = \frac{1}{2}$ dans l'équation (28), et $k = -1$ dans la (29), on a :

«*La* $\left\{\begin{array}{c}\textit{développante de cercle}\\ \textit{clotoïde}\end{array}\right\}$ *a la propriété caractéristique que le rayon de courbure relatif au point qui partage un arc quelconque en deux parties*

$\left\{\begin{array}{l}\textit{proportionnelles}\\ \textit{inversement proportionnelles}\end{array}\right\}$ *aux rayons de courbure extrêmes est la moyenne* $\left\{\begin{array}{c}\textit{géométrique}\\ \textit{arithmétique}\end{array}\right\}$ *entre ces rayons.*»

F) Si l'on fait arc $AB = a$ dans l'équation (24), on déduit :

$$a^{\frac{1}{k}} + r_a^{\frac{1}{k}} = r_b^{\frac{1}{k}}.$$

Cette équation, pour $k = \frac{1}{2}$, donne :

$$a^2 + r_a^2 = r_b^2,$$

d'où le théorème :

«*Le triangle rectiligne dont les côtés sont l'arc d'une développante de cercle égal au diamètre de ce cercle, et les rayons de courbure aux points extrêmes de l'arc est rectangle, et le rayon de courbure plus grand en est l'hypoténuse*».

S'il s'agit de la *première développante principale de la clotoïde*, on a $k = \frac{1}{3}$, et la relation précédente se réduit à

$$a^3 + r_a^3 = r_b^3.$$

Celle-ci peut s'employer pour résoudre le problème de la construction d'un cube égal à la somme, ou à la différence, de deux cubes donnés; et, en particulier, pour la résolution du problème classique de la duplication du cube.

G) On déduit des équations du § II:

$$\theta = \frac{a^{\frac{k-1}{k}}}{1-k} \cdot r^{\frac{1-k}{k}} \quad \text{(s'il s'agit d'une pseudo-spirale)}$$

$$\theta = \frac{\beta}{r} \quad \text{(s'il s'agit de la ligne (13))}.$$

Si donc AB est un arc quelconque de ces lignes, on a respectivement:

$$\text{Angle } (\widehat{r_a, r_b}) = \frac{a^{\frac{k-1}{k}}}{1-k}\left(r_b^{\frac{1-k}{k}} - r_a^{\frac{1-k}{k}}\right)$$

$$\text{Angle } (\widehat{r_a, r_b}) = \beta\left(r_b^{-1} - r_a^{-1}\right).$$

Ces relations constituent une *propriété caractéristique* des pseudo-spirales et de la parallèle idéale du point.

En posant la condition que le rayon de courbure x partage l'angle formé par les rayons de courbure r_a, r_b en deux parties ayant un rapport donné $\frac{m}{n}$, on a:

$$n\left(x^{\frac{1-k}{k}} - r_a^{\frac{1-k}{k}}\right) = m\left(r_b^{\frac{1-k}{k}} - x^{\frac{1-k}{k}}\right); n(x^{-1} - r_a^{-1}) = m(r_b^{-1} - x_{-1}),$$

d'où il suit :

$$x^{\frac{1-k}{k}} = \frac{n r_a^{\frac{1-k}{k}} + m r_b^{\frac{1-k}{k}}}{m+n} \quad ; \quad x^{-1} = \frac{n r_a^{-1} + m r_b^{-1}}{m+n}.$$

Si l'on fait ici $m = n$ et, en outre, on suppose successivement $k = \frac{1}{2}$, $k = -1$ dans la première équation, on a :

« La $\left\{\begin{array}{l}\textit{développante de cercle}\\ \textit{clotoïde}\\ \textit{parallèle idéale du pointt}\end{array}\right\}$ *a la propriété caractéristique que le* $\left\{\begin{array}{l}\textit{rayon de courbure}\\ \textit{carré du rayon de courbure}\\ \textit{rayon de courbure}\end{array}\right\}$ *bisecteur de l'angle formé par deux rayons de courbure quelconques est la moyenne* $\left\{\begin{array}{l}\textit{arithmétique}\\ \textit{harmonique}\\ \textit{harmonique}\end{array}\right\}$ *entre* $\left\{\begin{array}{l}\textit{ces rayons}\\ \textit{les carrés de ces rayons}\\ \textit{ces rayons}\end{array}\right\}$. »

H) L'élimination de s entre les équations (1), (14) donne :

$$S = \frac{1}{2(1+k)} \cdot a^{\frac{k-1}{k}} \cdot r^{\frac{k+1}{k}}.$$

D'ailleurs le calcul direct donne pour la parallèle idéale du point $r = \alpha e^{\frac{s}{a}}$:

$$S = \frac{1}{2} \int r ds = \frac{a}{2} \cdot \alpha e^{\frac{s}{a}} = \frac{a}{2} r.$$

Si donc on désigne par Σ la surface comprise entre un arc quelconque AB d'une pseudo-spirale, ou de la parallèle idéale du point, l'arc correspondant A_1B_1 de sa développée et les rayons de courbure extrêmes r_a, r_b, on a:

$$\Sigma = \frac{1}{2(1+k)} \cdot a^{\frac{k-1}{k}} \left(r_b^{\frac{k+1}{k}} - r_a^{\frac{k+1}{k}}\right); \qquad \Sigma = \frac{a}{2}(r_b - r_a).$$

Il suit d'ici:

«Les pseudo-spirales (exception faite pour la clotoïde) ét la parallèle idéale du point sont caractérisées par la propriété, que le rayon de courbure x *qui partage la surface arbitraire* Σ *en deux parties, ayant un rapport donné* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, *est lié aux rayons de courbure extrêmes respectivement par les relations:*

$$x^{\frac{k+1}{k}} = \frac{nr_a^{\frac{k+1}{k}} + mr_b^{\frac{k+1}{k}}}{m+n}; \qquad x = \frac{nr_a + mr_b}{m+n}.$$

Si l'on suppose $m = n$ et en outre on fait successivement $k = 1$, $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{3}$ dans la première des équations précédentes, on a:

La parallèle idéale du point, la spirale logarithmique, la développante de cercle et la développan'e principale d'une clotoïde ont la propriété caractéristique que la première, la deuxième, la troisième et la quatrième puissance du rayon de courbure bisecteur d'une surface Σ *arbitraire, est respectivement la moyenne arithmétique entre la première, la deuxième, la troisième et la quatrième puissance des rayons de courbure extrêmes».*

I) Si l'on désigne par r_a, r_b, r_c, r_d les rayons de courbure en quatre points arbitraires A, B, C, D d'une pseudo-spirale, on trouve à l'aide de la relation (24):

$$(\mathrm{ABCD}) = \left(r_a^{\pm\frac{1}{k}}\, r_b^{\pm\frac{1}{k}}\, r_c^{\pm\frac{1}{k}}\, r_d^{\pm\frac{1}{k}}\right).$$

En supposant

$$(ABCD) = h,$$

on trouve d'ici :

$$r_d^{\pm\frac{1}{k}} = \frac{(r_a^{\pm\frac{1}{k}} - r_c^{\pm\frac{1}{k}})\, r_b^{\pm\frac{1}{k}} - h\,(r_b^{\pm\frac{1}{k}} - r_c^{\pm\frac{1}{k}})\, r_a^{\pm\frac{1}{k}}}{(r_a^{\pm\frac{1}{k}} - r_c^{\pm\frac{1}{k}}) - h\,(r_b^{\pm\frac{1}{k}} - r_c^{\pm\frac{1}{k}})}.$$

Cette relation est caractéristique pour la pseudo-spirale ; elle fournit le rayon de courbure relatif au point D qui, avec trois points donnés A, B, C, forme un groupe dont le rapport anharmonique est un nombre donné h.

En particulier :

«*Dans le spirale logarithmique et dans la clotoïde quatre rayons de courbure proportionnels aux nombres* $1, \alpha, 2(\alpha-1), 2\alpha^2-5\alpha+4$ (*avec* $\alpha > 2$) *correspondent à quatre points, dont le premier et le troisième sont séparés harmoniquement par les autres*».

Parme, juin 1901.

DEUX PROBLÈMES RELATIFS AUX LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

L étant une ligne quelconque tracée sur une surface de révolution Σ, on en peut dériver deux autres L_1 et Λ_1 appelées respectivement *la projection* et *l'antiprojection* de la ligne L sur la surface Σ.

Ce sont les lieux des points où la surface Σ est coupée par la suite de normales qu'on peut respectivement *abaisser* ou *élever* à la surface Σ de chaque point de L.

En partant d'une ligne déterminée L, construisons la suite de lignes

$$\left\{\begin{matrix} L_1, L_2, \ldots\ldots L_{k-1}, L_k, \ldots\ldots \\ \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots\ldots \Lambda_{k-1}, \Lambda_k, \ldots\ldots \end{matrix}\right\} \text{ avec la condition que } \left\{\begin{matrix} L_k \\ \Lambda_k \end{matrix}\right\}$$

soit $\left\{\begin{matrix}\text{la projection} \\ \text{l'antiprojection}\end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix} L_{k-1} \\ \Lambda_{k-1} \end{matrix}\right\}$. On dit alors que $\left\{\begin{matrix} L_n \\ \Lambda_n \end{matrix}\right\}$ est $\left\{\begin{matrix}\text{la projection} \\ \text{l'antiprojection}\end{matrix}\right\}$ $n^{ème}$ de L.

Cette note a le but d'exposer en peu de mots une méthode pour déterminer ces deux familles de courbes dérivées.

Si la ligne méridienne de Σ est représentée par l'équation

$$\zeta = F(\xi),$$

les coordonnées d'un point quelconque de L peuvent s'exprimer de la façon suivante

$$(1) \qquad x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = F(R).$$

La projection L_1 et l'antiprojection Λ_1 de la ligne L sont alors définies par des équations de la forme

$$(2) \qquad x_1 = -H\cos u, \qquad y_1 = -H\sin u, \qquad z_1 = F(H),$$

H étant une certaine fonction de R qu'on doit déterminer convenablement.

A et A_1 étant une couple de points correspondants des lignes L et L_1, les cosinus directeurs de la droite AA_1 et ceux de la tangente à la ligne L_1 sont proportionnels respectivement aux différences

$$x - x_1 = (R + H)\cos u, \qquad y - y_1 = (R + H)\sin u,$$

$$z - z_1 = F(R) - F(H)$$

et aux dérivées

$$\frac{dx_1}{du} = -H'\cos u + H\sin u, \quad \frac{dy_1}{du} = -H'\sin u - \cos u,$$

$$\frac{dz_1}{du} = F'(H) . H'.$$

Il s'ensuit que l'équation

$$\sum (x-x_1)\frac{dx_1}{du}=0,$$

exprimant la condition que la droite AA_1 est une normale à la surface Σ, se réduit à

$$\text{(3)}\qquad F(H).F'(H)-F(R).F'(H)+H=-R.$$

Cette équation, à la suite d'une permutation entre les lettres R, H, donne

$$\text{(4)}\qquad F'(R)F(H)-H=R+F(R).F'(R).$$

L'analyse que l'on vient d'exposer démontre que *la projection* L_1 *et l'antiprojection* Λ_1 *de la ligne* (1) *sont déterminées par les équations* (2), *quand on y remplace* H *par l'expression que l'on trouve en résolvant respectivement l'équation* (3) *ou* (4).

La détermination de la projection $n^{ème}$ L_n et de l'antiprojection $n^{ème}$ Λ_n de la ligne L est évidemment réduite à l'application successive de la méthode que l'on vient d'exposer.

Cas particulier. — Quand la surface Σ est un paraboloïde de révolution, on a

$$F(\xi)=\frac{\xi^2}{a},$$

et les lignes L_1, Λ_1 relatives à une courbe quelconque L tracée sur Σ sont définies respectivement par les équations

$$x_1 = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2a^2}}{2} \cos u, \quad y_1 = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2a^2}}{2} \sin u,$$

$$z_1 = \frac{\left(R \pm \sqrt{R^2 - 2a^2}\right)^2}{4a},$$

$$\xi = -\left(R + \frac{a^2}{2R}\right) \cos u, \quad \eta_1 = -\left(R + \frac{a^2}{2R}\right) \sin u,$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{a}\left(R + \frac{a^2}{2R}\right)^2.$$

Si la projection équatoriale de la ligne L est la courbe représentée par l'équation polaire

$$R = \lambda(u), \tag{5}$$

on a les formules

$$(6) \quad \begin{cases} R_1 = \dfrac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 2a^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\lambda(u) \pm \sqrt{\lambda^2(u) - 2a^2}\right\}, \\[2ex] R_2 = \dfrac{1}{2}\left(R_1 \pm \sqrt{R_1{}^2 - 2a^2}\right) = \dfrac{1}{4}\left\{\lambda(u) \pm \sqrt{\lambda^2(u) - 2a^2} \pm \right. \\[2ex] \qquad \left. \pm \sqrt{\left[\lambda(u) \pm \sqrt{\lambda^2(u) - 2a^2}\right]^2 - 8a^2}\right\}. \end{cases}$$

. . . .

$$
(7)\left\{
\begin{array}{l}
\rho_1 = \mathrm{R} + \dfrac{a^2}{2\mathrm{R}} = \lambda(u) + \dfrac{a^2}{2\lambda(u)}, \\
\rho_2 = \rho_1 + \dfrac{a^2}{2\rho_1} = \lambda(u) + \dfrac{a^2}{2\lambda(u)} + \dfrac{a^2\lambda(u)}{2\lambda^2(u)+a^2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}
\right.
$$

définissant respectivement les projections équatoriales des lignes $(L_1, L_2, \ldots)$ et $(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots\ldots)$.

On voit d'ici que la ligne plane (5) fixée, l'une quelconque des lignes des familles (6), (7) peut être réalisée par une construction géométrique effectuée à l'aide d'un paraboloïde de révolution fixe.

Si, par exemple, on suppose que la ligne L soit l'intersection du paraboloïde Σ avec le plan $x = m$, on a

$$
\mathrm{R} = \frac{m}{\cos u},
$$

et les lignes L_1, Λ_1 s'obtiennent en coupant le paraboloïde avec les cylindres ayant les génératrices parallèles à l'axe des z et dont les sections droites sont respectivement les lignes du troisième ordre

$$
2(x_1 - m)(x^2_1 + y^2_1) + a^2 x_1 = 0,
$$
$$
2m(\xi_1 - m)(\xi^2_1 + \eta^2_1) - a^2\xi^2_1 = 0.
$$

Si L a pour projection équatoriale le cercle

$$
\mathrm{R} = h.\cos u
$$

passant par l'origine, les projections équatoriales des lignes L_1,

Λ_1 sont représentées respectivement par les équations

$$x^2_1 + y^2_1 - hx_1 + \frac{a^2}{2} = 0,$$

$$(2h\,\xi_1 - a^2)(\xi^2_1 + \eta^2_1) - 2h^2\xi^2_1 = 0.$$

L'avant-dernière équation démontre le théorème : *Si l'on coupe un paraboloïde de révolution par un cylindre circulaire passant par l'axe de la surface, et par chaque point de la ligne d'intersection* L *on abaisse la normale au paraboloïde, ces droites engendrent une surface réglée qui coupe le paraboloïde suivant une ligne* L_1 *placée elle-même sur un autre cylindre circulaire ayant même axe que le premier.*

En ajoutant membre à membre les équations

$$(8)\quad \rho_1 = R + \frac{a^2}{2R}, \quad \rho_2 = \rho_1 + \frac{a^2}{2\rho_1}, \ldots\ldots \rho_n = \rho_{n-1} + \frac{a^2}{2\rho_{n-1}},$$

on trouve que *les rayons vecteurs des projections équatoriales d'une ligne arbitraire* L *(tracée sur un paraboloïde de révolution) et de ses* n *antiprojections successives* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots\ldots, \Lambda_n$, *son liés entre eux par la relation*

$$\rho_n = R + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\rho_{n-1}}\right),$$

qui dépend seulement du paraboloïde donné.

L'élimination de a entre les deux premières équations (8) démontre que *les rayons vecteurs des projections équatoriales d'une ligne arbitraire* L *(tracée sur un paraboloïde de révolution) et de ses deux antiprojections successives* Λ_1, Λ_2 *sont liés entre eux par la relation*

$$R(R-\rho_1)=\rho_1(\rho_1-\rho_2),$$

qui conserve sa forme inaltérée, quel que soit le paraboloïde.

Parme, octobre 1903.

CAMPOS RODRIGUES

A Academia das Sciencias de Paris, em sua sessão de 19 de setembro de 1904, conferiu o premio conhecido pela designação de *Premio Valz* ao sabio Director do Observatorio Astronomico de Lisboa, Vice-Almirante Campos Rodrigues. O relatorio apresentado pela commissão encarregada pela Academia de designar a pessoa a quem julgue dever ser conferido esta distincção, assignado pelos srs. Janssen, Wolf, Radau, Deslandres, Bigourdan, Poincaré, Lippmann, Darboux e Loewy, diz o seguinte:

«O Real Observatorio Astronomico de Lisboa, ainda que dotado de um instrumental muito modesto, destinguiu-se todavia nos ultimos quinze annos, por trabalhos feitos em condições de precisão notaveis.

«Convém assignalar, a este respeito, uma investigação interessante do Director, o sr. Vice-Almirante Campos Rodrigues, que se refere á determinação das ascensões rectas de um grupo de estrellas cujas posições servem para o calculo das ephemerides do *Jahrbuch* de Berlin; e, depois, as bellas séries de observações effectuadas pelor srs. Campos e Oom durante a opposição de 1892, sobre o planeta Marte assim como sobre um certo numero de astros situados na visinhança da trajectoria d'este corpo ceceleste, cujos resultados se acham consignados em um volume publicado em 1895.

«Mas a Commissão insiste de um modo muito especial sobre o alto valor da contribuição do Observatorio de Lisboa para a obra internacional da determinação da parallaxe solar por meio do planeta Eros. Os trabalhos meridianos realisados para este fim são de primeira ordem e a sua exactidão não foi excedida em parte alguma.

«Estes bellos resultados foram obtidos, graças á impulsão fecunda dada á actividade do Observatorio pelo seu eminente Director e tambem á sua participação pessoal na execução dos diversos estudos.

«Como testemunho de alta estima e consideração propõe por unanimidade que seja conferido o premio *Valz* ao sr. Campos Rodrigues».

Transcrevemos aqui, com grande prazer, este relatorio, que dá uma grande honra ao illustre astronomo, Director do Observatorio de Lisboa, a este importante estabelecimento e ao paiz.

BIBLIOGRAPHIA

E. Coursat: Cours d'Analyse mathématique, t. 1. Paris, Gauthier Villars, 1902.

É para nós sempre motivo de prazer vêr os homens eminentes na sciencia, como o auctor da presente obra, abandonar por algum tempo os seus trabalhos de alta investigação, para consagrarem algum tempo á redacção de obras para o ensino. Ninguem como os homens que dominam completamente uma sciencia, pode escolher melhor os assumptos de que deve occupar-se, apresentar demonstrações mais singelas e instructivas e dar á exposição uma fórma mais clara e expressiva.

Estas reflexões foram-nos sugeridas pela leitura do presente livro, que contém uma parte do curso feito pelo seu illustre auctor na Faculdade das sciencias de Paris, e é consagrado á theoria das funcções de variaveis reaes, a qual é exposta em doze capitulos, onde são respectivamente tratados os assumptos seguintes:

I. Derivadas e differenciaes. II. Funcções implicitas. Determinantes funccionaes. Mudanças de variaveis. III. Fórmula de Taylor. Applicações elementares. Maximos e minimos. IV. Integraes definidos. V. Integraes indefinidos. VI. Integraes duplos. VII. Integraes multiplos. VIII. Desenvolvimento em série. IX. Séries inteiras. X. Curvas planas. XI. Curvas empenadas. XII. Superficies.

Como se vê os assumptos considerados são os que habitualmente são tratados nos Cursos de Analyse infinitesimal, mas no modo como são estudados reconhece-se a cada passo a elevação do geometra eminente que os expõe.

A obra constará ainda de um outro volume, consagrado a theoria das funcções de variaveis imaginarias e á theoria das equações differenciaes.

Oscar Bolza: Lectures on the calculus of variations. Chicago, 1904.

Esta obra magistral, consagrada á parte do calculo das variações em que a funcção que entra no integral depende de uma curva plana e não involve derivadas de ordem superior á primeira, contém o que de mais essencial se tem descoberto até aos tempos modernos, já com o fim de dar rigor aos primitivos trabalhos de Euler, Lagrange, etc., já com o de dilatar o campo das suas applicações.

Os primeiros grandes progressos que o calculo das variações teve, depois dos primitivos trabalhos de Lagrange e dos de Legendre e Jacobi, foram realisados por Weierstrass, que fez d'elle, por vezes, objecto das suas lições na Universidade de Berlim. Ora o auctor ouviu as prelecções do eminente geometra allemão em 1879, e, com os elementos que então colheu e com os que lhe foram fornecidos por outros discipulos d'aquelle grande mestre, organisou, debaixo de uma fórma perfeita, a parte com que o referido geometra concorreu para o progresso do calculo das variações.

Depois dos trabalhos de Weierstrass, e inspirados por elle, muitos outros geometras eminentes do nosso tempo occuparam-se tambem com successo do mesmo ramo da Analyse. A parte essencial d'estes trabalhos é tambem exposta pelo sabio professor americano, sendo considerados os trabalhos de Erdmann, Du Bois-Reymond, Scheffers, Schwarz, etc., e mais especialmente os de Kneser e de Hilbert.

Resulta d'esta rapida noticia que o livro notavel que vem de publicar o sr. Bolza, resume o estudo actual da theoria a que é consagrado; ao que podemos ajuntar que está escripto com uma elegancia na fórma e com uma clareza taes que a sua leitura não é só extremamente proveitosa e instructiva, mas é tambem muito agradavel.

M. Godefroy: Théorie élémentaire des séries. Paris, Gauthier Villars, 1903.

Não conhecemos livro algum consagrado á theoria das séries mais proprio do que este para estudar este importante algorithmo. Está escripto com muita clareza e simplicidade, e contém tudo o que se tem encontrado de essencial sobre esta doutrina até aos tempos mais modernos.

Os assumptos estão dispostos em seis capitulos. No primeiro são estudadas algumas noções fundamentaes que é necessario conhecer muito bem para se iniciar o estudo das séries, taes como a noção de limite, de continuidade, de derivada, etc. No segundo são estudadas as séries de termos constantes, positivos ou negativos, sendo demonstradas as principaes regras para verificar a sua convergencia. O terceiro capitulo é consagrado ao estudo das séries de funcções, especialmente ás séries inteiras. Nos cacapitulos quarto e quinto são estudados os desenvolvimentos da exponencial e das funcções circulares e muitas questões interessantes de Analyse ligadas a estes desenvolvimentos, como a theoria das funcções de Bernoulli e Hermite; a theoria das funcções circulares, tirada dos desenvolvimentos do seno e do coseno; etc. O ultimo capitulo é consagrado á funcção *gamma*, a respeito da qual o auctor tinha já publicado um importante trabalho, que os leitores d'este jornal conhecem, por ter sido objecto de uma noticia aqui publicada.

E. Torroja y Caballé: Teoria geométrica de las lineas alabeadas y de las superficies desarrollables. Madrid, 1904.

Entre as obras com que tem sido enriquecida nos ultimos tempos a litteratura mathematica hespanhola, occupam um dos primeiros logares as do sr. E. Torroja, que os leitores d'este jornal conhecem muito bem, por termos aqui dado noticia, em um dos ultimos annos, de um importante trabalho que consagrou á Geometria de situação,

A presente obra é consagrada á theoria das curvas empenadas e das superficies planificaveis, que são nella estudadas pelos methodos de Geometria pura, que o illustre geometra hespanhol maneja com grande perfeição.

Abre a obra por um capitulo fundamental, onde são consideradas as figuras de caracter projectivo relacionadas com as curvas e superficies. No capitulo segundo são estudados os elementos singulares das curvas, as linhas quebradas inscriptas nas curvas, os contactos das linhas e das superficies, e as curvas e superficies envolventes e envolvidas. No capitulo 3.º são estudados os elementos de retrocesso das curvas e superficies. O capitulo 4.º é consagrado á planificação das superficies e a applicações ao cylindro e ao cone; o capitulo 5.º á theoria dos envolventes e evolutas das curvas empenadas; o capitulo 6.º á theoria das linhas de egual inclinação e applicação ao helicoide planificavel; o capitnlo 7.º á theoria de symetria e involação; o capitulo 8.º a alguns problemas relativos á intersecção de superficies e á determinação das superficies planificaveis circumscriptas a superficies empenadas. Os capitulos 9.º a 15.º são consagrados á theoria e classificação das quadricas, das superficies planificaveis de quarta classe e das cubicas e quarticas empenadas, sendo n'ellas principalmente interessante a parte que se refere á classificação das quarticas empenadas. No ultimo capitulo é considerada a theoria da curvatura das superficies empenadas.

Ernest Mach: *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Paris, Hermann, 1904.*

Esta obra magistral foi publicada pela primeira vez em lingua allemã, em 1883, e o seu successo foi tão grande que 4 edições foram até hoje publicadas n'aquella lingua. As suas altas qualidades levaram o sr. E. Bertrand a fazer uma traducção franceza, para poder assim tornar a sua leitura accessivel aos que não conhecem aquella lingua, traducção que foi enriquecida ainda com um prefacio do sr. E. Picard.

O objecto d'esta obra é uma exposição ao mesmo tempo historica e critica da Mecanica desde a sua origem até á actualidade. O criterio do auctor n'esta critica, que é feita de uma maneira profunda, é por elle exposto no prefacio com as palavras seguintes: O conceito de causa é substituido pelo de funcção; a descoberta de dependencia reciproca dos phenomenos e sua descripção economica vem a ser o fim, emquanto que os conceitos physicos são simples meios de ahi chegar». Segundo este modo de vêr de Mach, o fim pois da sciencia é relacionar os phenomenos com o fim de economisar trabalho de pensamento, e segundo este modo de vêr faz a philosophia da sciencia a que o livro é consagrado.

Como já dissemos, o auctor segue passo a passo a historia da Mecanica desde a sua origem. Assim, principiando pelos trabalhos de Archimedes relativos ao principio da alavanca, analysa as demonstrações que se têem dado deste principio; considera depois os trabalhos que se referem ao plano inclinado, considerado pela primeira vez por Stévin; em seguida occupa-se dos trabalhos relativos ao parallelogrammo das forças e emfim dos trabalhos relativos ao principio das velocidades virtuaes. Considera depois a applicação d'estes principios aos liquidos e aos gazes. Todos estes assumptos fazem parte do capitulo 8.°, consagrado á Statica.

Os capitulos 2.° e 3.° são consagrados á Dynamica. No 1.° são descriptos e analysados os trabalhos de Galileu, Huygens, Newton e Hertz, sendo principalmente notavel a analyse n'elle feita dos trabalhos de Newton. No 2.° são considerados os theoremas geraes de Mecanica, o choque dos corpos, e alguns problemas de Hydrostatica e Hydrodynamica, etc.

No capitulo 4.° vem um golpe de vista geral sobre o desenvolvimento da Mecanica.

Finalmente no capitulo 5.° são consideradas as relações da Mecanica com a Physica e com a Physiologia.

Castelnuovo: Lezioni di Geometria analitica e proietiva, vol. I. *Roma, 1904.*

Contém esta obra importante o curso sobre Geometria analytica e sobre Geometria projectiva feito pelo seu auctor na Universidade de Roma. O presente volume, o primeiro da obra, é consagrado á Geometria plana.

Destingue-se este livro de outros manuaes consagrados á Geometria em que n'elle são estudados simultaneamente os methodos da Geometria analytica e da Geometria projectiva, de modo a habilitar os alumnos a empregal-os conjunctamente e a aproveitar o auxilio que um póde dar ao outro.

Abre o livro por uma introducção, onde são expostas as noções fundamentaes de Geometria. Depois, no livro primeiro, são estudadas em tres capitulos as fórmas de primeira especie, sendo o primeiro capitulo consagrado aos systemas de coordenadas, o segundo á projectividade entre duas fórmas, o terceiro á involução. O livro segundo é consagrado á Geometria analytica do plano, e contém seis capitulos, onde são respectivamente estudados os assumptos seguintes: I Relação de posição entre pontos e rectas. II. Distancias, angulos, áreas. III. Transformação de coordenadas. Coordenadas projectivas. IV. Representação analytica das curvas planas. Envolventes de rectas. V. O circulo e outras curvas particulares. VI. Projectividade entre fórmas de primeira especie.

A parte 3.ª é consagrada ás curvas de segunda ordem. Contém seis capitulos cujos assumptos são os seguintes: I. Polaridade definida das curvas. II. Construcção de conicas. III. Diametros. IV. Fórmas reduzidas das equações das conicas. V. Propriedades focaes das conicas. VI. Transformação das conicas por meio de uma collineação.

A Italia, graças á influencia de Cremona, é um dos paizes que, em trabalhos geometricos, caminha hoje á frente das nações. Não é necessario porisso fazer o elogio de uma obra, sobre Geometria, que contém o curso proferido em uma Universidade de um tal paiz, na qual estão ainda bem vivas as tradições d'aquelle grande mestre, por um dos seus mais illustres discipulos.

Clairin: Sur les transformations de Baecklund. Paris, Gauthier Villars, 1902

É consagrado este volume a uma thése apresentada á Faculdade das Sciencias de Paris pelo sr. Clairin em 1902, na qual são estudadas de um modo profundo algumas transformações importantes das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem, conhecidas pelo nome de transformações de Baecklund.

São tambem estudadas n'esta bella Memoria algumas outras transformações das mesmas equações mais ou menos estreitamente ligadas com o assumpto principal a que é consagrada,

---

J. A. de Séguier: Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris, Gauthier Villars, 1904.

Apparecem em Algebra, em Analyse e em Geometria grupos de differente natureza (grupos de numeros, de objectos, de pontos, de substituições, etc.), que nestas sciencias se estudam. Nas theorias d'estes grupos existe uma parte commum, que convém estudar previamente de um modo abstracto, independente da natureza do grupo. É a este estudo que é consagrado o livro a que nos estamos referindo, cujo fim é preparar para a leitura dos trabalhos relativos aos grupos especiaes.

Acrescentaremos ainda que, para ser util ao maior numero possivel de leitores, o auctor deu á redacção d'este livro uma fórma simples e facil, e que para o lêr não é necessario gronde preparação.

L. Lorenz: Oeuvres scientifiques, t. II, Copenhague, 1904.

Deu-se já no *Jornal de Sciencias Mathematicas* uma noticia sobre o 1.º volume das obras scientificas do eminente physico e geometra dinamarquez L. Lorenz. O presente volume contém diversas memorias importantes consagradas ás sciencias mathematicas e ás sciencias physicas. As primeiras referem-se ao desenvolvimento das funcções por meio de integraes definidas, á resolução das equações algebricas por meio de séries e de integraes definidos, ao desenvolvimento das funcções arbitrarias por meio de funcções dadas, á theoria dos numeros primos, etc.; as segundas, referem-se á theoria de elasticidade dos corpos homogeneos, á resistencia electrica do mercurio, á conductibilidade electrica e colorifica dos metaes, ao movimento dos liquidos, á determinação do numero de moleculas contidas em um milligramma de agua, aos methodos para a determinação do ohm, etc.

Contém ainda este volume uma biographia muito interessante de Lorenz, escripta por H. Valentiner, o sabio illustre que reviu e annotou as obras do seu eminente compatriota.

Oeuvres de Laguerre, t. II. Paris, Gauthier Villars, 1905.

O nome de Laguerre figura na lista dos geometras mais eminentes que teve a França no seculo ultimo, pela originalidade e profundeza dos seus trabalhos. Por isso a Academia das Sciencias de Paris encarregou Hermite, Poincaré e Rouché da publicação das suas obras, prestando assim uma justa homenagem á memoria d'aquelle eminente geometra e um relevante serviço aos homens de sciencia de todos os paizes, facilitando-lhe a leitura de tantos trabalhos importantes, espalhados por diversas collecções scientificas. Todos estes trabalhos foram reunidos em dois volumes, um consagrado aos que se referem á Analyse, publicado ha bastantes annos, o outro aos que se referem á Geometria, que ha pouco appareceu.

É consideravel o numero de trabalhos publicados n'este ultimo volume, e são n'elle considerados assumptos variados da theoria das curvas e superficies. Assim referem-se ás propriedades focaes das curvas e superficies, ao emprego dos imaginarios em Geometria, ás propriedades das curvas e superficies anallagmaticas, ás propriedades das curvas resultantes das intersecções de superficies de segunda ordem, á applicação da theoria das fórmas binarias á Geometria, ás propriedades das normaes ás conicas e ás superficies de segunda ordem, etc.

M. G. Bigourdan: Les éclipses de soleil. Paris, Gauthier Villars, 1905.

Quem quizer preparar-se para observar o eclipse total do sol, que vae ter logar em 30 de agosto d'este anno, deve ler o interessante opusculo cujo titulo vem de ser enunciado.

Vêem n'elle indicadas as observações uteis que se podem fazer sem instrumentos, ou com instrumentos simples ou com grandes instrumentos; os problemas de Physica solar que as observações dos eclipses são chamados a resolver, etc. Encontram-se tambem n'elle informações muito instructivas sobre algumas observações e resultados obtidos nos eclipses anteriores, e, em especial, sobre o que teve logar em 1900.

G. T.

INDICE

CONDIÇÕES DE ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

F. GOMES TEIXEIRA

Curso de Analyse infinitesimal

Tomo I (Calculo differencial);
Tomo II (Primeira parte do Calculo integral);
Tomo III (Segunda parte do Calculo integral).

Preço de cada volume — 2$500 réis.