$$\left.\begin{array}{ll}\text{ou antes} & x=\tfrac{1}{2}\sqrt{}(\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}),\\ \text{e do mesmo modo} & x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\mp\sqrt{t''}).\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(5)$$

Advirta-se que, em qualquer dos dous casos, as equações (4) e (5) são symetricas em t, t', t'', isto é, que as expressões dão os mesmos quatro valores, quando uma d'estas letras se muda na outra. Logo, sendo as equações (4) e (5) as mesmas que as equações (B) debaixo d'outra fórma, as equações (B) não dão mais de 4 raizes.

As equações (4) e (5) tem a vantagem de indicar a natureza das raizes de x. Porque:

1.° *Se a reduzida tiver as tres raizes reaes*, como o seu producto $t.t'.t''=q^2$ é positivo, tem de ser forçosamente duas negativas, ou todas tres positivas. No 1.° caso $\sqrt{t}$ e $\sqrt{t'}$ são imaginárias, e por conseguinte serão imaginarios todos os quatro valores de x. No 2.°, $\sqrt{t}$, $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$ são reaes, e as quatro raizes da proposta tambem o serão.

Logo: *Quando a reduzida se achar no caso irreduzivel, a proposta terá as quatro raizes conjunctamente reaes ou imaginárias, conforme forem os tres valores* t *todos positivos, ou só um positivo e os outros negativos.*

Acontecendo n'este 2.° caso ser $t'=t''$, como dous dos valores de x contém a differença dos radicaes $\sqrt{t'}$ e $\sqrt{t''}$, os imaginarios destroem-se entre si, e a proposta fica com duas raizes reaes e eguaes, e duas imaginárias.

2.° *Se a reduzida tiver só uma raiz* t *real*, como t é positivo, $\sqrt{t}$ é real. Além disto designando t' e t'' por $a\pm b\sqrt{-1}$, será

$$\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}\pm\sqrt{(a-b\sqrt{-1})};$$

e, quadrando,

$$(\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''})^2=2a\pm2\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

O último radical é manifestamente real e $>a$; e por conseguinte o quadrado tem dous valores reaes, um positivo, outro negativo. Extrahindo pois a raiz, que é $\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}$, temos de uma parte uma quantidade real da fórma $\sqrt{A}$, e da outra uma imaginária da fórma $\sqrt{-B}$.

Logo, revertendo para os valores precedentes de x, vê-se claramente que, *se a reduzida tiver sómente uma raiz t real, esta será positiva, e a proposta terá duas raizes reaes e duas imaginárias.*

IV. Funcções Symetricas.

Cálculo das funcções symetricas das raizes das equações.

116. *Diz-se* funcção symetrica, ou invariavel, *aquella que não soffre alteração alguma, quando as letras que n'ella entram se mudam umas nas outras.* Taes são, por ex.°, a^2+b^2, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a+b+\text{sen}\, a\ \text{sen}\, b$, que permanecem as mesmas, quando se põe a por b, e b por a. Os coefficientes dos diversos termos de uma equação $fx=0$ tambem são funcções symetricas das raizes $a, b, c, \ldots\ldots$ (n.° 29)

Representaremos por S_k a somma das potencias do grão k das raizes da proposta, ou $S_k=a^k+b^k+c^k+\ldots\ldots$; e por $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots\ldots]$ a funcção symetrica que tem um termo da fórma $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$, e na qual se obtém os outros termos mudando cada uma das letras $a, b, c, \ldots$ em todas as outras successivamente.

Posto isto, passemos a mostrar que, *apezar de não serem conhecidas as raizes* a, b, c, ... *da equação*

$$fx=x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\ldots\ldots+p_{m-1}x+p_m=0,$$

podemos sempre achar as quantidades S_k *e* $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots\ldots]$ *em funcção dos coefficientes* $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ *da proposta.*

1.ª Parte. Dividindo por

$$fx=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$$

a derivada (n.° 47, 2.°) d'esta mesma funcção, ou

$$f'x=(x-b)(x-c)\ \ldots\ldots+(x-a)(x-c)\ldots\ldots+\text{etc.},$$

acha-se

$$\frac{mx^{m-1}+(m-1)\,p_1x^{m-2}+\ldots+p_{m-1}}{x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+p_m}=\frac{1}{(x-a)}+\frac{1}{(x-b)}+\frac{1}{(x-c)}\ldots(1)$$

Desenvolvendo $(x-a)^{-1}$ temos (n.° 11, I)

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\ldots.$$

Mudando consecutivamente a em b, c, d, ..., e sommando estes resultados, o segundo membro da equação (1) torna-se em

$$\frac{m}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\ldots\ldots$$

Multiplicando toda a equação por $x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots+p_m$, vem

$$mx^{m-1}+(m-1)\,p_1x^{m-2}+\text{etc.}=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
mx^{m-1}+S_1 & x^{m-2}+S_2 & x^{m-3}+S_3 & x^{m-4}\ldots\text{etc.} & \ldots+S_l & x^{m-l-1}\\
\quad +mp_1 & \quad +p_1S_1 & \quad +p_1S_2 & & \ldots+p_1S_{l-1} & \\
 & \quad +mp_2 & \quad +p_2S_1 & & \ldots+p_2S_{l-2} & \\
 & & \quad +mp_3 & & \ldots+p_3S_{l-3} &
\end{array}$$

O 1.° membro tem m termos; o 2.° tem infinitos; e cada uma das $m+1$ linhas horizontáes de coefficientes tem o seu 1.° termo affastado uma casa mais para a direita que a linha antecedente.

Comparando os coefficientes das mesmas potencias de x n'estas duas identidades, transpondo e reduzindo, achar-se-ha (*)

(*) Todas as vezes que duas funcções identicas, desenvolvidas em ordem ás potencias de x, nos levarem a uma equação da fórma

$$A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots=P+Qx+Rx^2+\ldots\ldots$$

sendo A, B, C, ... P, Q, R, ... coefficientes independentes de x

..

$$(\mathrm{A})\begin{cases} S_1+p_1=0, \\ S_2+p_1S_1+2p_2=0, \\ S_3+p_1S_2+p_2S_1+3p_3=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{m-1}+p_1S_{m-2}+p_2S_{m-3}+\dots+(m-1)\,p_{m-1}=0. \end{cases}$$

Equações por meio das quaes será facil calcular successivamente $S_1, S_2, .. S_{m-1}$ em funcção dos coefficientes $p_1, p_2, p_3, \dots\dots$

Passadas estas $m-1$ equações, o 1.° membro não tem termos comparaveis com os do 2.°, e apparecem equações da fórma

$$(\mathrm{B})\dots\, S_l+p_1S_{l-1}+p_2\,S_{l-2}+\dots\dots+p_m\,S_{l-m}=0,$$

sendo l um inteiro $=$ ou $>m$. Quando for $l=m$, póde substituir-se o termo $p_m S_0$ por mp_m, por ser $S_0=a^0+b^0+\dots=m$; e n'esse caso a equação (B) ainda se acha comprehendida na mesma lei das equações (A). Achado S_m, podemos, successivamente, pela equação (B) achar as relações seguintes $S_{m+1}, S_{m+2}\dots$ em funcções dos coefficientes da proposta (1).

Para determinar a somma das potencias negativas, o meio mais simples é mudar na proposta (1) x em $\frac{1}{x}$, e procurar depois pelas fórmulas (A) e (B) as sommas das potencias positivas das raizes da transformada.

Exemplos.

Na equação

$$x^3-3x^2+2x-1=0$$

é evidente, por isso que a equação subsiste para quaesquer valores dados a x, que haverá entre estes coefficientes as relações

$$\mathrm{A}=\mathrm{P},\quad \mathrm{B}=\mathrm{Q},\quad \mathrm{C}=\mathrm{R},\ \dots$$

Adiante, no methodo dos coefficientes indeterminados, nos serviremos d'esta propriedade.

temos $p_1 = -3$, $p_2 = 2$, $p_3 = -1$: o que nos dá, em virtude de (A)

$$S_1 = 3,\ S_2 = 5,\ S_3 = 12;$$

e em virtude de (B) a continuação da serie, cujos termos, como d'ella se deprehende, se vão formando do producto dos tres precedentes multiplicados respectivamente por $3, -2, 1$. Começando pois desde $S_0 = 3$, teremos a serie

$$3, 3, 5, 12, 29, 68, 158, 367, 853, 1983, 4610, 10717, 24914, 57918.$$

Para obter a somma das potencias negativas d'esta mesma equação, achariamos, advertindo que os coefficientes da transformada em $\frac{1}{x}$ são $1, -3, 2,$

$$3, 2, -2, -7, -6, 7, 25, 23, -22, -88 \ldots.$$

Na equação $x^m - 1 = 0$, acha-se por estas formulas, como a pag. 166,

$$S_1 = S_2 = S_3 = \ldots\ldots S_{m-1} = 0,\ S_0 = S_m = S_{m+1} = \ldots = m.$$

2.ª Parte. Multiplicando uma pela outra as duas sommas

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \ldots\ldots\ldots,$$

$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + \ldots\ldots\ldots,$$

o producto conterá termos de duas especies: 1.° a somma de todas as potencias $\alpha + \beta$ das raizes: 2.° a somma de todos os productos, que se formam combinando a potencia α de uma raiz qualquer com a potencia β d'outra raiz. Ora como a primeira somma se designa, segundo a notação adoptada, por $S_{\alpha+\beta}$; e a segunda por $[a^\alpha b^\beta]$, teremos

$$S_{\alpha+\beta}+[a^\alpha b^\beta]=S^\alpha S^\beta,$$

d'onde se deduz, no caso das funcções duplas,

$$[a^\alpha b^\beta]=S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D)}.$$

Multiplicando entre si as tres sommas

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots\ldots,$$

$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots\ldots$$

$$S_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma \ldots\ldots$$

acha-se uma funcção symetrica, cujos termos são comprehendidos n'uma das cinco fórmas seguintes:

$$a^{\alpha+\beta+\gamma},\ a^{\alpha+\beta}b^\gamma,\ a^{\alpha+\gamma}b^\beta,\ a^{\beta+\gamma}b^\alpha,\ a^\alpha b^\beta c^\gamma;$$

logo, segundo as notações adoptadas, teremos

$$\left.\begin{array}{l} S_{\alpha+\beta+\gamma}+[a^{\alpha+\beta}b^\gamma]+[a^{\alpha+\gamma}b^\beta] \\ \quad +[a^{\beta+\gamma}b^\alpha]+[a^\alpha b^\beta c^\gamma] \end{array}\right\}=S_\alpha S_\beta S_\gamma.$$

Mas, em virtude das fórmulas (D), é

$$[a^{\alpha+\beta}b^\gamma]=S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\gamma+\beta+\gamma},$$

$$[a^{\alpha+\gamma}b^\beta]=S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$[a^{\beta+\gamma}b^{\alpha}] = S_{\beta+\gamma}\,S_{\alpha} - S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Substituindo estes valores na equação precedente, e tirando d'ella depois o valor $S_{\alpha+\beta+\gamma}$, obtem-se, para as funcções triplas,

$$[a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}] = S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma} - S_{\alpha+\beta}S_{\gamma} - S_{\alpha+\gamma}S_{\beta} - S_{\beta+\gamma}S_{\alpha} + 2\,S_{\alpha+\beta+\gamma} \dots \quad (E)$$

Por meio d'este processo muito simples podemos passar para os casos das funcções quadruplas, quintuplas, etc.

Cumpre porém advertir que estas expressões precisam ser modificadas, quando alguns dos expoentes α, β, γ, ... forem eguaes. Com effeito uma somma qualquer $[a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}]$, na qual cada termo tem n letras, compõe-se formando todos os arranjos n a n das m letras a, b, c, ... e dando respectivamente ás n letras de cada um d'elles os expoentes α, β, γ......; sendo o numero dos termos $[m\,Pn]$. Ora, suppondo que n'um termo a letra a tem o expoente α, e b o expoente β, haverá necessariamente outro termo que não differirá daquelle, senão na permutação de a em b; logo os dous termos tornar-se-hão eguaes se for $\alpha=\beta$. N'este caso a somma total dos termos differentes será ametade daquelle que é dado pelas fórmulas.

Se houver tres expoentes eguaes $\alpha=\beta=\gamma$, é claro que cada um dos termos differentes da fórmula será repetido n'ella tantas vezes quantas são os arranjos tres a tres com tres letras; logo para ter sómente a somma dos termos differentes, é preciso dividir as fórmulas geraes por 2×3.

Em geral se for p o numero dos expoentes eguaes, é necessario dividir as fórmulas por $2\times3\dots\dots\times p$.

Applicação á resolução numerica das equações.

117. Supponhamos já achados, relativamente a uma equação dada, os valores S_1, S_2, ... S_l. Quanto maior for a em relação ás outras raizes b, c, ... tanto mais S_l tenderá para tornar-se egual ao seu 1.º termo a^l, e S_{l-1} a a^{l-1}; e por conseguinte será proximamente $S_l : S_{l-1} = a$. Por tanto, *na serie* $S_1, S_2, \ldots\ldots S_l$, *o quociente da divisão de cada um dos termos pels seu antecedente, approximar-se-ha cada vez mais da raiz superior* a, *ao passo que o indice* k *for mais elevado.*

Poderiamos pelo mesmo theor obter a menor raiz (n.° 34, 2.°).

Esta proposição póde ter excepções no caso dos imaginarios. Por quanto, seja

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1};$$

e faça-se $\alpha = \lambda \cos\varphi$, $\beta = \lambda \operatorname{sen}\varphi$, hypotheses permittidas, por isso que, dando

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2, \ \operatorname{tang} t\, \varphi = \frac{\beta}{\alpha},$$

podemos d'estas equações concluir λ e o arco α em todos os casos. Temos pois

$$x = \lambda(\cos\varphi \pm \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}),$$

d'onde se tira (nota a pag. 168)

$$(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})^l = \lambda^l(\cos k\varphi \pm \operatorname{sen} k\varphi\sqrt{-1}).$$

Suppondo pois a existencia das raizes imaginarias haverá em S_l um termo $2\lambda^l \cos k\varphi$. É necessario por tanto que $\lambda = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ seja menor que a maior raiz a, para que se possa verificar o theorema precedente.

No 1.° ex.° de pag. 197 temos $S_{13} = 57918$, $S_{12} = 24914$, o quociente $\frac{57918}{24914} = 2{,}3247177$ é um valor approximado de x.

118. Appliquemos agora o calculo das funcções symetricas á indagação das equações ao quadrado das differenças.

Supponhamos que á equação $fx = 0$, cujas raizes são $a, b, c, \ldots$ corresponde á equação ao quadrado das differenças

$$Fz = z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \ldots\ldots + U = 0,$$

cujos coefficientes incognitos P, Q, R, ... U pretendemos determinar.

Temos

$$(x-a)^l = x^l - lax^{l-1} + A'a^2x^{l-2} - A''a^3x^{l-3} \ldots\ldots \pm a^l,$$

$$(x-b)^l = x^l - lbx^{l-1} + A'b^2x^{l-2} - A''b^3x^{l-3} \ldots\ldots \pm b^l,$$

$$(x-c)^l = x^l - lcx^{l-1} + \text{etc.}$$

Estas equações são em numero m; os coefficientes A', A'', ... são dados pela desenvolução dos binomios elevados á potencia l.

Os 2.^{os} membros d'estas equações sommados dão em resultado

$$mx^l - lS_1 x^{l-1} + A' S_2 x^{l-2} - A'' S_3 x^{l-3} + \ldots\ldots \pm S_l.$$

Mudando pois successivamente x em a, b, c, ... virão as sommas totaes respectivas

$$(a-b)^l + (a-c)^l \ldots\ldots = ma^l - lS_1 a^{l-1} + \ldots \pm S_l$$
$$(b-a)^l + (b-c)^l \ldots\ldots = mb^l - lS_1 b^{l-1} + \ldots \pm S_l$$
$$(c-a)^l + \text{etc.}$$

Sommemos estas últimas equações:

O 1.° membro torna-se na somma das potencias l *das differenças de todas as raizes, subtrahidas duas a duas;*

O 2.° membro torna-se em

$$mS_l - lS_1 S_{l-1} + A'S_2 S_{l-2} - A''S_3 S_{l-3} + \ldots \pm mS_l.$$

Se l for impar nada se póde deduzir d'esta fórmula, porque no 1.° membro as differenças são eguaes duas a duas com signaes contrários, e as suas potencias l destroem-se reciprocamente. O 2.° membro é formado de termos taes, que os que ficam equidistantes dos extremos tem os mesmos coefficientes e os mesmos indices para S, com signaes contrários. Assim ambos os membros se reduzem a zero, e temos $0 = 0$.

Porém se l for par, no 1.° membro as potencias das differenças $(a - b)^l$, $(b - a)^l$, etc. são eguaes duas a duas com os mesmos signaes, e podem sommar-se; no 2.° membro tambem podem sommar-se os termos equidistantes dos extremos, por serem eguaes dous a dous e terem os mesmos signaes, ficando só o termo medio, que não tem outro egual. Por tanto dividindo por dous toda a equação assim reduzida, os seus termos se simplificam, e só o termo medio do 2.° membro tem o factor $\frac{1}{2}$.

Se fizermos pois $l = 2i$, o 1.° membro se reduzirá á somma das potencias $2i$ das differenças das raizes, ou á das potencias i dos quadrados d'estas differenças, somma que representaremos por f_i. Por outra parte, designando por $2i$, A′, A″, ... os coefficientes do binomio para o expoente $2i$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} f_i = mS_{2i} - 2iS_1 S_{2i-1} + A'S_2 S_{(2i-2)} - A''S_3 S_{(2i-3)} \ldots\ldots \\ \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots\ldots(i+1)}{2.3.4\ldots\ldots 2i} \times (S_i)^2 \ldots\ldots \end{array}\right\} (N).$$

Os coefficientes $2i$, A′, A″, ... tem por valores os numeros da linha $2i$ da tabella de pag. 9; deve porém parar-se no termo medio, e tomar a sua ametade. Estes factores tem os seguintes valores, para

$i = 1 \ldots\ldots 1, \ 1$

$i = 2 \ldots\ldots 1, \ 4, \ 3$

$i = 3 \ldots\ldots 1, \ 6, \ 15, \ 10$

$i = 4 \ldots\ldots 1, \ 8, \ 28, \ 56, \ 35$

$i = 5 \ldots\ldots 1, \ 10, \ 45, \ 120, \ 210, \ 126$

$i = 6 \ldots\ldots 1, \ 12, \ 66, \ 220, \ 495, \ 792, \ 462$, etc.

D'onde se conclue

$$\begin{array}{l|l} f_1 = mS_2 - (S_1)^2 & f_4 = mS_8 - 8S_1S_7 \ldots + 35\,(S_4)^2 \\ f_2 = mS_4 - 4S_1\,S_3 + 3\,(S_2)^2 & f_5 = mS_{10} - 10S_1\,S_9 \ldots + 126(S_5)^2 \\ f_3 = mS_6 - 6S_1S_5 + 15S_2S_4 - 10\,(S_3)^2 & f_6 = mS_{12} - 12S_1S_{11} \ldots + 462(S_6)^2 \end{array}$$

Posto isto, depois de haver achado a serie S_0, S_1, $S_2 \ldots\ldots$ e fazendo $i=1$, deduziremos da equação (N) os valores de $(a-b)^2+(a-c)^2+\ldots\ldots$; e assim obteremos a somma f_1 das 1^{as} potencias das raizes de $Fz=0$. Fazendo depois $i=2$, acharemos $(a-b)^4+(a-c)^4\ldots\ldots$, ou f_2; etc. Em geral a equação (N) dará a somma f_i das potencias i das raizes da equação ao quadrado das differenças.

Finalmente as equações (A) de pag. 196 applicadas a esta equação dão os coefficientes da equação ao quadrado das differenças

$$P=-f_1\,,\ Q=-\tfrac{1}{2}(Pf_1+f_2)\,,\ R=-\tfrac{1}{3}(Qf_1+Pf_2+f_3)\ldots$$

O calculo dos f deve continuar-se até ao indice $n=\frac{1}{2}m(m-1)$ grão de $Fz=0$, e o de S até a um indice duplo.

Por exemplo na equação geral do 3.° grão

$$x^3+qx+r=0,$$

a serie S_0, $S_1\ldots\ldots$ torna-se em

$$3\,,\ 0\,,\ -2q\,,\ -3r\,,\ 2q^2,\ 5qr\,,\ -2q^3+3r^2\,,$$

que dá $\quad f_1=-6q\,,\ f_2=18\,q^2,\ f_3=-66q_3-81r^2$;

logo $\quad P=6q\,,\ Q=9q^2,\ R=27r^2+4q^3,$

são os coefficientes da equação ao quadrado das differenças para o 3.° grão. Na *Resolution numér.* de Lagrange, n.^{os} 38, 39 e nota III, se encontram as fórmulas para o 4.° e 5.° grão.

Applicação ás Equações do segundo gráo.

119. Se a e b forem as raizes desconhecidas da equação

$$x^2+px+q=0:$$

as relações sabidas entre as mesmas raizes

$$a+b=-p, \quad ab=q,$$

conduzir-nos-hiam de novo, pela eliminação de a e b, a equações do 2.° gráo, as quaes por isso, como já em outra parte fizemos ver, não nos seriam de utilidade para achar as mesmas raizes

Supponhamos porem que entre a e b há uma relação

$$z=a+mb,$$

em que m é arbitrario, e z uma incognita, que tractâmos de determinar de modo que a eliminação de a e b entre ella e a relação $a+b=-p$ nos conduza a equações do 1.° gráo.

Em virtude da symetria que ha entre as raizes das equações, além da relação $z=a+mb$, deve existir a relação $z=b+ma$; e por conseguinte o valor de z é dado tambem pela equação do 2.° gráo

$$[z-(a+mb)]\,[z-(b+ma)]=0.$$

Para que esta equação nos possa approveitar é necessario que se reduza á fórma $z^2=k$, de maneira que d'ella se deduza o valor de z por uma simples extracção de raiz quadrada. Vê-se que isto se consegue pondo $m=-1$, d'onde resulta

$$z^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=S_2-2q;$$

e como (pag. 196.) $S_2 = p^2 - 2q$, teremos finalmente

$$z = a - b = \pm \sqrt{(p^2 - 4q)},\ a + b = -p,$$

equações das quaes se deduzem as duas raizes a e b.

Applicação ás Equações do terceiro grão.

120. Supponhamos, que entre as tres raizes desconhecidas a, b, c da equação do 3.º grão

$$x^3 + px + q = 0,$$

se dá a relação

$$z = a + mb + nc, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

na qual m e n são quantidades arbitrárias. Pela permutação das letras a, b, c umas nas outras, resultam da relação (1) outras cinco, d'onde provém uma equação em z do 6.° grão. Esta equação não nos poderá pois em geral ser de utilidade; e sómente o será, se em virtude da arbitrariedade de m e n, reduzirmos a equação em z á fórma

$$z^6 + Az^3 + B = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

que se resolve á maneira das do 2.° grão (n.° 105), isto é, a uma fórma tal, que as suas seis raizes sejam eguaes a dous numeros z', z'', multiplicados respectivamente pelas tres raizes cubicas da unidade. Para isso é necessário que, designando por z', z'', as raizes cubicas dos dous valores de z^3,

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

e por 1, α, α^2, as da unidade, os seis valores que resultam da permutação das letras a, b, c, no trinomio, satisfaçam ás equações,

$$\left\{\begin{array}{l} z' = a + mb + nc \\ \alpha z' = b + mc + na \\ \alpha^2 z' = c + ma + nb \end{array}\right. \quad \left|\quad \begin{array}{r} z'' = a + nb + mc \\ \alpha^2 z'' = b + nc + ma \\ \alpha\, z'' = c + na + mb \end{array}\right\} \quad (4)$$

Vejamos se podemos determinar agora m e n de modo que estas seis equações tenham logar. Multiplicando $\alpha z'$ por α^2, e advertindo que é $\alpha^3 = 1$, vem

$$z' = \alpha^3 b + m\alpha^3 c + n\alpha^3 a = a + mb + nc.$$

Para ter logar a identidade é necessario, que sejam eguaes os coefficientes respectivos de a, b, c, isto é,

$$\alpha^3 = m,\ m\alpha^3 = n,\ n\alpha^3 = 1,$$

d'onde se tira $$m = \alpha^2,\ n = \alpha.$$

Substituindo estes valores nas seis equações (4), vê-se que ellas resultam de

$$z' = a + \alpha c + \alpha^2 b,\ z'' = a + \alpha b + \alpha^2 c \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

multiplicando estas por α, e α^2. Tomando pois $m = \alpha^2$, $n = \alpha$, o trinomio (1) terá seis valores, que elevados ao cubo, só darão os dous valores differentes z'^3 e z''^3; por serem 1 os cubos de α e α^2.

Fica pois demonstrado que os seis valores (4), pondo n'elles $m = \alpha^2$ e $n = \alpha$, são raizes da equação (2), á qual se póde dar a fórma

$$(z^3 - z'^3)(z^3 - z''^3) = z^6 - (z'^3 + z''^3)\, z^3 + z'^3 z''^3 = 0.$$

Resta agora determinar A e B, isto é,

$$\text{A} = -(z'^3 + z''^3),\ \text{B} = (z' z'')^3;$$

porque se pudermos determinar A e B em funcção dos coefficientes p e q, teremos pela equação (3) os valores de z^3, cujas raizes cubicas z' e z''

serão conhecidas. As equações (5) e a relação $a+b+c=0$, que tem logar por ser nullo o 2.° termo da equação (1), darão pois a, b, c.

Desenvolva-se o cubo de $z'=a+\alpha c+\alpha^2 b$, e, advertindo que é $\alpha^3=1$, virá

$$z'^3=S_3+6abc+3\alpha(a^2c+b^2a+c^2b)+3\alpha^2(a^2b+c^2a+b^2c).$$

Mudando n'esta expressão b em c obtem-se z''^3; sommando os dous resultados, e em consequencia de ser

$$abc=-q,\ S_1=0,\ \alpha+\alpha^2=-1,\ [a^2b]=S_1S_2-S_3,\ S_3=-3q,$$

acha-se

$$A=-2S_3+12q-3(\alpha+\alpha^2)[a^2b]=-5S_3+12q=27q.$$

Por outra parte, por ser

$$S_2=-2p,\ [ab]=p,\ \alpha+\alpha^2=-1,$$

acha-se $$z'z''=S_2+(\alpha+\alpha^2)[ab]=-3p;$$

e por consequencia o cubo

$$B=-27p^3.$$

Teremos pois

$$u=-27\left(\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)=z^3.$$

E como n'esta equação os factores de 27 são as raizes t' e t'' da equação $t^2+qt=(\frac{1}{3}p)^3$, teremos $z^3=27t$.

Eliminando a, b, c entre as equações (5) e a equação

$$a+b+c=0,$$

teremos

$$3a = z' + z'',\ 3b = \alpha z' + \alpha^2 z'',\ 3c = \alpha^2 z' + \alpha z'';$$

e como
$$z' = 3\sqrt[3]{t'},\ z'' = 3\sqrt[3]{t''},$$

tornâmos a achar os valores do n.° 110.

Applicação ás Equações do quarto grão.

121. Na equação do 4.° grão

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

não estabeleceremos, em analogia com o 2.° e 3.° grão, a relação $z = a + lb + mc + md$, da qual, feitas as permutações, resultariam 24 valores de z; mas sim a relação

$$z = a + b + m(c + d),$$

da qual só resultam seis permutações. E se n'esta fizermos $m = -1$,

virá
$$z = a + b - c - d,$$

relação, que dá seis valores eguaes dous a dous com signaes contrários. Logo a raiz z será dada por uma equação do 6.° grão da fórma

$$z^6 + Az^4 + Bz^2 + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

na qual todas as potencias são pares, não resultando dos seis valores mais de tres quadrados differentes.

Desenvolvendo o quadrado temos

$$(a + b - c - d)^2 = (a + b + c + d)^2 - 4(ac + ad + bc + bd),$$

Como na equação (1) falta o 2.° termo, será nulla a 1.ª parte do 2.° membro da equação precedente. E por isso ajunctando n'elle e subtrahindo $4\ (ab+cd)$; advertindo que é $[ab]=p$; e permutando na equação resultante b em c, e b em d: acharemos

$$(a+b-c-d)^2=-4p+4\,(ab+cd),$$

$$(a+c-b-d)^2=-4p+4\,(ac+bd),$$

$$(a+d-c-b)^2=-4p+4\,(cd+bc);$$

e são estes os valores dos tres quadrados z^2 de (6).

Podemos simplificar os calculos pondo $u=\frac{1}{4}z^2+p$,

porque então os valores de u serão

$$ab+cd,\ ac+bd,\ cd+bc.$$

Formemos a equação que tem estas tres raizes. Como temos

$$S_1=0,\ S_2=-2p,\ S_3=-3q,\ S_4=2p^2-4r,$$

$$S_5=5pq,\ S_6=-2p^3+6pr+3q^2;$$

empregando a fórmula (E) de pag. 199, e dividindo por 2 ou por 6, quando assim dever ser em consequencia da advertencia que alí fizemos, acha-se que:

1.° A somma dos binomios é $[ab]=p$;

2.° A somma dos seus productos 2 a 2 é

$$[a^2\ b\ c]=S_4-\tfrac{1}{2}S_2{}^2=-4r;$$

3,° O producto dos tres binomios é

$$abcd \times S_2 + [a^2b^2c^2] = rS_2 + \tfrac{1}{6}S_2{}^3 - \tfrac{1}{2}S_4 S_2 + \tfrac{1}{3}S_6$$
$$= -4pr + q^2.$$

Temos por tanto

$$u^3 - pu^2 - 4ru + 4pr - q^2 = 0,$$

ou, restituindo $\frac{1}{4}z^2 + p$ por u,

$$z^6 + 8pz^4 + 16z^2(p^2 - 4r) - 64q^2 = 0.$$

Depois de conhecidos os tres valores de z^2, e as suas raizes $\pm(z, z', z'')$ é necessario eliminar a, b, c, das equações

$$S_1 = a + b + c + d = 0, \quad a + c - b - d = z',$$

$$a + b - c - d = z, \quad a + d - b - c = z''.$$

Estas equações, sommadas duas a duas, dão as tres

$$a + b = \tfrac{1}{2}z, \quad a + c = \tfrac{1}{2}z', \quad a + d = z'';$$

cuja somma dá

$$a = \tfrac{1}{4}(z + z' + z'');$$

podemos por conseguinte obter tambem b, c, d em funcção de z, z', z''. Tomando agora estas quantidades com o duplo signal $\pm$, temos 8 raizes em vez de 4; e assim deve ser, porque, dependendo a equação em z de q^2 e não de q, o signal de q fica arbitrario. O producto das tres últimas equações é, por ser $-a = b + c + d$,

$$\tfrac{1}{8}zz'z'' = a^3 + a^2(b + c + d) + [abc] = -q,$$

e tem, como se vê, signal contrário ao de q. Resultam por isso, como a pag. 192, os dous systemas seguintes para q positivo, $x=\frac{1}{4}(z\pm z'\mp z'')$, $x=\frac{1}{4}(-z\pm z'\pm z'')$;

para q negativo, $x=\frac{1}{4}(z\pm z'\pm z'')$, $x=\frac{1}{4}(-z\mp z'\pm z'')$.

Applicação á Eliminação.

122. N'uma equação entre x e y, se for m a somma dos expoentes, que affectam estas incognitas no termo que a tem maior, diz-se que m é o gráo d'essa equação.

Posto isto, sejam

$$x^m+p_1x^{m-1}+\ldots\ldots+p_m=0=Z,$$

$$x^n+q_1x^{n-1}+\ldots\ldots+q_n=0=T,$$

duas equações entre x e y, uma do gráo m e outra do gráo n: sendo assim cada um dos coefficientes uma funcção de y, cujo gráo é quando muito do 1.° em p_1 e q_1, do 2.° em p_2 e q_2, etc. Supponhamos a equação $T=0$ resolvida em ordem a x, e designemos por a, b, c, ... k as suas n raizes. Esta equação equivalerá a

$$T=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-k)=0,$$

de maneira que podemos substituir ao systema das equações propostas os n systemas

$$\left.\begin{matrix}x-a=0\\ Z=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x-b=0\\ Z=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x-c=0\\ Z=0\end{matrix}\right\}\ldots\ldots$$

Se em cada um d'estes systemas tirarmos da 1.ª equação o valor de x e o substituirmos na 2.ª, obteremos a equação final em y d'esse systema: e por conseguinte, multiplicando essas equações finaes membro a membro, formaremos a do systema das propostas. Esta equação é pois

$$\left.\begin{array}{r}(a^m+p_1a^{m-1}+\ldots p_m)\,(b^m+p_1b^{m-1}+\ldots+p_m)\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots(k^m+p_1k^{m-1}+\ldots+p_m)=0\end{array}\right\}\ldots(7)$$

Ora, posto que a, b, c, ... k sejam funcções desconhecidas de y, é possivel formar esta equação, porque sendo o seu primeiro membro uma funcção symetrica e racional d'estas raizes, póde exprimir-se em funcção racional dos coefficientes de $T=0$.

Por exemplo, para eliminar x entre as equações

$$x^3y-3x+1=0\,,\ x^2(y-1)+x-2=0\,,$$

teremos, suppondo que a e b são as raizes da 2.ª,

$$(a^3y-3a+1)\,(b^3y-3b+1)=0\,,$$

ou, effectuando as multiplicações indicadas,

$$a^3b^3y^2+yS_3-3abyS_2+9ab-3S_1+1=0.$$

E como da 2.ª equação proposta se tira

$$S_1=\frac{-1}{y-1},\ ab=\frac{-2}{y-1}\,,\ S_2=\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{4}{y-1}\,,$$

estes valores, substituidos na última equação, nos conduzem facilmente á equação final do 3.° gráo em y.

123. Os calculos que exige este methodo, por muito longos, são de pouca utilidade práctica, mas podemos achar por meio d'elles, mui simplesmente, o limite do gráo da equação final.

Com effeito o termo geral da equação (7) póde ser representado por

$$p_\alpha a^{m-\alpha} p_6 b^{m-6} \ldots\ldots p_\mu k^{m-\mu} = p_\alpha p_6 \ldots p_\mu a^{m-\alpha} b^{m-6} \ldots k^{m-\mu};$$

e como a equação (7) é symetrica, deve conter todos os termos que se deduzem da precedente, mudando as quantidades $a, b, c, \ldots\ldots$ umas nas outras, isto é,

$$p_\alpha p_6 \ldots\ldots p_\mu [a^{m-\alpha} b^{m-6} \ldots k^{m-\mu} \ldots\ldots\ldots] \quad (8)$$

Avaliemos o limite do gráo d'esta funcção. Primeiramente o producto $p_\alpha p_6 \ldots\ldots p_\mu$ é quando muito do gráo $\alpha + 6 + \ldots + \mu$; em segundo logar, remontando ás fórmulas que dão os valores de $[a^\alpha b^6]$, $[a^\alpha b^6 c^\gamma]$, .. vê-se que a somma dos indices de S em cada termo é egual á somma dos expoentes que tem as letras $a, b, c, \ldots\ldots$ em cada termo d'estas funcções; e como resulta das fórmulas (A) de pag. 196 que o indice de S é precisamente egual ao indice mais elevado dos coefficientes de proposta: vê-se, que $[a^{m-\alpha} b^{m-6} \ldots\ldots k^{m-\mu}]$ é quando muito do gráo

$$m - \alpha + m - 6 + \ldots\ldots m - \mu = mn - (\alpha + 6 + \ldots\ldots + \mu);$$

logo a funcção (8), e por conseguinte a equação final, é quando muito do gráo mn. Assim:

O gráo da equação final, que resulta da eliminação d'uma incognita entre duas equações d'um gráo qualquer a duas incognitas, não póde exceder o producto dos gráos das equações propostas.

Ve-ja sobre a extensão d'este theorema uma *Memoria* de Poisson, no n.° XI. do *Journal Polytechnique.*

V. FRACÇÕES CONTINUAS.

Geração e propriedades.

124. Para achar o valor approximado de uma quantidade x, que não póde exprimir-se por um numero inteiro, procure-se o maior inteiro y contido n'essa quantidade, e seja x' uma nova quantidade > 1, tal que dê

$$x = y + \frac{1}{x'}.$$

Represente-se depois por y' o maior inteiro contido em x', e tome-se

$$x' = y' + \frac{1}{x''}.$$

Proseguindo por este theor, e representando por y'', y''', ... os maiores inteiros contidos em x'', x''', ..., sendo todas estas quantidades >0, obteremos as equações (A), da qual resultará, por meio de substituições, o valor de x debaixo da fórma (B), que se chama *fracção continua*.

$$(A)\left\{\begin{array}{l} x = y + \dfrac{1}{x'}, \\ x' = y' + \dfrac{1}{x''}, \\ x'' = y'' + \dfrac{1}{x'''}, \\ \text{etc.} \end{array}\right. \qquad (B)\left\{ x = y + \cfrac{1}{y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''' + \cfrac{1}{y^{\text{IV}} + \text{etc.}}}}}\right.$$

Vê-se pois que: *FRACÇÃO CONTINUA é uma expressão composta de um numero inteiro, que póde ser nullo, mais de uma fracção cujo nu-*

merador é a unidade e cujo denominador é um numero inteiro, augmentado de uma fracção cujo numerador é a unidade e cujo denominador é um numero inteiro, augmentado de uma fracção ..... e assim por diante.

Os inteiros y, y', y'', ... são os termos da *fracção continua*, a qual, para abbreviar, escreveremos de maneira seguinte

$$x=y\,,\,y'\,,\,y''\,,\,y'''\,,\,\ldots\ldots$$

125. *Para passar d'este valor de* **x** *para outro expresso n'uma fracção ordinaria, procederemos como no exemplo seguinte*

$$x=2\,,\,1\,,\,3\,,\,2\,,\,4=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}\ldots\ldots}}}$$

Reduzindo á mesma denominação o divisor final $2+\frac{1}{4}$, temos $\frac{9}{4}$. A unidade dividida por $\frac{9}{4}$ dá $\frac{4}{9}$, e a fracção torna-se em

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{9}}}.$$

Continuando a operar da mesma maneira, reduz-se o divisor final $3+\frac{4}{9}$ a $\frac{31}{9}$ e vem $1:\frac{31}{9}=\frac{9}{31}$; tornando-se assim a fracção em

$$x=2+\cfrac{1}{1+\frac{9}{31}}=2+1:\tfrac{40}{31}=2+\tfrac{31}{40}=\tfrac{111}{40}.$$

O andamento do cálculo é exactamente o mesmo que no n.º 30 da Arith. Nos exemplos seguintes, onde a primeira linha encerra os termos da fracção contínua, practica-se d'esta maneira:

Debaixo do último termo escreve-se a unidade, e procedendo sempre da direita para a esquerda, multiplica-se cada um dos termos pelo numero escripto por baixo, e somma-se com o que fica á direita d'este último; a somma assenta-se depois na casa á esquerda. O último numero obtido, dividido pelo que o precede, é o valor da fracção.

$$x = \;\; 2,\; 1,\; 3,\; 2,\; 4 \qquad\Big\|\qquad x = \;\; 3,\; 2,\; 1,\; 1,\; 3,\; 2,\; 4$$
$$111,\; 40,\; 31,\; 9,\; 4,\; 1 \qquad\Big\|\qquad 617,\; 182,\; 71,\; 40,\; 31,\; 9,\; 4,\; 1$$

Temos pois no 1.º exemplo $x = \frac{111}{40}$, e no 2.º $x = \frac{617}{182}$.

126. Se a fracção for contínua ao infinito, parar-se-ha n'um dos termos, desprezando todos os seguintes, e obter-se-ha então sómente um valor approximado de x. Se desprezarmos x' nas equações (A), tomando $x = y$, x torna-se *menor* do que devia ser; se desprezarmos x'', x' torna-se *menor* doque devia ser, e por consequencia x *maior;* se desprezarmos x''', x'' torna-se *menor*, x$'$ *maior*, e x *menor;* e assim por diante. Em geral:

O valor da fracção contínua é maior ou menor que x, *confórme parâmos com ella n'um termo da ordem par, ou n'um da ordem impar.*

Se pararmos com a fracção successivamente no 1.º termo y, no 2.º y', no 3.º y''....., os resultados serão pois alternadamente $<x$ e $>x$, e x ficará assim comprehendido entre dous resultados consecutivos, aos quaes se dá o nome de fracções *convergentes ou reduzidas.*

Representando por

$$\frac{a}{a'},\; \frac{b}{b'},\; \frac{c}{c'},\; \frac{d}{d'} \cdots\; \frac{m}{m'},\; \frac{n}{n'},\; \frac{p}{p'}, \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (C)$$

as convergentes nas quaes se toma consecutivamente por último termo,

$$y,\; y',\; y'',\; y''',\; \ldots\ldots y^{i-2},\; y^{i-1},\; y^{i}:$$

teremos

$$\frac{a}{a'}=\frac{y}{1},\ \frac{b}{b'}=\frac{yy'+1}{y'},\ \frac{c}{c'}=\frac{yy'y''+y''+y}{y'y''+1}=\frac{by''+a}{b'y''+a'}.$$

Para obter a convergente seguinte $\frac{d}{d'}$, bastará em $\frac{c}{c'}$ mudar y'' em $y''+\frac{1}{y'''}$; e $x=y,\, y',\, y''$, se tornará então em

$$x=y,\, y',\, y'',\, y'''.$$

Teremos assim

$$d=by''+a+\frac{b}{y'''}=\frac{cy'''+b}{y'''},$$

$$d'=\frac{c'y'''+b'}{y'''};$$

e por conseguinte

$$\frac{d}{d'}=\frac{cy'''+b}{c'y'''+b'}.$$

Comparando o valor das duas convergentes successivas, vê-se, que:

O numerador de uma convergente deduz-se, multiplicando os numeradores das duas precedentes, respectivamente, por 1 *e pelo termo final, e sommando depois os productos; o denominador deduz-se por uma lei analoga.*

Esta lei é geral para todas as convergentes (C), por isso que para passar d'uma para a seguinte se emprega um cálculo similhante, que só differe nos accentos. Será por tanto em geral

$$p=ny^{i}+m,\ p'=n'y^{i}+m', \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D)}$$

$$\frac{p}{p'}=\frac{ny^{i}+m}{n'y^{i}+m'}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}.$$

Formadas pois as duas primeiras convergentes podem, por ésta fórmula, obter-se seguidamente todas as outras. Assim

$$x=2\,,\,1\,,\,3,\;2,\;4,\;\text{dá}\;\frac{2}{1},\frac{3}{1},\;\frac{11}{4},\;\frac{25}{9},\;\frac{111}{40},$$

fracções que são alternadamente <e> x, sendo $\frac{111}{40}$ o valor exacto de x. Este processo offerece um novo meio de obter este valor.

127. Eliminando y' entre as equações (D), resulta

$$pn'-p'n=-(nm'-n'm)\,,$$

d'onde se conclue, que:

A differença dos productos encruzados dos termos de duas convergentes consecutivas é constantemente o mesmo com signaes contrarios.

Ora como esta differença é 1 para as duas 1.^{as}

$$\frac{a}{a'}=\frac{y}{1}\,,\;\frac{b}{b'}=\frac{yy'+1}{y'}\,,$$

segue-se, que em geral, será

$$pn'-p'n=\pm1\,,\;\frac{p}{p'}-\frac{n}{n'}=\pm\frac{1}{p'n'}\,\ldots\ldots\ldots\,(\text{F}),$$

devendo tomar-se o signal $+$, quando y_i e $\frac{p}{p'}$ são da ordem par, e então é $\frac{p}{p'}>\frac{n}{n'}$; e o signal $-$ no caso contrário (*).

(*) As differenças entre as convergentes successivas são

$$\frac{b}{b'}-\frac{a}{a'}=\frac{1}{a'b'},\frac{c}{c'}-\frac{b}{b'}=-\frac{1}{b'c'},\ldots\,\frac{p}{p'}-\frac{n}{n'},=\pm\frac{1}{p'n'}\,\ldots\ldots$$

e por isso a somma de todas estas equações reduz-se a

$$\frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}+\frac{1}{a'b'}+\frac{1}{b'c'}+\ldots\,\pm\frac{1}{p'n'}$$

128. Das equações precedentes deduzem-se as seguintes consequencias:

1.° Como os divisores communs de p e p' deveriam na 1.ª das equa-(F) dividir tambem a unidade, vê-se que p e p' são primos entre si, bem como p e n, p' e n'. Logo, *as convergentes são irreduziveis.*

2.° Se na equação (E) substituirmos por y^i o valor total z da fracção continua, tomada desde o termo y^i até ao último $z = y^i, y^{i+1}, y^{i+2}, \ldots,$ virá manifestamente em vez de uma convergente, o valor exacto de x, a saber:

$$x = \frac{nz + m}{n'z + m'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

A este valor (G) dá-se o nome de *fracção completa.*

3.° Para obter os erros δ' e δ de cada uma das convergentes $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, subtrahi-las-hemos de x, e virá

$$\delta' = \frac{\pm z}{m'(n'z + m')}, \quad \delta = \frac{\mp 1}{n'(n'z + m')} \ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

Estas differenças apparecem com signaes contrarios, por isso que o valor de x se acha entre as duas convergentes. Como a 2.ª é menor do que a primeira, por ser $m' < n'$ e $z > 1$, x fica mais proximo de $\frac{n}{n'}$, do que de $\frac{m}{m'}$. Logo *as convergentes successivas vão-se approximando, cada vez mais, do valor de* x, *ora por defeito, ora por excesso. E d'ahi lhe proveio a denominação.*

4.° Como (H) são os erros δ' e δ de duas convergentes consecutivas $\frac{m}{m'}$, e $\frac{n}{n'}$; e por ser $z > 1$: será

Por este estilo se obtem a desenvolução do valor exacto de x quando $\frac{p}{p'}$ for a última convergente; e uma expressão do valor approximado de x quando a fracção se continúa indefinidamente. No nosso ex.

$$\frac{111}{40} = x = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{36} - \frac{1}{360}.$$

..

$$\frac{1}{n'(n'z+n')} < \frac{1}{n'(n'+m')};$$

e

$$\mp\delta = \mp\left(x - \frac{n}{n'}\right) < \frac{1}{n'(n'+m')} \ldots\ldots\ldots \text{(K)}$$

Logo, *o erro que se commette parando n'uma convergente* $\frac{\text{n}}{\text{n}'}$ *é menor que a unidade dividida pelo producto do denominador* n′ *da mesma convergente, multiplicado pela somma* n′ + m′ *d'este mesmo denominador e do denominador da fracção antecedente.*

No ex.° de cima temos as convergentes successivas $\frac{11}{4}$ e $\frac{25}{9}$; e se pararmos na última, o erro não chegará a $\frac{1}{9(9+4)}, = \frac{1}{117}$.

Se desprezarmos m', com o que se augmenta o valor de (K), teremos

$$\delta < \frac{1}{n'^2},$$

e por conseguinte, *qualquer convergente dá um valor de* x *approximado, com um erro menor do que a unidade dividida pelo quadrado do seu denominador.*

No mesmo ex.°, a convergente $\frac{25}{9}$ não chega a ter de erro $\frac{1}{81}$.

129. Sejam

$$\frac{h}{h'}, \frac{k}{k'}, \frac{l}{l'}, \ldots\ldots$$

fracções quaesquer crescentes: a differença entre as extremas será maior do que a que existe entre uma d'ellas e a intermedia.

Supponhamos mais que h, h', l, l' satisfazem á condição

$$lh' - hl' = 1;$$

teremos

$$\frac{l}{l'}-\frac{h}{h'}=\frac{1}{l'h'}>\frac{kh'-k'h}{k'h'} \text{ e} >\frac{lk'-kl'}{k'l'}.$$

Como estes numeradores são inteiros e positivos o seu menor valor é a unidade. D'onde resulta,

$$l'h'<k'h' \text{ e } <k'l';$$

ou, supprimindo os factores communs,

$$k'>l' \text{ e} > h';$$

e por conseguinte k' é o maior dos tres denominadores. Do mesmo modo invertendo as tres fracções, o que dá os termos decrescentes $\frac{h'}{h}, \frac{k'}{k}, \frac{l'}{l}$, vê-se que é

$$k>l \text{ e} > h.$$

Temos pois que a fracção intermedia é mais complicada do que as duas extremas.

Portanto, como x fica entre $\frac{m}{m'}$, e $\frac{n}{n'}$, sería necessario para que a fracção $\frac{k}{k'}$ fosse mais proxima de x do que qualquer das duas convergentes, que ella caisse entre estas, e fosse por conseguinte mais composta. Logo *qualquer das convergentes é mais proxima de* x *que outra qualquer fracção com termos mais simples.*

Componhamos com as convergentes $\frac{m}{m'}$ e $\frac{n}{n'}$ as duas fracções

$$\frac{h}{h'}=\frac{m+(t-1)n}{m'+(t-1)n'},\ \frac{l}{l'}=\frac{m+tn}{m'+tn'},$$

designando por t os valores $1, 2, 3, \ldots\ldots$ até y, que é o inteiro contido na convergente. Teremos pela substituição successiva dos valores de t

$$\frac{m}{m'},\ \frac{m+n}{m'+n'},\ \frac{m+2n}{m'+2n'},\ldots\ldots,\ \frac{m+y'n}{m'+y'n'}=\frac{p}{p'}\ \ldots\ldots\ (L)$$

Porém, qualquer que seja o inteiro t, é

$$\frac{l}{l'}-\frac{h}{h'}=\frac{\pm 1}{h'l'}:$$

logo as fracções (L) são irreduziveis (1.°); approximão-se do valor de x mais do que outra qualquer menos composta; e, porque as suas differenças consecutivas tem o mesmo signal, estas fracções crescem desde a 1.ª até á última, sendo todas $< x$, se as extremas forem impares; no caso contrário, decrescem sendo todas $> x$; finalmente o erro δ de uma d'ellas $\frac{l}{l'}$ é $< \frac{1}{h'l'}$, por isso que x fica entre as duas fracções $\frac{l'}{l'}$ e $\frac{h}{h'}$.

Podemos por conseguinte inserir entre as *convergentes principaes* (C) y^{i-1} fracções, que gozem das mesmas propriedades. Estas *convergentes intermedias* repartem-se em duas series: umas, que inseridas entre as principaes de ordem impar são ascendentes; outras que, ficando entre as principaes de ordem par, são descendentes para x. Formam-se sommando termo por termo, y' vezes successivas, as convergentes $\frac{m}{m'}$ e $\frac{n}{n'}$.

No exemplo do n.° 125 temos ..... $x=2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4$

Convergentes principaes ...., $\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{11}{4},\ \frac{25}{9},\ \frac{111}{40}$.

Das duas primeiras $\frac{2}{1}$ e $\frac{3}{1}$ deduzem-se as duas intermedias $\frac{5}{2}$ e $\frac{8}{3}$; a 3.ª coincidiria com a 3.ª convergente principal $\frac{11}{4}$. Das duas seguintes $\frac{11}{4}$ e $\frac{25}{9}$ resultariam $\frac{36}{13}$, $\frac{61}{22}$, $\frac{86}{31}$, $\frac{111}{40}$. Combinando agora a 2.ª com a 3.ª e a 4.ª com a 5.ª, obteriamos outra serie a qual não seria limitada. As series são

$$\left(\frac{2}{1}\right),\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \left(\frac{11}{4}\right),\ \frac{36}{13},\ \frac{61}{22},\ \frac{86}{31},\ < x = \left(\frac{111}{40}\right)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right),\ \frac{14}{5},\ \left(\frac{25}{9}\right),\ \frac{136}{49},\ \frac{247}{89},\ \frac{358}{129},\ \frac{469}{169} > x.$$

Podemos junctar a estas series de fracções $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$, das quaes a primeira sendo sempre mais pequena, e a segunda sempre maior do que qualquer quantidade, satisfazem ás mesmas condições que as convergentes.

Applicação ás Equações determinadas do 1.º gráo.

130. Para reduzir a fracção contínua o valor de x na equação

$$Ax = B,$$

devemos, em conformidade do que dissemos no n.º 124, extrahir o inteiro y contido em $\frac{B}{A}$, pondo

$$x = \frac{B}{A} = y + \frac{R}{A} = y + \frac{1}{x'},$$

ou designando por y o quociente e por R o resto da divisão de B por A. Depois

$$x' = \frac{A}{R} = y' + \frac{R'}{R} = y' + \frac{1}{x''},$$

$$x'' = \frac{R}{R'} = y'' + \frac{R''}{R'} = y'' + \frac{1}{x'''},$$

$$x''' = \text{etc.}$$

Logo $$x = y + \cfrac{1}{y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''' \text{ etc.}}}} \quad = y, y', y'', y''', \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como se vê n'esta operação, os termos da fracção contínua são os quecientes successivos que se obtém pelo cálculo do divisor commum entre A e B. Esta fracção é sempre finita.

Para a equação

$$2645x = 9752$$

temos

$$9752 \left| \frac{2645}{3} \right| \frac{1817}{1} \left| \frac{838}{2} \right| \frac{161}{5} \left| \frac{23}{7} \right., \; x = \frac{424}{115} = 3\,,\,1\,,\,2\,,\,5\,,\,7.$$

Por meio das fórmulas (E) e (L) obteremos as seguintes convergentes principaes intermedias, a saber;

$$\left(\frac{0}{1}\right), \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \left(\frac{3}{1}\right), \frac{7}{2}, \left(\frac{11}{3}\right), \frac{70}{19}, \frac{129}{35}, \frac{188}{51}, \ldots\ldots < x = \frac{424}{115},$$

$$\left(\frac{0}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \frac{15}{4}, \frac{26}{7}, \frac{37}{10}, \frac{48}{13}, \left(\frac{59}{16}\right), \frac{483}{131}, \frac{907}{246}, \ldots < x.$$

A fracção $\frac{27}{7}$ tem um valor mais proximo de x que outra qualquer mais simples; o erro é menor que $\frac{1}{49}$.

Do mesmo modo se acha para $x = \frac{409}{119} = 3\,,\,2\,,\,3\,,\,2\,,\,7$,

$$\left(\frac{3}{1}\right), \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \left(\frac{24}{7}\right), \frac{79}{23}, \frac{134}{39}, \ldots < x; \left(\frac{7}{2}\right), \frac{31}{9}, \left(\frac{55}{16}\right), \frac{464}{135} \ldots > x.$$

Estamos pois em estado de resolver a seguinte questão: *Dada uma fracção, achar outra mais simples, cujo valor se approxime d'ella mais do que outra qualquer fracção menos composta que ellas.*

131. Façamos algumas applicações d'esta doutrina.

I. *A razão da circumferencia para o diametro* é representada, como já achámos, por

$$\pi = 3,1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\ldots\ldots;$$

e a fracção contínua equivalente á parte decimal dá (veja-se *Compl. d'Algebra de* Lacroix, p. 289. 6.ª edição)

$$\pi = 3\,,\,7\,,\,15\,,\,1\,,\,292\,,\,1\,,\,1\,,\,1\,,\,2\,,\,1\,,\,3\,,\,1\,,\,14\ldots\ldots$$

d'onde se deduzem as convergentes principaes e intermedias, das quaes fazem parte as razões determinadas por Archimedes e Adriano Metius:

$$\left(\frac{3}{1}\right), \frac{25}{8}, \frac{47}{15}, \frac{69}{22}, \frac{91}{29}, \frac{133}{36}, \frac{135}{43}, \frac{157}{50}, \left(\frac{333}{106}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots < \pi$$

$$\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \left(\frac{22}{7}\right), \frac{355}{113}, \left(\frac{104348}{32215}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots > \pi$$

II. *O anno solar tropico*, ou o tempo que o sol gasta em voltar ao mesmo equinocio é de 365^d, 2422181, (Veja-se *Astron. pratique* pag. 88). Dando ao anno civil sómente 365 dias, o equinocio, ao fim de quatro annos, voltaria quasi um dia mais tarde, de sorte que para o ajustar com a verdadeira data, sería necessario dar 366 dias ao 4.° anno, que se chama *bissexto;* e foi isto, que Julio Cesar ordenou no seu *Calendario Juliano*, suppondo o anno de $365^d \frac{1}{4}$. Esta supposição porém não é ainda exacta, porque produz um erro contrário, fazendo anticipar o anno civil ao anno solar. Este erro foi em parte remediado no *Calendario Gregoriano*, no qual se manda supprimir tres bissextos seculares sobre quatro, i. é, intercalar 97 dias em 400 annos. A fim de apreciar este systema, tractemos pela nossa theoria a fracção $\frac{2422181}{1000000}$, da qual, convertida em fracção contínua, se deduz

$$x = 0, 4, 7, 1, 3, 1, 1, 2.$$

e as convergentes $\ldots\ldots\ldots \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{39}{161}, \frac{70}{289} \ldots\ldots$

Tomemos, por ex.°, a fracção $\frac{8}{33}$, i é, supponhamos o anno solar de $365^d \frac{8}{33}$. Para ajustar o anno civil com este periodo sería necessario intercalar 8 dias em 33 annos, dando de 4 em 4 annos mais um dia ao anno civil, collocando porém o 8.° bissexto no fim de cinco annos. Começar-se-hia depois um novo periodo de 33 annos. Era este o systema dos antigos Persas.

Cumpre notar, que não se achando a fracção $\frac{97}{400}$ entre as convergentes poder-se-hia ter adoptado outra intercalação mais approximada do que a adoptada no Calendario Gregoriano. O erro porém que d'ahi resulta é de pequena importancia. (Veja-se a *Uranographie*).

III. O mez lunar synodico é de $29^d,5305887$; o mez solar é de $30^d,4368535$; a razão x d'estes numeros convertida em fracção continua, dá as convergentes

$$\left(\frac{1}{1}\right),\left(\frac{34}{43}\right),\frac{101}{98},\frac{168}{163},\ldots<x;\left(\frac{33}{32}\right),\left(\frac{67}{65}\right),\frac{235}{228}\ldots\ldots>x.$$

Se considerarmos por ex.° $\frac{235}{228}$ como valor de x, é o mesmo que suppor que 235 mezes lunares correspondem a 228, ou 19 vezes 12 mezes solares; é pois necessario em 19 annos intercalar mais 7 mezes lunares, para que o sol e a lua venham a achar-se nas mesmas posições relativas. Posto isto, se formassemos 19 taboas indicando as datas das phases lunares, estas taboas annunciariam a sua volta durante todos os periodos de 19 annos, tomando estas taboas na sua ordem de successão. Foi isto o que practicou Methon entre os Gregos, cujo calendario era luni-solar, e que chamavam este periodo *cyclo-solar*, e *aureo numero* aquelle que designava qual dos 19 calendarios se devia empregar em cada um dos annos.

Applicações ás Equações indeterminadas do primeiro grão.

132. Já vimos (*Alg. El.* n.° 126) que basta conhecer uma solução $x=\alpha$, $y=\beta$, em numeros inteiros, da equação

$$ax+by=c,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

para concluir qualquer outra. Os valores de x e y

$$x=\alpha+bt,\quad y=\beta-at,$$

fórmam equidifferenças, cuja razão é b para x, e $-a$ para y.

A theoria das fracções contínuas offerece-nos um meio muito simples de achar os numeros α e β, como passâmos a ver.

Resolva-se $\frac{a}{b}$ em convergentes, e seja $\frac{p}{p'}$ a penultima, que precede a fracção proposta. Viu-se ((F) n.° 127) que

$$ap' - bp = \pm 1\text{; d'onde } ap'c - bpc = \pm c, \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

devendo empregar-se os signaes $+$ ou $-$, conforme a fracção continua, tomada na sua totalidade, *tiver um numero par ou impar de termos.*

As equações (b) mostram que (a) fica satisfeita, tomando, no caso de ter logar

o signal superior,................. $\alpha = \quad p'c$, $\quad 6 = -pc$;

o signal inferior,.................. $\alpha = -p'c$, $\quad 6 = \quad pc$.

Logo para obter em numeros inteiros a solução da equação (a): *resolva-se* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *em fracção continua; procure-se a convergente* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}'}$ *que precede aquella fracção; forme-se com estes dados a equação* $ap' - pb = \pm 1$; *depois multiplique-se esta por* c; *e compare-se o resultado termo a termo com a proposta* (a).

Seja por ex.° a equação $\quad 105x - 43y = 17.$

O methodo do divisor commum dá

105	43	19	5	4	1
	2	2	3	1	4
22	9	4	1	1	

$$\frac{105}{43} = 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4;\ \frac{22}{9} = 2,\ 2,\ 3,\ 1.$$

A última fracção obtem-se supprimindo o termo 4, e empregando o processo exposto na *Arith.* n.° 30.

Das duas fracções $\frac{105}{43}$, $\frac{22}{9}$, deduz-se, attendendo a que a fracção continua tem 5 termos,

$$105 \,.\, 9 - 43 \,.\, 12 = -1:$$

multiplicando ambos os membros d'esta equação por -17, vem

$$43 \,.\, 22 \,.\, 17 - 105 \,.\, 9 \,.\, 17 = 17;$$

e comparando com a proposta acha-se $\alpha = -9 \,.\, 17$, $6 = 22 \,.\, 17$, e por conseguinte

$$x = -153 + 43t;\ y = -374 + 105t.$$

Podem tambem servir de exercicio d'esta applicação os exemplos citados a pag. 202 da P. I.

O problema de Chronologia, em que se pede o anno x, cujo *cyclo solar é* c, *e o aureo numero é* n, reduz-se a procurar um inteiro x, que dividido por 28 e 19 dê os restos $c-9$ e $n-1$. O processo do n.° 129 da *Alg. El.* dá o seguinte valor

$$x = 56\,(c-n) + c + 75 + 532t.$$

É pois ao cabo de 532 annos que os mesmos numeros c e n voltam ambos periodicamente: esta duração tem o nome de *periodo dyonisiano* (Veja-se a *Uranographie*).

Querendo além disto, que o numero x tenha de mais a *indicção* i, isto é, que x dividido por 15 dê o resto $i-3$, teremos o *periodo juliano* de 7980 annos imaginado por Scaligero; e acharemos

$$x = 4845c + 4200n - 1064i + 3267 + 7980t.$$

Applicação ás equações do segundo gráo.

133. Quando ou todos, ou os últimos termos de uma fracção contínua voltam successivamente na mesma ordem, *a fracção contínua* diz-se *periodica*. É *periodica simples* quando o periodo começa logo no primeiro termo da fracção; é *periodica mixta*, quando assim não começa.

A respeito das fracções contínuas periodicas há dous theoremas importantes, que estão ligados com as equações do 2.° gráo, e que passâmos a demonstrar.

134. THEOREMA I. *Toda a fracção periodica contínua é uma das raizes de uma equação do 2.° gráo, de coefficientes racionaes.*

1.° Supponhamos que a fracção contínua é *simples*, e que os seus termos tem a seguinte disposição.

$$a,\ b,\ \ldots\ldots\ n,\ a,\ b,\ \ldots\ldots\ n,\ a,\ b\ \ldots\ldots\ n\ \ldots\ldots$$

Designando por x o valor d'esta fracção contínua, vamos demonstrar que será

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\cdot}{\cdot \; + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{x}}}}$$

isto é; que sendo x_{i-1} e x_i duas reduzidas, das quaes a segunda tem um periodo mais que a primeira, ou

$$x_i = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\cdot}{\cdot \; + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{x_{i-1}}}}}$$

a differença $x_i - x_{i-1}$ tenderá indefidamente para o limite 0, quando x_i tender para o limite x.

Para isso, seja $\frac{r}{r'}$ o valor de uma reduzida, composta de um certo numero de termos; e $\frac{p}{p'}$ e $\frac{q}{q'}$ as duas convergentes, que immediatamente a precedem: será

$$\frac{r}{r'} = \frac{qn + p}{q'n + p'}.$$

Ora se representarmos por k o valor de um periodo, obteremos o valor da reduzida $\frac{v}{v'}$, que contém um periodo mais, mudando n em $n + \frac{1}{k}$ na expressão de $\frac{r}{r'}$, o que dará

$$\frac{v}{v'}=\frac{q\left(n+\frac{1}{k}\right)+p}{q'\left(n+\frac{1}{k}\right)+p'}=\frac{rk+q}{r'k+q'};$$

e por conseguinte

$$\frac{v}{v'}-\frac{r}{r'}=\frac{qr'-rq'}{r'(r'k+q')}=\frac{\pm 1}{r'(r'k+q')}:$$

d'onde se conclue, que estas duas reduzidas $\frac{r}{r'}$ e $\frac{v}{v'}$ tendem a tornar-se eguaes, á medida que o numero dos periodos que as compõe tende a tornar-se maior que qualquer grandeza assignavel. Assim se designarmos uma d'ellas por x_i, o a outra por x_{i-1}, teremos $x_i=x_{i-1}+\delta$, sendo δ uma variavel, que vae diminuindo até zero. Poderemos por tanto escrever

$$x_i=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\cdot+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x_i-\delta}}}}.$$

Mas, como podemos approximar x_i quanto quizermos do valor x da fracção continua proposta, tomando um numero tam grande como quizermos; e como então δ vae continuamente decrescendo para o seu limite zero: vê-se (*Alg. El.* n.° 120), que é verdadeira n'este caso a equação (a).

Posto isto, e designando por $\frac{n}{n'}$ a reduzida que dá o valor do periodo; e por $\frac{m}{m'}$ a convergente que immediatamente a precede; teremos (n.° 128)

$$x=\frac{nx+m}{n'x+m'},$$

ou

$$(b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'x^2+(m'-n)x-m=0;$$

por onde se vê, que o valor de uma fracção contínua periodica *simples* é raiz de uma equação do 2.° grão de coefficientes commensuraveis.

Como n'esta equação há uma permanencia e uma variação, uma das raizes é positiva e a outra é negativa (n.° 76); e por isso deve a última rejeitar-se, e a primeira será o valor da fracção contínua total. Por ex.°, na fracção contínua periodica *simples*

$$x=3,1,2,3,1,2,3,1,2,\ldots\ldots\ldots$$

formando as reduzidas successivas, vem

$$\frac{1}{0},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{11}{3};$$

e por conseguinte será

$$\frac{11x+4}{3x+1}=x,\text{ ou }x=\frac{5+\sqrt{37}}{3}.$$

2.° Supponhamos agora, que a fracção contínua é periodica *mixta* e que seus termos tem a seguinte disposição:

$$p,q,\ldots\ldots\ldots v,a,b,\ldots\ldots n,a,b\ldots\ldots n,\ldots\ldots$$

Seja y o valor total da fracção contínua; e x o da sua parte periodica, teremos

$$y = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{v + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Designando pois por $\frac{v}{v'}$ a reduzida, que dá o valor da parte não periodica, e por $\frac{u}{u'}$ a convergente, que a precede, será

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{vx + u}{v'x + u'};$$

mas, segundo se acaba de mostrar (1.°), é

$$x = \frac{nx + m}{n'x + m'}:$$

logo, eliminando x entre estas duas últimas equações, virá uma equação do 2.° gráo em y, com coefficientes racionaes; o que completa a demonstração d'este 1.° theorema.

Se ambas as raízes da equação forem positivas, para distinguir qual dos valores de y é aquelle, que dá o valor da fracção contínua periodica mixta, calcular-se-ha primeiro a raiz positiva da equação (b), e será este o valor, que deve substituir-se por x na equação (c).

135. THEOREMA II. Reciprocamente, *as raizes incommensuraveis de uma equação do 2.° gráo com coefficientes racionaes, são expressas por fracções contínuas periodicas.*

1.° Consideremos em primeiro logar a equação do 2.° gráo da fórma

$$(d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ax^2+bx-c=0,$$

cujas raizes tem signaes contrários, e cujos coefficientes a e c são numeros inteiros positivos, e b um inteiro positivo ou negativo.

Limitemos-nos, por hora, á raiz positiva d'esta equação, cuja expressão é

$$(e) \ldots\ldots\ldots \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{n}}{2a},$$

pondo $n=b^2+4ac$.

Para desenvolver esta raiz em fracção contínua, procurar-se-ha em primeiro logar o maior inteiro n'ella contido, e representando-o por α, far-se-há

$$x=\alpha+\frac{1}{x'};$$

e depois tractar-se-ha de achar o inteiro contido em x'. Ora sendo $\alpha+\dfrac{1}{x'}$ uma das raizes da equação (d), a substituição d'esta quantidade, em logar de x, deverá satisfazer á mesma equação, dando

$$a\left(\alpha+\frac{1}{x'}\right)^2+\ b\left(\alpha+\frac{1}{x'}\right)-c=0,$$

donde se tira

$$(f) \ldots\ldots\ldots \quad (a\alpha^2+b\alpha-c)\,x'^2+(2a\alpha+b)\,x'+a=0.$$

Se substituissemos as duas raizes d'esta equação na relação $x=\alpha+\dfrac{1}{x'}$, obteriamos as duas raizes da proposta (d); mas como estas raizes tem signaes contrarios, é forçoso que sejam tambem contrarios os signaes dos valores de x', raizes da equação (f).

Desembaraçando em (f) x'^2 do seu coefficiente, o último termo da transformada $\dfrac{a}{a\alpha^2+b\alpha-c}$ será por conseguinte negativo; e como a é positivo, vê-se que deve ser $a\alpha^2+b\alpha-c$ um inteiro negativo.

Façamos pois

$$a\alpha^2+b\alpha-c=-a',\quad 2a\alpha+b=-b',$$

sendo a' um inteiro positivo, e b' um inteiro positivo ou negativo. A equação (f) tornar-se-ha

$$(g)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a'x'^2+b'x'-a=0,$$

cuja raiz positiva é

$$x'=\frac{-b'+\sqrt{b'^2+4aa'}}{2a'}=\frac{-b'+\sqrt{n}}{2a'},$$

por ser

$$b'^2+4aa'=(2a\alpha+b)^2-4a(a\alpha^2+b\alpha-c)=b^2+4ac=n.$$

Designemos por α' o maior inteiro contido no valor de x', e façamos

$$x'=\alpha'+\frac{1}{x''}.$$

Para determinar x'', substituamos este valor de x' em (g), o que nos dará uma nova equação, que facilmente se reduzirá á fórma

$$a''x''^2+b''x''-a'=0.$$

Esta equação terá tambem as suas duas raizes de signaes contrarios; e os seus coefficientes a'' e b'' serão ligados pela relação

$$b''^2+4a'a''=b'^2+4aa'=n,$$

que se obtém, como a analoga entre os coefficientes de (d).

Proseguindo por este theor, obteremos successivamente uma serie d'equações da fórma

$$ax^2+bx-c=0,$$

$$a'x'^2+b'x'-a=0,$$

$$a''x''^2+b'x''-a'=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_ix_i^2+b_ix_i-a_{i-1}=0,$$

cujos coefficientes são numeros inteiros ligados pelas relações

$$(h)\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} b^2+4ac=n, \\ b'^2+4aa'=n, \\ b''^2+4a'a''=n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_i^2+4a_{i-1}a_i=n; \end{array}\right.$$

e a raiz positiva x da equação (d) terá por expressão

$$x=\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''',\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

sendo α, α', α'', ... os maiores inteiros contidos nos valores de x, x', x'', ...

Para fazer ver que esta fracção contínua é periodica, basta provar que uma das transformadas é identica com uma das precedentes, por isso que então as duas equações terão as mesmas raizes.

Ora das relações (h) resulta que os coefficientes a, a', a'', ... são menores que $\frac{n}{4}$; e que os valores absolutos (positivos ou negativos) de b, b', b'', ... são menores que $\sqrt{n}$: por conseguinte, designando por h o maior inteiro contido em $\frac{n}{4}$, e por k o valor inteiro de $\sqrt{n}$, é facil mostrar que, passado, quando muito, um numero d'equações egual a $2hk$, a transformada seguinte terá necessariamente os seus dous primeiros coefficientes identicos com os dous primeiros de uma das equações precedentes. Com effeito, escrevendo cada um dos $2k$ numeros ± 1, ± 2, ± 3, ... $\pm k$ sucessivamente á direita dos h numeros $1, 2, 3, 4$...... h, vê-se que não é possivel formar com os dous coefficientes mais do que $2hk$ combinações differentes. Posto isto, é forçoso que os terceiros termos das duas equações sejam tambem eguaes; por que, sendo estas equações da fórma

$$a_i x_i^2 + b_i x_i - a_{i-1} = 0,$$

$$a_{i+p} x^2_{i+p} + b_{i+p} x_{i+p} - a_{i+p-1} = 0;$$

e sendo, por hypothese, $a_i = a_{i+p}$, $b_i = b_{i+p}$: das relações

$$n = b^2_i + 4a_{i-1} a_i = b^2_{i+p} + 4a_{i+p-1}\, a_{i+p},$$

deduz-se

$$a_{i-1} = a_{i+p-1}.$$

Logo as duas equações são identicas; e por conseguite a raiz positiva da equação (d) terá por expressão uma fracção contínua periodica.

Mudando x em $-x$ na proposta (d), vê-se que a sua raiz negativa, que corresponde á raiz positiva da transformada, goza da mesma propriedade.

2.° Consideremos agora uma equação do 2.° gráo em que as suas raizes são ambas positivas. Estas raizes devem ser deseguaes, por isso que as suppuzemos incommensuraveis; e, para maior precisão, distinguiremos os dous casos, em que a differença d'estas raizes é maior ou menor que a unidade.

a) No 1.° caso, as raizes da equação $ax^2 - bx + c = 0$ não podem ficar ambas comprehendidas entre os mesmos inteiros consecutivos. Chamando α e $\alpha + 1$ os dous inteiros consecutivos, entre os quaes fica comprehendida a raiz maior, a mais pequena será $<\alpha$; e por consequencia, se substituirmos x por $\alpha + \frac{1}{x'}$ na equação $ax^2 - bx + c = 0$, resultará uma nova equação em x', que terá uma das raizes positivas e maior que a unidade, e a outra negativa. Estas raizes, de signaes contrarios, serão expressas por fracções contínuas periodicas; e substituindo successivamente por x' cada um d'estes valores na expressão $\alpha + \frac{1}{x'}$ obteremos fracções contínuas tambem periodicas, que serão a expressão dos valores das raizes da proposta.

b) No 2.° caso, os valores das raizes da equação $ax^2 - bx + c = 0$, podem ficar ambos comprehendidos entre os inteiros consecutivos α e $\alpha + 1$; n'este caso a transformada em x' tem ambas as raizes positivas e maiores que a unidade Se as raizes d'esta transformada ainda ficarem comprehendidas entre dous inteiros consecutivos α' e $\alpha' + 1$, substituindo $\alpha' + \frac{1}{x''}$ por x', obteremos uma transformada em x'' cujas raizes serão ainda positivas. Continuando porém com o cálculo das transformadas successivas, ha-de forçosamente chegar-se a uma equação, cujas raizes não ficarão ambas comprehendidas entre os mesmos numeros consecutivos; aliás as raizes da proposta $ax^2 - bx + c = 0$ seriam eguaes, porque teriam por expressão a mesma fracção contínua. As raizes da transformada seguinte tendo raizes de signaes contrarios, serão expressas por fracções contínuas periodicas; e por conseguinte as raizes da proposta serão tambem expressas em fracções da mesma especie.

Se as raizes da proposta forem ambas negativas, mudando x em $-x$, virá uma transformada com ambas as raizes positivas, que é o caso que acabâmos de tractar.

Fica assim demonstrado com toda a generalidade o theorema proposto, que é devido a *Lagrange;* a demonstração porém que deu este illustre geometra é menos simples, que a precedente que *Mr. Gerono* publicou nos — *Nouvelles annales de Mathématiques. I* —

/3 VI) IV. METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS.

Decomposição das Fracções racionaes.

136. Se for dada uma equação da fórma

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots=0,$$

na qual os coefficientes A, B, C...., são constantes, e x uma quantidade variavel, susceptivel de passar por todos os valores, será

$$A=0, B=0, C=0, \text{ etc.}$$

qualquer que seja o numero de termos da equação proposta.

Com effeito, devendo esta equação ter logar, qualquer que seja o valor de x: quando for $x=0$, será $A=0$, e

$$Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots=0.,$$

Dividindo esta última equação por x, virá

$$B+Cx+Dx^2+\ldots\ldots=0;$$

d'onde se deduz $B=0$, empregando o mesmo raciocinio pelo qual concluimos que era $A=0$. Continuando a raciocinar do mesmo modo, acharemos successivamente

$$C=0, D=0, \text{ etc.}$$

Posto isto, supponhamos a existencia de duas funcções F e φ de x

identicas, isto é, de duas funcções, que apenas differem entre si pela maneira, por que se acham expressas algebricamente. Se por artificios analyticos conseguirmos desonvolver F e φ em ordem a x, de maneira que a equação $F = \varphi$ se torne em

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

deduziremos d'esta

$$(a - A) + (b - B)x + (c - C)x^2 + (d - D)x^3 + \ldots\ldots = 0.$$

e pelo theorema demonstrado,

$$a = A, \ b = B, \ c = C, \ d = D, \ldots\ldots$$

Sendo pois dada uma funcção F de x, a qual presumimos que póde ter um desnevolvimento designado φ, contendo coefficientes constantes, porém desconhecidos, A, B, C, ... podemos achar estes facilmente pelo processo seguinte.

1.° Escreveremos a identidade $F = \varphi$, designando F a funcção proposta, e φ o desenvolvimento presumido debaixo de uma fórma conveniente, e contendo os coefficientes desconhecidos A, B, C, ...

2.° Por cálculos appropriados transformaremos a equação $F = \varphi$ em outra ordenada segundo as potencias de x.

3.° Igualaremos entre si os termos affectos das mesmas potencias pe x.

4.° Finalmente procederemos á eliminação entre estas equações a fim de deduzir d'ellas os valores desconhecidos das constantes A, B, C,....

Cumpre ainda advertir, que, se da eliminação indicada se deduzirem resultados absurdos, devemos concluir, que a funcção F não é susceptivel do desenvolvimente presumido φ.

Passemos a applicar este principio a differentes exemplos.

137. Sendo N o numerador, e D o denominador de uma fracção racional, é sempre possivel abaixar por meio da divisão o grão do polynomio N em ordem a x até se tornar inferior ao de D; e conside-

rando por isso a fracção $\frac{N}{D}$ já reduzida a este estado, tractemos de decompol-a n'outras das quaes ella seja a somma.

Seja $D = P \times Q$, designando P e Q polynomios primos entre si dos gráos p e q, e supponhamos

$$\frac{N}{D} = \frac{Ax^{q-1} + Bx^{q-2} + \ldots . + L}{Q} + \frac{A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots . + L'}{P}.$$

A fim de reduzir ao mesmo denominador $D = P \times Q$, multiplicaremos $Ax^{q-1} + Bx^{q-2} + \ldots \ldots$ por P, e $A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots .$ por Q; e obteremos assim productos do gráo $p + q - 1$, os quaes formarão um *polynomio completo* de um gráo inferior ao de D em uma unidade. Depois, como N é, quando muito, do mesmo gráo $p + q - 1$, comparando cada um dos termos do numerador N com os do mesmo gráo do numerador do 2.° membro, deduzir-se-hão $p + q$ equações entre os coefficientes desconhecidos $A, A', B, B', \ldots \ldots$ cujo numero é evidentemente $p + q$, e como as incognitas $A, B, \ldots \ldots L, A', B', \ldots \ldots L'$ não sobem do 1.° gráo, facilmente se acharão os seus valores. Vê-se pois que não só a decomposição presumida é legitima, mas tambem que o cálculo nos fornece meios para obter os coefficientes desconhecidos.

Quando P e Q forem susceptiveis de se decomporem em factores primos, substituiremos cada uma das fracções do 2.° membro da equação de cima, por outras formadas por estes mesmos principios.

A regra para decompor uma fracção racional proposta reduz-se pois á seguinte:

Busquem-se os factores, primos entre si, do denominador da fracção proposta; equale-se esta a uma serie d'outras fracções que tenham os mesmos factores por denominadores, e cujos numeradores sejam respectivamente de um gráo inferior em uma unidade. Feito isto, e reduzindo todas as fracções ao mesmo denominador D, *egualem-se entre si os coefficientes das mesmas potencias de* x, *e deduzam-se d'estas equações os coefficientes desconhecidos.*

Egualando D a zero a fim de o resolver em factores simples, podem dar-se os dous casos, ou de serem alguns eguaes, ou de serem todos os factores deseguaes. Examinemos separadamente estes dous casos.

1.° Caso. Se for

$$D=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,\ldots\ldots$$

poremos

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots,$$

e tractaremos de determinar A, B, C, ... pelo processo, que acaba de expôr-se.

Seja, por ex.°,

$$D=(x-a)(x-b),\ \text{e}\ N=kx+l,$$

teremos
$$\frac{kx+l}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b},$$

d'onde
$$kx+l=A\,(x-b)+B\,(x-a)$$

$$=(A+B)\,x-Ab-Ba.$$

Por tanto
$$k=A+B,\ -l=Ab+Ba;$$

e finalmente
$$A=-\frac{ka+l}{b-a},\ B=\frac{kb+l}{b-a}.$$

Applicando estas fórmulas á fracção $\dfrac{2-4x}{x^2-x-2}$, e advertindo, que a e b são as raizes 2 e -1 do seu denominador egualado a zero, e que é $k=-4$, e $l=2$, obteremos

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2}=\frac{-2}{x+1}-\frac{2}{x-2}.$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a(a+x)}+\frac{1}{2a(a-x)}.$$

Pondo

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x},$$

acharemos, applicando a regra,

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{2a^2(a+x)}+\frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

Se D tiver factores binomios imaginarios, ainda se póde applicar o mesmo methodo; é porém preferivel em muitos casos decompôr D em factores trinomios x^2+px+q, e a proposta em fracções da fórma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Assim para a fracção

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1},$$

acha-se
$$C=\frac{3}{2},\ B=A=-\frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo para

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x-1}$$

acha-se
$$-A=B=C=\frac{1}{3}.$$

2.° Caso. Se algum dos factores de D tiver a fórma $(x-a)^i$, o termo correspondente terá a fórma $\frac{Ax^{i-1}+Bx^{i-2}+\dots}{(x-a)}$, e esta expressão tambem susceptivel de decomposição, poderá transformar-se na somma equivalente

$$\frac{A}{(x-a)^i}+\frac{B}{(x-a)^{i-1}}+\frac{C}{(x-a)^{i-2}}+\dots+\frac{L}{x-a}.$$

Esta equivalencia verifica-se, reduzindo ao mesmo denominador a segunda expressão, e vendo que apparece um numerador com a fórma da primeira e com egual numero de constantes desconhecidas.

Assim pondo

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1},$$

vem

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{4(x-1)}.$$

Do mesmo modo se achará

$$\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+x-1}.$$

Ainda que este processo é applicavel ao caso de serem imaginarios os factores eguaes do denominador, é com tudo preferivel reunil-os em factores reaes do 2.° gráo, debaixo da fórma $(x^2+px+q)^i$, sendo então $Ax^{2i-1}+Bx^{2i-2}+\dots$ o numerador das fracções correspondentes; ou antes podemos tomar a somma equivalente

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^i}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{i-1}}+\ldots+\frac{Kx+L}{x^2+px+q}.$$

Por ex.°, fazendo

$$\frac{1}{(1+x)\,x^2\,(x^2+2)\,(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}+\frac{Hx+I}{x^2+1},$$

acharemos

$$A=\frac{1}{12},\ B=-C=\frac{1}{2},\ D=-E=\frac{1}{6},\ F=-G=\frac{1}{2},\ H=-I=\frac{1}{4}.$$

138. O uso frequente, que se faz da decomposição das fracções racionaes, torna muito util o methodo seguinte, por meio do qual se abreviam as operações.

1.° Caso. *Factores deseguaes.* Sejam $D=(x-a)\ S$, designando por S um producto de factores todos differentes de $(x-a)$. A derivada d'esta expressão é [n.° 31 (*)]

$$D'=S+(x-a)\ S'.$$

Posto isto, façamos

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{P}{S},\ \text{ou}\ N=AS+P\,(x-a);$$

e vejâmos a maneira de determinar a constante A, sendo desconhecido o polynomio P.

Se fizermos $x=a$, e designarmos por n e d' as quantidades em que se tornam N e D' em virtude d'esta hypothese, teremos $d'=S$, $n=AS$, e por conseguinte

$$A=\frac{n}{S}=\frac{n}{d'}$$

Logo, *para obter o numerador* A *da fracção componente de que* x — a *é denominador*, *tome-se a derivada* D′ *de* D, *e faça-se* x = a *em* $\frac{N}{D'}$ (*).

Vê-se do mesmo modo, que sendo $D=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ se obterão os numeradores de $\frac{B}{x-b}$, $\frac{C}{x-c}$, ... fazendo successivamente $x=b$, $x=c$, ... em $\frac{N}{D'}$.

Por ex.°

$$\frac{-5x^2-5x+6}{x^4-2x^3-x^2+2x} \text{ dá } \frac{N}{D'}=\frac{-5x^2-5x+6}{4x^3-6x^2-2x+2};$$

e como temos $D=(x-1)(x+1)(x-2)x$, se fizermos na última expressão $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=0$, virão os resultados 2, — 1, — 4 e 3, e a proposta tornar-se-ha em

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x}.$$

(*) Se o factor de D tiver a fórma $px+q$ em vez de $x-a$, a fracção componente é

$$\frac{A}{px+q}=\frac{1}{p}\,\frac{A}{x+\frac{q}{p}}=\frac{A'}{x+\frac{q}{p}}, \text{ fazendo } A=A'p.$$

Devemos pois fazer $x=-\frac{q}{p}$ em $\frac{N}{D'}$; mas para obter o numerador A da fracção é necessario multiplicar o resultado pelo coefficiente p de x. Por ex.° para

$$\frac{6+23x}{2-x-6x^2}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{3x+2}$$

deve substituir-se $x=\frac{1}{2}$ e $x=-\frac{2}{3}$ em $\frac{N}{D'}=\frac{6+23x}{-1-12x}$, e multiplicar depois os resultados por -2 e $+3$; d'onde resulta $A=5$, $B=-4$.

Para a fracção $\frac{1}{z^6-1}$ temos $\frac{N}{D'}=\frac{1}{6z^5}$; mas (pag. 172)

$$z^6-1=(z+1)(z-1)(z^2-z+1)(z^2+z+1).$$

A respeito dos dous primeiros factores faz-se $z=\pm 1$ e resulta $\pm\frac{1}{6}$. O terceiro factor dá $z=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$, d'onde se tira

$$\frac{N}{D'}=\frac{2^5}{6(1\pm\sqrt{-3})^5}=\frac{32}{6(16\mp 16\sqrt{-3})}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{12},$$

sendo facil achar depois as duas fracções componentes, as quaes sommadas se reduzem á fracção unica $\frac{1}{6}\frac{z-2}{z^2-z+1}$. Finalmente o 4.° factor de D mostra, que basta mudar z em $-z$ n'este último resultado. Logo

$$\frac{1}{z^6-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}+\frac{z-2}{z^2-z+1}-\frac{z+2}{z^2+z+1}\right).$$

2.° Caso. *Factores eguaes.* Seja $D=(x-a)^i$. Mudando x em $a+h$ em N e D, e continuando a designar pelas letras pequenas as expressões designadas pelas letras grandes correspondentes, quando nellas se faz $x=a$: aquelles polynomios N e D tornar-se-hão (n.° 31)

$$\text{N em } n+n'h+\tfrac{1}{2}n''h^2+\tfrac{1}{6}n'''h^3+\ldots\ldots,\ \text{D em } h^i.$$

Dividindo o 1.° desinvolvimento pelo 2.°, e pondo $x-a$ por h, vem

$$\frac{N}{D}=\frac{n}{(x-a)^i}+\frac{n'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\frac{1}{2}n''}{(x-a)^{i-2}}+\ldots\ldots$$

Por este modo *a proposta decompõe-se em geral em* i *fracções, cujos numeradores são as expressões em que se tornam* N, N′, $\frac{1}{2}$ N″. . . . *quando* *nellas se faz* $x=a$; *e cujos denominadores são* $(x-a)^l$, $(x-a)^{l-1}$, etc.

Assim em $\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}$, como as derivadas successivas do numerador são $6x-7$ e 6, fazendo $x=1$, obtem-se 2, -1 e 3 para numeradores das fracções componentes, isto é,

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$$

Se o denominador tiver outros factores além de $(x-a)$, isto é, se for $D=(x-a)^l S$, sendo S uma quantidade conhecida não divisivel por $(x-a)$, poremos

$$\frac{N}{D}=\frac{F}{(x-a)^l}+\frac{P}{S}, \text{ ou } N=P(x-a)^l+FS \ldots\ldots (1)$$

Mudemos x em $a+y$ nesta equação identica, e desinvolvamol-a (n.° 31). Virá

$$n+n'y+\tfrac{1}{2}n''y^2+\ldots=\begin{cases} y^l(p+p'y+\tfrac{1}{2}p''y^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ +(f+f'y+\tfrac{1}{2}f''y^2+\ldots)(s+s'y+\tfrac{1}{2}s''y^2+\ldots), \end{cases}$$

e comparando de ambas as partes os coefficientes das mesmas potencias de y (n.° 136), acharemos

$$\left.\begin{array}{l} n=fs,\ n'=f's+fs',\ n''=f''s+2f's'+fs'',\ldots\ldots \\ n^{(l)}=sf^{(l)}+ls'f^{(l-1)}+\tfrac{1}{2}l(l-1)s''f^{(l-2)}+\ldots+fs^{(l)} \end{array}\right\}(2)$$

Por meio d'estas equações acharemos f, f', f'', ... e por conseguinte o desinvolvimento da 1.ª parte

$$\frac{F}{(x-a)^i}=\frac{f}{(x-a)^i}+\frac{f'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\frac{1}{2}f''}{(x-a)^{i-2}}+\ldots\ldots$$

precisamente como se a fracção proposta contivesse no denominador sómente $(x-a)^i$.

Esta equação dá

$$F=f+f'\times(x-a)+\tfrac{1}{2}f''\times(x-a)^2+\ldots\ldots\ldots\ (3);$$

e pela equação (1) teremos

$$P=\frac{N-FS}{(x-a)^i}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Seja, por ex.º,

$$\frac{N}{D}=\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}.$$

Fazendo $x=1$ em $S=x^2+x$, em S', em S'', ... e em N, em N', em N'', ...; teremos

$$s=2\,,\ s'=3\,,\ s''=2\,,\ n=4\,,\ n'=4\,,\ n''=10\,,$$

e por conseguinte

$$4=2f\,,\ 4=2f'+3f\,,\ 10=2f''+6f'+2f;$$

e finalmente

$f=2,\ f'=-1,\ \frac{1}{2}f''=3,\ F=2-(x-1)+3\ (x-1)^2=3x^2-7x+6.$

O producto FS, subtrahido de N, dá

$$2x^4-9x^3+15x^2-11x+3,$$

expressão, que dividida por $(x-1)^3$, dá $P=2x-3$.

Resta agora unicamente decompôr pelo 1.º processo $\frac{P}{S}=\frac{2x-3}{x^2+x}$. Para isso, pondo $x=-1$ e $x=0$ em $\frac{P}{S'}=\frac{2x-3}{2x+1}$, obteremos os numeradores 5 e -3, e será finalmente

$$\frac{N}{D}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x}.$$

Cumpre advertir, que neste ex.º seria mais breve começar por determinar as duas últimas fracções, fazendo $x=-1$ e $x=0$ em $\frac{N}{D'}$, e achariamos

$$\frac{N}{D}=\frac{F}{(x-1)^3}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Transpondo estas duas últimas fracções, e reduzindo, acha-se

$$\frac{F}{(x-1)^3}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3},$$

a qual, por ter eguaes os factores do denominador, facilmente se decompõe.

Do mesmo modo em

$$\frac{N}{D}=\frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6},$$

como $D=(x+1)^2(x-2)(x-3)$, faremos $x=2$ e $x=3$ em $\frac{N}{D'}$, e obteremos depois as fracções $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$, as quaes, subtrahidas da proposta, dão $\frac{F}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$. Esta se decomporá pelo processo acima indicado, e como $f=-1$, e $f'=1$, teremos por fim de tudo

$$\frac{N}{D}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}.$$

Sôbre a convergencia das Series.

139. Tendo de fazer applicação do methodo dos coefficientes indeterminados á desinvolução das funcções em series, é necessario dar previamente as regras necessarias para saber quando estas series podem representar o valor approximado das mesmas funcções, e que numero de termos das mesmas series é necessario approveitar para se obter um certo grão de approximação.

Chamam-se series *convergentes* as que satisfazem á condição de convergir a somma dos seus termos cada vez mais para um limite, á medida que se toma um maior numero de termos: este limite chama-se tambem *somma* da serie. As series, que não satisfazem a esta condição, chamam-se *divergentes* por contraposição. Sómente nos é permittido tomar a somma dos n primeiros termos de uma serie pelo valor approximado da sua totalidade, quando esta serie for convergente. É facil conhecer, se os termos decrescem, quando se dá *o termo geral*, que é a expressão analytica do termo da ordem n: podem porém os termos decrescer sem que por isso se deva concluir, que a serie é convergente. Por exemplo, cahiriamos em erro suppondo convergente a serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\ldots\ldots$$

na qual o termo geral $\frac{1}{n}$ indica, que os termos convergem para zero, á medida que n cresce.

Para tornar o erro evidente, basta advertir, que, se a contar do termo n, sommarmos os n termos seguintes, teremos uma somma $>\frac{1}{2}$; com effeito esta somma é

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\ldots\ldots+\frac{1}{2n},$$

e, como os termos são decrescentes, será evidentemente $>\frac{1}{2n}\times n>\frac{1}{2}$.

Ora, se distribuirmos os termos da serie em grupos pela fórma seguinte

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots+\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}:$$

todas as sommas entre parenthesis serão, pelo que acabâmos de ver, $>\frac{1}{2}$; será pois a serie composta de infinitas partes todas $>\frac{1}{2}$, e por conseguinte a somma dos seus termos não terá limite.

140. Supponhamos convergente a serie

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\text{etc.};$$

e designemos por S_n a somma dos seus n primeiros termos, sendo assim

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots u_{n-1},$$

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots u_{n-1} + u_n,$$

$$S_{n+2} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots u_{n-1} + u_n + u_{n+1},$$

etc.

A definição da convergencia exige, que para um valor de n sufficientemente grande, as sommas S_n, S_{n+1}, S_{n+2} se approximem, quanto se quizer, de um certo limite S; d'onde se segue que as differenças entre estas sommas se poderão tornar tam pequenas, como se quizer, escolhendo u sufficientemente grande. Ora as differenças entre S_n e cada uma das sommas seguintes são respectivamente

$$S_{n+1} - S_n = u_n, \; S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$

$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \text{ etc.};$$

logo, limitando-nos por ora a attender sómente á differença $S_{n+1} - S_n$, podemos concluir que, se tomarmos n sufficientemente grande, todos os termos de u_n por diante deverão ser tam pequenos como se quizer.

Esta condição é simples e de facil verificação, mas já vimos no n.° antecedente que não é bastante; e como, o que acaba de dizer-se da differença $S_{n+1} - S_n$, se applica da mesma maneira ás differenças $S_{n+2} - S_n$, $S_{n+3} - S_n$, etc., podemos concluir como condições egualmente necessarias, que as sommas

$$u_n + u_{n+1}, \; u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \text{ etc.}$$

consideradas cada uma per si, e com qualquer numero de termos, se tornem tam pequenas como se quizer, para valores de n muito consideraveis. Com estas novas condições é certa a convergencia: por que então escolhendo n sufficientemente grande, differirão as sommas S_n, S_{n+1}, etc umas das outras tam pouco como se quizer, e por conseguinte ha um limite, de que ellas se approximarão quanto se quizer.

Appliquemos estes principios á serie

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots\ldots$$

cujo termo geral é ax^n. Tomando primeiramente só este termo, e sommando-o depois consecutivamente com os dous, tres, quatro, . . . seguintes, obteremos as expressões

$$ax^n, \quad ax^n + ax^{n+1} = ax^n\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right),$$

$$ax^n + ax^{n+1} + ax^{n+2} = ax^n\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right), \text{ etc.}$$

Onde se vê, que, sendo $x<1$, as sommas se tornam cada vez mais pequenas e tendem para zero, á medida que n augmenta; logo a serie satisfaz ás condições de convergencia quando x é <1.

Estes mesmos principios fazem ver, que a serie, de que tractámos no n.° precedente,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\frac{1}{n},$$

não satisfaz ás condições de convergencia, a pezar de que o termo geral $\frac{1}{n}$ vae decrescendo, ao passo que n augmenta.

141. Em geral é assaz difficultoso verificar todas as condições de convergencia: e por isso daremos em seguimento alguns theoremas, que abrangem casos bastante numerosos, em que se manifesta a convergencia.

THEOREMA I. *Dada a serie*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1},$$

na qual todos os termos, de certa ordem em diante, são todos positivos, e em que os valores de u *muito grandes fazem convergir a razão*

$$F = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

para um limite L*: será a serie convergente, ou divergente, conforme este limite* L *for* $<$ *ou* >1,

Supponhamos primeiro $L<1$, e tomemos um numero qualquer l intermedio entre L e 1, sendo $L<l<1$. Por isso que F converge para L á medida que n augmenta, segue-se, que, passada uma ordem n sufficientemente grande, se approximará o factor F tanto quanto se quizer, de L, e se tornará por conseguinte $<l$. Logo será $\frac{u_{n+1}}{u_n}<l$, ou

$$u_{n+1}<lu_n,\ u_{n+2}<lu_{n+1},\ u_{n+3}<lu_{n+2},\ \text{etc.}$$

e, *a fortiori*,

$$u_{n+1}<lu_n,\ u_{n+2}<l^2u_n,\ u_{n+3}<l^3u_n,\ \text{etc.}:$$

assim, os termos u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, etc. são respectivamente menores, que os da progressão geometrica $u_n\,(l+l^2+l^3+\text{etc.})$. Ora, por ser $l<1$, a somma d'esta progressão decresce indefinidamente com u_n; logo com mais forte razão decresce indefinidamente $U-S_n$, e por isso é convergente a serie U.

Por um raciocinio similhante se prova, que sendo $L>1$, serão os termos u_{n+1}, u_{n+2}, ... maiores que os de uma progressão geometrica $u_n\,(l+l^2+l^3+\text{etc.})$, cuja razão l sendo >1, conduz a termos tam grandes como se quizer; e por conseguinte, para valores muito grandes de n, não poderão os termos da serie U differir de zero tam pouco como se quizer. Vê-se pois que neste caso é impossivel a convergencia da serie.

Applicando esta regra á serie do binomio $(x+a)^m$, segue-se do valor ((h) pag. 15), e da relação ((d) pag. 6), que é

$$F=\frac{m-n}{n+1}.\frac{x}{a}.$$

Ora quanto mais n cresce, tanto mais se aproxima F do limite $\frac{x}{a}$, o qual elle toca quando é $n=\infty$. Donde concluiremos, que a fórmula do binomio será convergente ou divergente, conforme for x<ou> a.

As duas transformações seguintes são adaptadas para augmentar a convergencia d'esta serie

$$x+a=\frac{x}{1-\frac{a}{x+a}}=\frac{2a}{1-\frac{x-a}{x+a}};$$

$$(x+a)^m=x^m\left(1-\frac{a}{x+a}\right)^{-m}=2^m a^m\left(1-\frac{x-a}{x+a}\right)^{-m};$$

$$(x+a)^m=x^m\left\{1+m\left(\frac{a}{x+a}\right)+m\frac{m+1}{2}\left(\frac{a}{x+a}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$=2^m a^m\left\{1+m\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+m\frac{m+1}{2}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

Veja-se para a lei d'estes coefficientes a pag. 14.

Na serie

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

o termo geral $\frac{x^n}{1.2\ldots.n}$ dá $F=\frac{x}{n+1}$, cujo limite é zero quando $n=\infty$. Por conseguinte a serie é convergente.

142. THEOREMA II. *Na serie*

$$U=u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots\ v_n+\text{etc.},$$

cujos termos são todos positivos, de certa ordem por diante: se, para valores de n *muito grandes, a raiz*

$$F=\sqrt[n]{u_n}$$

convergir para um limite L, *a serie será convergente ou divergente, conforme for* $L<$ *ou* >1.

Se os termos, de certa ordem por diante, em logar de positivos fossem negativos, o theorema teria logar a respeito de $-U$.

Supponhamos primeiro $L<1$, e tomemos tambem uma quantidade l comprehendida entre L e 1. Como, na conformidade do enunciado, se póde tomar n bastante grande, para que a raiz F se approxime de L quanto se quizer, e se torne por conseguinte $<l^n$, será

$$u_n<l^n,\ u_{n+1}<l^{n+1},\ u_{n+2}<l^{n+2},\ \text{etc.}$$

Logo os termos da serie $v_n+v_{n+1}+\text{etc.}$ serão menores que os da progressão geometrica $l^n+l^{n+1}+l^{n+2}+\text{etc.}$; e como esta progressão, por ser $l<1$, decresce indefinidamente, com mais razão decrescerá $U-S_n$; e por tanto a serie U será convergente.

Supponde agora $L>1$, provar-se-ha por um raciocinio analogo ao precedente, attendendo a que é $l<L$, que a serie é divergente.

Cumpre advertir, que os dous theoremas, que se acabam de demonstrar, não admittem incerteza sôbre a convergencia da serie U, senão quando for $L=1$. Neste caso a questão é muitas vezes difficil de resolver. (*Nota* 3.ª).

143. THEOREMA III. *Se uma serie da forma*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + v_n$$

tiver termos positivos e negativos, e se mudando estes para positivos, a nova serie for convergente, tambem a serie U será convergente.

Designemos por L a somma dos termos positivos da serie U, a contar de um termo qualquer v_n, e por l a dos termos negativos, sendo assim

$$L - l = v_n + v_{n+1} + \text{etc.},$$

Ora, visto que, tornando positivos todos os termos de serie U, esta é convergente, podemos tomar n bastante grande para que $L + l$ seja uma quantidade tam pequena como se quizer; logo, e com mais forte razão, o mesmo se dirá de $L - l$; e por conseguinte a serie U será convergente.

Assim na serie

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} - \text{etc.},$$

achâmos, tornando todos os termos positivos,

$$U_n = \frac{x^{2n-1}}{2.3..(2n-1)},\ U_{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{2.3..2n(2n+1)},\ F = \frac{x^2}{2n(2n+1)};$$

e como $n = \infty$ dá $F = 0$, a serie é convergente. Além d'isto, pondo $F < 1$, acha-se $x^2 < 4n^2 + 2n$; e por conseguinte tomando $4n^2 > x^2$, ou $n > \frac{1}{2}x$, vê-se que os termos decrescem da ordem $\frac{1}{2}x$ em diante.

144. THEOREMA IV. *Toda a serie da forma*

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \text{etc.} \dots\dots \pm v_n \mp \text{etc.}$$

cujos termos tem alternadamente os signaes + e —, é convergente, quando estes termos decrescem continuamente para o limite zero.

Consideremos um termo qualquer d'esta serie, cujos signaes são alternados, e designemol-o por $\pm a$, e os seguintes por $\mp b \pm c \pm$ etc. Se tomassemos a somma dos termos que precedem a pelo valor approximado da serie inteira, o erro δ seria

$$\delta = \pm a \mp b \pm c + \text{etc.},$$

expressão que se póde escrever debaixo das duas fórmas seguintes:

$$\delta = \pm[(a-b)+(c-d)+\text{etc.}],$$

$$\delta = \pm[a-(b-c)-(d-e)-\text{etc.}].$$

Como, por hypothese, os termos $a, b, c, \ldots$ vão decrescendo, todas as quantidades entre parenthesis são positivas: logo, pela 1.ª fórmula, vê-se que δ tem o mesmo signal que $\pm a$; e pela 2.ª, que o valor numerico de δ é $<a$. Ora, tomando um termo a assaz distante, será tam pequeno como se quizer; e por conseguinte o mesmo diremos, *a fortiori*, do erro δ. Logo a serie dada é convergente.

Assim a serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

é convergente, posto que o não seja quando todos os termos são positivos.

145. Quando uma serie é convergente, e sommâmos um certo numero dos seus termos para obter um valor approximado da serie inteira, convém muito obter um limite do erro. Quando a serie está no caso que considerámos no Theorema IV, acabâmos de ver, que o erro é sempre menor do que o 1.º termo dos que se desprezam. A única regra geral porém que, para os outros casos, se póde dar para obter este limite, consiste em comparar a serie assim como se fez nos Theoremas I e II, com uma progressão geometrica decrescente; e quando se tiver reconhecido, que, parando n'um certo termo, diminuem os termos seguintes da serie mais rapidamente que os correspondentes da progressão geometrica, poderemos concluir, que o erro é inferior á somma dos termos da progres-

são. Por ex.° na serie

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\ldots\frac{x^n}{1.2..n},$$

no qual o termo em x^{n+1} se fórma multiplicando o precedente por x e dividindo-o por $n+1$: se tomarmos n tal, que seja $x<n+1$, teremos a certeza de que os termos da serie

$$\frac{x^n}{1.2\ldots.n}+\frac{x^{n+1}}{1.2.\ldots\ldots n(n+1)}+\text{etc.}$$

decrescerão mais rapidamente, que os de uma progressão geometrica, cujo 1.° termo fosse o mesmo que o d'esta serie, e a razão $\frac{x}{n+1}$. Logo se na serie proposta tomarmos por último o termo em x^{n-1}, o erro δ será menor que a somma d'esta progressão; e acharemos

$$\delta<\frac{(n+1)x^n}{1.2..n(n+1-x)}.$$

Series Recurrentes.

146. Toda a fracção racional, ordenada segundo as potencias crescentes de x, cujo numerador N se reduziu a ser de um gráo menos elevado que o do denominador D, e á qual podemos sempre dar a fórma

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\frac{a+bx+cx^2+\ldots.hx^{i-1}}{1+\alpha x+\beta x^2+\ldots.\theta x^i},$$

póde desenvolver-se por meio da divisão n'uma serie infinita são. Por ex., na serie

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots;$$

por isso que, do processo da divisão, não podem resultar para o quociente potencias negativas nem fraccionarias de x.

Em logar porém de determinarmos os coefficientes A, B, C, ... pela divisão, podemos usar com preferencia do methodo dos coefficientes indeterminados que põe em evidencia a lei d'estes coefficientes.

Consideremos primeiro a fracção

$$\frac{a}{1+\alpha x};$$

e ponhamos

$$\frac{a}{1+\alpha x} = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

Multiplicando ambos os membros por $1+\alpha x$, vem

$$a = \begin{array}{l|l|l|l} A + B & x + C & x^2 + D & x^3 + \ldots\ldots \\ \quad + A\alpha & \quad + B\alpha & \quad + C\alpha & + \ldots\ldots \end{array}$$

d'onde resultam, comparando separadamente os termos em que entram potencias eguaes de x, as equações

$$a = A,\ B + A\alpha = 0,\ C + B\alpha = 0,\ \text{etc.}$$

que dão

$$A = a,\ B = -\alpha A,\ C = -\alpha B,\ \text{etc.}$$

Logo, se multiplicarmos um coefficiente qualquer por $-\alpha$ obteremos o seguinte; ou, por outras palavras, cada termo da serie é o producto do termo precedente por $-\alpha x$. N'este caso pois a serie é uma simples progressão geometrica.

Passemos agóra á fracção

$$\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}.$$

Pondo do mesmo modo

$$\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\ldots\ldots,$$

e multiplicando ambos os membros por $1+\alpha x+\beta x^2$, acharemos

$$a+bx=\mathrm{A}+\left.\begin{matrix}\mathrm{B}\\+\mathrm{A}\alpha\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}\mathrm{C}\\+\mathrm{B}\alpha\\+\mathrm{A}\beta\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}\mathrm{D}\\+\mathrm{C}\alpha\\+\mathrm{B}\beta\end{matrix}\right|x^3+\begin{matrix}\ldots\ldots\\+\ldots\ldots\\+\ldots\ldots\end{matrix}$$

e depois

$$\mathrm{A}=a,\ \mathrm{B}+\mathrm{A}\alpha=b,\ \mathrm{C}+\mathrm{B}\alpha+\mathrm{A}\beta=0,\ \mathrm{D}+\mathrm{C}\alpha+\mathrm{B}\beta=0,\ \text{etc.}$$

d'onde se deduzem

$$\mathrm{A}=a,\ \mathrm{B}=b-\mathrm{A}\alpha,\ \mathrm{C}=-\mathrm{A}\beta-\mathrm{B}\alpha,\ \mathrm{D}=-\mathrm{B}\beta-\mathrm{C}\alpha,\ldots\ldots$$

Logo, do 3.° termo em diante, cada coefficiente é a somma dos dous precedentes multiplicados respectivamente por $-\beta$ e $-\alpha$; ou cada termo da serie é a somma dos dous precedentes multiplicados respectivamente por $-\beta x^2$ e $-\alpha x$.

Se puzessemos ainda

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3\ldots\ldots,$$

veriamos pelo mesmo theor, que qualquer termo, do 4.° em diante, se compunha dos tres precedentes multiplicados respectivamente por $-\gamma x^3$, $-\beta x^2$, $-\alpha x$.

Por onde finalmente se póde concluir, que em geral uma fracção da fórma

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots\ hx^{i-1}}{1+\alpha x+\beta x^2+\ldots\ldots+\iota x^{i-1}+\theta x^i},$$

deve gerar uma serie, cada termo da qual, do termo $i+1$ em diante, se comporá dos i precedentes multiplicados respectivamente por, $-\theta x^i$ $-\iota x^{i-1}$, ... $-\beta x^2, -\alpha x$.

Chamam-se *Recurrentes* todas as series assim formadas; e *Eschala de relação* a reunião dos factores respectivos pelos quaes se devem multiplicar muitos termos consecutivos para se obter o termo seguinte. Por ex.°, os senos e cosenos d'arcos equidifferentes, e as sommas das potencias das raizes das equações formam series recurrentes.

147. *Dada a serie recurrente e a eschala de relação é facil achar a fracção generatriz.*

Com effeito, seja

$$S = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

a serie dada, e supponhamos primeiro para fixar idêas, que a eschala de relação é $[px^3, qx^2, rx]$. Como esta eschala contém tres termso, a fracção generatriz será da fórma

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3},$$

cuja eschala de relação, segundo vimos, é $[-\gamma x^3, -\beta x^2, -\alpha x]$. Teremos pois, comparando,

$$\alpha = -r,\ \beta = -q,\ \gamma = -p;$$

e só restará determinar as quantidades a, b, c. Para isso poremos

$$\frac{a+bx+cx^2}{1-rx-qx^2-px^2}=\text{A}+\text{B}x+\text{C}x^2+\text{etc.},$$

d'onde resulta, attendendo sómente aos tres primeiros termos,

$$a+bx+cx^2=\text{A}+\left.\begin{array}{l}\text{B}\\-\text{A}r\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}\text{C}\\-\text{B}r\\-\text{A}q\end{array}\right|x^2.$$

Comparando agora os coefficientes das differentes potencias de x, determinaremos a, b, c, e obteremos finalmente a fracção generatriz

$$\text{S}=\frac{\text{A}+(\text{B}-\text{A}r)\,x+(\text{C}-\text{B}r-\text{A}q)\,x^2}{1-rx-qx^2-px^2}.$$

Em geral, se designarmos por A_0, A_1, A_2, ... A_n os coefficientes successivos da serie recurrente, e por p_1, p_2, p_3 ...... p_n os coefficientes de x, x^2, x^3, ... na eschala de relação, será

$$\text{S}=\frac{\text{A}_0+(\text{A}_1-\text{A}_0p_1)\,x+(\text{A}_2-\text{A}_1p_1-\text{A}_0p_2)\,x^2+..(\text{A}_{n-1}-\text{A}_{n-2}\,p_1-\text{A}_{n-3}\,p_2..-\text{A}_0p_{n-1})\,x^{n-1}}{1-p_1x-p_2x^2+\,........................-p_nx^n}.$$

Por ex.° na serie

$$\text{S}=1+x+2x^2+\tfrac{3}{2}x^3+......$$

cuja eschala de relação é $[-\frac{1}{2}x^3,\ x^2,\ \frac{1}{2}x]$, temos 3/

$$\text{A}_0=1,\ \text{A}_1=1,\ \text{A}_2=2,\ p_3=-\tfrac{1}{2},\ p_2=1,\ p_1=\tfrac{1}{2};$$

e por conseguinte será 2/

$$\text{S}=\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3}.$$

148. *Para achar o termo geral* T, *isto é, o termo de serie recurrente, que tem* n *antes de si*, procuraremos decompor a fracção generatriz em fracções simples, cujos denominadores sejam os factores do 1.° gráo do denominador da fracção proposta.

Seja pois

$$A + Bx + Cx^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

a serie recurrente, cuja eschala da relação é dada, e que tem por fracção generatriz

$$F = \frac{a + bx + cx^2 + \dots\dots + tx^{i-1}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \dots\dots\dots \theta x^i} \dots\dots\dots \quad (2)$$

Mudando no denominador de (2) x em $\frac{1}{y}$, e egualando a zero, teremos de resolver a equação

$$y^i + \alpha y^{i-1} + 6y^{i-2} + \dots\dots + \theta = 0.$$

1.° Suppondo que são desiguaes as raizes $k, k', k'', \dots\dots k^{(i)}$ d'esta equação, teremos

$$y^i + \alpha y^{i-1} + 6y^{i-2} - \dots + \theta = (y-k)(y-k')(y-k'')\dots(y-k^{(i)}),$$

podendo estas raizes ser reaes ou imaginarias, racionaes ou irracionaes, negativas ou zero. Repondo $\frac{1}{y}$ por x, virá

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \dots + \theta x^i \dots = (1-kx)(1-k'x)(1-k''x)\dots(1-k^{(i)}x);$$

e por conseguinte teremos

$$F = \frac{K}{1-kx} + \frac{K'}{1-k'x} + \frac{K''}{1-k''x} + \dots \frac{K^{(i)}}{1-kx^{(i)}} \dots\dots \quad (3)$$

determinando os coefficientes K, K', ... $K^{(i)}$ pelo methodo de pag. 244.

Podendo cada uma d'estas i fracções componentes de F desinvolver-se n'uma progressão geometrica, a serie (1) será a somma, termo por termo, d'estas progressões; e por conseguinte o termo geral T será a somma dos seus termos geraes, ou

$$T = \left(Kk^n + K'k'^n + \ldots\ldots K^{(i)}k^{(i)^n}\right) x^n \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Logo, *para achar o termo geral* T *da serie recurrente proposta, e decompor esta serie em progressões geometricas de que ella seja a somma, devemos: egualar a zero o denominador da fracção generatriz; mudar n'ella* x *em* $\frac{1}{y}$ *; e buscar as raizes* k, k', k'', ... k$^{(i)}$ *da equação*

$$y^i + \alpha y^{i-1} + \beta y^{i-2} + \ldots\ldots \iota^i = 0.$$

Estas raizes, tomadas com signal contrário, serão os factores de x *nos denominadores das fracções componentes* (3); *e as razões das progressões serão* kx, k'x ...... k$^{(i)}$x. *Determinando por fim os numeradores* K, K', ... K$^{(i)}$ *teremos todos os elementos para calcular* T *pela fórmula* (4).

Applicando esta regra ao ex.° do n.° precedente, temos

$$\frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2}{1 - \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3} = \frac{2}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}}{1+x} - \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2}x}.$$

Logo a serie $1 + x + 2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \ldots\ldots$, cuja eschala de relação é $[-\frac{1}{4}x^3, x^2, \frac{1}{2}x]$ tem por termo geral

$$T = \frac{1}{3}x^n\left(6 \pm 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right).$$

2.° Se a equação

$$y^i + \alpha y^{i-1} + \beta y^{i-2} + \ldots\ \theta^i = 0,$$

tiver raizes eguaes, isto é, factores da fórma geral $(y-r)^l$, é necessario introduzir na equação (3), além das fracções correspondentes aos factores deseguaes, outras fracções da fórma (v. pag. 246)

$$\frac{L^{(1)}}{(1-rx)^l}+\frac{L^{(2)}}{(1-rx)^{l-1}}\ldots\ldots\frac{L^{(l-1)}}{(1-rx)^2}+\frac{L^{(l)}}{1-rx}\ldots\text{ (5)}$$

Mas, pela fórmula do binomio, temos

$$L(1-rx)^{-l}=L\left(1+lrx+l\frac{l+1}{2}r^2x^2+l\frac{l+1}{2}\cdot\frac{l+2}{3}r^3x^3+\ldots\ldots\right),$$

cujo termo geral t é

$$t=L\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+l-1)}{1.2.3\ldots\ldots l-1}r^nx^n;\ \ldots\ldots\text{ (6)}$$

logo para obter o termo geral T da somma de todas as fracções (5), devemos fazer successivamente $l=1$, $l=2$, $l=3$, ... e sommar; o que dá

$$T=\left\{L^{(l)}+L^{(l-1)}(n+1)+L^{(l-2)}(n+1)\frac{n+2}{2}+L^{(l-3)}(n+1)\frac{(n+2)}{2}\frac{(n+3)}{3}+\ldots\right\}r^nx^n$$

Assim na serie recurrente

$$-1+\frac{7}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{49}{8}x^3+\frac{73}{16}x^4+\ldots\ldots,$$

cuja eschala de relação é $\left[\frac{1}{2}x^4,-\frac{3}{2}x^3,\frac{1}{2}x^2,\frac{3}{2}x\right]$.

temos

$$\frac{-1+5x-\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3}{1-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4}=\frac{-\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{4}{3}}{1+x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

e por conseguinte

$$T=\left(-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\mp\frac{4}{3}+n+2\right)x^n,$$

usando do signal $\mp$ conforme for n par ou impar.

149. Os factores constantes K, K', ... $K^{(i)}$ podem obter-se sem recorrer á decomposição em fracções. Por quanto, sendo conhecidos os termos iniciaes $A+Bx+Cx^2+\ldots$ da serie (1), bem como as raizes k, k', ... $k^{(i)}$, se fizermos successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$, ... na expressão (4) de T, reproduzir-se-hão estes termos successivos, isto é

$$A=K+K'+\ldots K^{(i)},\ B=Kk+K'k'+\ldots K^{(i)}k^{(i)},\ C=Kk^2+K'k'^2+\ldots K^{(i)}k^{(i)2}\ldots$$

No caso das raizes k, k', ... serem deseguaes, podemos estabelecer por este modo i destas equações, que nos servirão para determinar i constantes k, k', ..., que n'ellas entram no 1.° grão.

E no caso de conter o denominador de F factores eguaes da fórma $(1-rx)^t$, existirão, além dos termos Kk^n, $K'k'^n$.. correspondentes aos factores deseguaes, outros cuja somma se comprehende na equação (6) fazendo $l=1$, $l=2$, $l=3$, ...; e é evidente que estes ultimos termos se encerram na expressão

$$(a'+b'n+c'n^2+\ldots f'n^{t-1})r^nx^n,$$

sendo a', b', c', ... f' quantidades desconhecidas, que se podem obter pelo methodo precedente, formando tantas equações quantas são as indeterminadas.

Exemplos:

1.° Tornando ao exemplo dos dous n.os precedentes, temos n'elles $k=1$, $k'=-1$, $k''=\frac{1}{2}$, e

$$T=[K(\tfrac{1}{2})^n+K'(-1)^n]\,x^n.$$

Fazendo $n=0$, $n=1$, $n=2$, e comparando com os termos respectivos da serie $1+x+2x^2\ldots$ vem as equações

$$K+K'+K''=1,\ K-K'+\tfrac{1}{2}K''=1,\ K+K'+\tfrac{1}{4}K''=2,$$

d'onde se deduz

$$K=2,\ K'=\frac{1}{3},\ K''=-\frac{4}{3},$$

que dá para T o valor achado precedentemente.

2.° A serie recurrente

$$3+6x+\frac{39}{4}x^2+\ldots\ldots,$$

cuja fracção generatriz é

$$\frac{6(2-2x-x^2)}{4-12x+9x^2-2x^3},$$

dá

$$0=y^3-3y^2+\tfrac{9}{4}y-\tfrac{1}{2}=(y-2)(y-\tfrac{1}{2})^2.$$

A fracção resultante do factor $y-2$ é $\dfrac{K}{1-2x}$, cujo termo geral é $K.2^n x^n$. As correspondentes a $(y-\frac{1}{2})^2$ dão

$$(a'+b'n)(\tfrac{1}{2}x)^n,$$

e por conseguinte

$$T = [2^n K + (\tfrac{1}{2})^n (a' + b'n)] x^n.$$

Fazendo $n = 0, 1, 2$, vem

$$3 = K + a', \; 6 = 2K + \tfrac{1}{2} a' + \tfrac{1}{2} b', \; \tfrac{39}{4} = 4K + \tfrac{1}{4} a' + \tfrac{1}{2} b';$$

logo $K = 2$, $a' = 1$, $b' = 3$, $T = x^n \left(2^{n+1} + \dfrac{1+3n}{2^n}\right)$.

150. *Para achar a somma d'um determinado numero de termos consecutivos d'uma serie recurrente*, procederemos da seguinte maneira.

Supponhamos que a eschala de relação tem tres termos, que designaremos simplesmente pelas letras p, q, r; e sejam

$$A + B + C + D + \ldots\ldots + K + L + M + N$$

os termos da serie, cuja somma se pede.

Pela natureza da serie temos

$$D = Ap + Bq + Cr$$

$$E = Bp + Cq + Dr$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N = Kp + Lq + Mr.$$

Sommando estas equações vem

$$(D + E + \ldots N) = (A + B + \ldots K) p + (B + C + \ldots L) q + (C + D + \ldots M) r.$$

Designando pois por S a somma pedida, a equação precedente tornar-se-ha

$$S-A-B-C=(S-L-M-N)p+(S-A-M-N)q+(S-A-B-N)r;$$

d'onde se deduz facilmente

$$S=\frac{A+B+C-r(A+B+N)-q(A+M+N)-p(L+M+N).}{1-r-p-q.}$$

Se tivessemos, por ex.°, uma serie recurrente, cuja eschala de relação contivesse tres termos, e na qual sendo 1, 2, 3, os tres primeiros termos, fosse o 4.° egual ao dobro do 3.° mais a somma dos dous primeiros; o 5.° egual ao dobro do 4.° mais a somma do 3.° e do 2.°; e assim por diante: será o desinvolvimento d'esta serie

$$1,\ 2,\ 3,\ 9,\ 23,\ 58,\ 148,\ 377,\ 960,\ 2445,\ 6227,\ \ldots.$$

Para obter agora a somma dos onze primeiros termos, fariamos na fórmula de cima

$$A=1,\ B=2,\ C=3,\ p=1,\ q=1,\ r=2,\ N=6227,\ M=2445,\ L=960,$$

o que dará

$$S=\frac{6-2\times6230-8673-9632}{2}=10253.$$

151. Terminaremos a theoria das series recurrentes, expondo o methodo de Lagrange *para reconhecer se uma serie dada é recurrente.*

Seja a serie dada

$$S=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

Indaguemos se ella poderá provir d'uma fracção da fórma $\frac{a}{1+\alpha x}$, e ponhamos $S=\frac{a}{1+\alpha x}$. D'aqui resulta

$$\frac{1}{S}=\frac{1+\alpha x}{a}=\frac{1}{a}+\frac{\alpha}{a}x;$$

logo n'este caso o quociente de 1 pela serie S deverá ser exacto e da fórma $p+qx$; e a fracção generatriz será

$$S=\frac{1}{p+qx}.$$

Se a divisão não terminar no 2.° termo, a serie não será recurrente, ou provirá d'uma fracção mais complicada.

Ponhamos $S=\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}$; teremos

$$\frac{1}{S}=\frac{1+\alpha x+\beta x^2}{a+bx}=p+qx+\frac{a'x^2}{a+bx}.$$

Logo se dividirmos 1 por S, e pararmos nos termos da fórma $p+qx$, o resto será divisivel por x^2. Designando por S_1x^2 este resto, que será uma serie da fórma

$$A_1x^2+B_1x^3+C_1x^4+\text{etc.},$$

teremos

$$\frac{1}{S}=px+qx+\frac{S_1x^2}{S}=p+qx+\frac{a'x^2}{a+bx},$$

d'onde se deduz

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a'}{a+bx}=p_1+q_1x:$$

isto é, deve a divisão terminar tambem no 2.° termo; e teremos, para achar a fracção generatriz, as duas equações

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S_1}{S}x^2, \quad \frac{S}{S_1} = p_1 + q_1 x,$$

donde se tira

$$S = \cfrac{1}{p + qx + \cfrac{x^2}{p^1 + q^1 x^2}};$$

e por conseguinte a fracção generatriz será

$$S = \frac{p_1 + q_1 x}{(p + qx)(p_1 + q_1 x) + x^2}.$$

Supponhamos que o quociente de S por S_1 não é ainda $p_1 + q_1 x$: se a serie for recurrente, será d'uma ordem superior á segunda. Examinemos se poderá ser

$$S = \frac{a + bx + cx^2}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3},$$

d'onde se deduz

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}\, x^2.$$

N'este caso o quociente de 1 por S, passados os termos $p + qx$, deve dar no resto uma serie, cujos termos conterão todos x^2; e se designarmos este resto por $S_1 x^2$, deveremos ter $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}$.

Esta egualdade dá

$$\frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{a''}{a'+b'x}x^2;$$

logo, designando por S_2x^2 a serie que apparece de resto depois dos termos p_1+q_1x, deveremos ter $\frac{S_2}{S_1}=\frac{a''}{a'+b'x}$.

D'esta última equação deduz-se

$$\frac{S_1}{S_2}=p_2+q_2x;$$

e como as operações devem terminar aqui, teremos para reverter á fracção generatriz, as equações

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S_1}{S}x^2,\ \frac{S}{S_1}=p_1+q_1x+\frac{S_2}{S_1}x^2,\ \frac{S_1}{S_2}=p_2+q_2x,$$

d'onde se deduzem

$$S=\frac{1}{p+qx+\frac{S_1}{S}x^2},\ \frac{S_1}{S}=\frac{1}{p_1+q_1x+\frac{S_2}{S_1}x^2},\ \frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{p_2+q_2x}.$$

Feitas as substituições convenientes, forma-se com facilidade a fracção egual a S.

Vê-se pois, sem ser necessario progredir mais, que as operações successivas pelas quaes se acham os quocientes $p+qx$, p_1+q_1x, p_2+q_2x, etc., e se reverte depois para a fracção generatriz, tem uma analogia manifesta com as operações que indicámos para reduzir uma fracção ordinaria em fracção continua, e para reverter depois á fracção ordinaria; e por isso as regras geraes que démos para estas soluções, se applicarão com facilidade á resolução da questão que nos occupa. Se a serie for recurrente, devemos chegar a uma divisão que dará um quociente exacto da fórma $p+qx$.

Supponhamos que se quer saber, se a serie dos numeros naturaes 1, 2, 3, etc. é, ou não, recurrente. Em vez desta serie numerica, ponhamos

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$$

Fazendo as operações acima indicadas, teremos:

Divisão de 1 *por* S.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \\ \hline -1-2x-3x^2-4x^3-\text{etc.} & 1-2x \\ \hline \quad -2x^2-3x^2-4x^3-5x^4-\text{etc.} & \\ \quad +2x+4x^2+6x^3+8x^4+\text{etc.} & \\ \hline \quad x^2+2x^3+3x^4+\text{etc.}=S_1x^2 & \end{array}$$

Divisão de S *por* S_1.

$$\begin{array}{l|l} 1+2x+3x^2+4x^2+\text{etc.} & 1+2x+3x^3+4x^2+\text{etc.} \\ -1-3x-3x^2-4x^3-\text{etc.} & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Temos pois $\frac{1}{S}=1-2x+\frac{S_1}{S}x^2,\ \frac{S_1}{S}=1$;

d'onde

$$S=\frac{1}{1-2x+\frac{S_1}{S}x^2},\ \frac{S_1}{S}=1;$$

e por conseguinte

$$S=\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Series exponenciaes e logarithmicas.

152. Passando agora a resolver em series as *funcções transcendentes*, começaremos pela *exponencial* a^x. Pondo $a = 1 + y$, temos, pela fórmula do binomio,

$$(1+y)^x = 1 + xy + x\frac{x-1}{2}y^2 + \ldots + x\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2\ .\ 3\ldots\ldots n}y^n\ldots$$

Como o único termo em que não entra x é 1, e todos os expoentes de x são inteiros e positivos, ésta serie, ordenada segundo as potencias ascendentes de x, será da fórma

$$a^x = 1 + kx + Ax^2 + Bx^3 \ldots + Px^{n-1} + Qx^n \ldots \quad (1)$$

Para achar o termo kx é necessario recorrer ao termo geral. Ora é evidente que para tomar nelle o termo do producto em que x entre só no primeiro grão, só se devem conservar os segundos termos dos factores binomios, resultando assim o producto

$$\frac{x\times-1\times-2\times\ldots\times-(n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}y^n = \pm y^n\frac{x}{n},$$

usando do signal $+$ quando n for impar, e do signal $-$ quando for par. A reunião de todos estes productos é egual a kx, e por conseguinte será

$$k = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \ldots\ldots \pm \frac{y^n}{n};\ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

e como $y = a - 1$, fica assim determinado o coefficiente k.

Para achar os outros coefficientes A, B, C, ... notaremos, que estas constantes não devem mudar de valor, quando x se tornar em z em (1), sendo por isso,

$$a^z = 1 + kz + Az^2 + Bz^3 + Cz^4 + \ldots + Qz^n \ldots$$

Subtrahindo d'esta a equação (1), e fazendo $z = x + i$, vem

$$a^z - a^x = a^x \cdot a^i - a^x = a^x(a^i - 1) = (z - x)\,[k + A(z + x) + B(z^2 + zx + x^2) + Q(z^{n-1} + z^{n-2}x \ldots + x^{n-1}) \ldots]$$

Ora, como pela equação (1) é $a^i - 1 = ki + Ai^2 + \ldots$, ambos os membros da última equação são divisiveis por $i = z - x$; logo

$$a^x(k + Ai + \ldots) = k + A(z + x) + B(z^2 + zx + x^2) + \ldots$$

Fazendo agora a arbitrária $i = 0$, ou $z = x$, e substituindo a^x pelo seu valor, dado na equação (1), acharemos

$$(1 + kx + Ax^2 + Bx^3 + \ldots Px^{n-1})k = k + 2Ax + 3Bx^2 + \ldots nQx^{n-1} \ldots;$$

d'onde se deduz

$$2A = k^2,\ 3B = kA,\ 4C = kB,\ \ldots\ nQ = kP \ldots$$

A última equação mostra; que *um coefficiente qualquer* Q *é igual ao producto do precedente, multiplicado por* k, *e dividido pelo numero* n *que indica a sua ordem.*

Substituindo os valores de A, B, C, ... vem finalmente

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{2.3} \ldots + \frac{k^nx^n}{2.3..n} \ldots \quad (A)$$

153. A equação (2) dá k em funcção de y, e por conseguinte em funcção tambem de a. Querendo porém, dado k, achar a, faremos $x=1$ em (A), e virá

$$a = 1 + k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

As series (2) e (3) são o desenvolvimento da equação, que exprime em termos finitos a ligação de a com k, a qual passâmos a determinar. Faça-se na serie (3) $k=1$, e designando por e o valor que toma então a base a, será

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots\ldots$$

Este numero é facil de calcular, como se vê em frente, por isso que cada um dos termos, pela natureza da serie, é egual ao precedente dividido successivamente por 3, 4, 5.. Mas por outra parte, sendo x uma quantidade arbitrária, podemos fazer $kx=1$ em (A), o que tornará o 2.° membro $=e$.

	2,5		
3.° termo	0,16666 .	66666	66
4.°	0,04166	66666	66
5.°	0,00833	33333	73
6.°	0,00138	88888	88
7.°	0,00019	84126	98
8.°	0,00002	48015	87
9.°	0,00000	27557	32
etc.	......	......	......
	$e = 2{,}71828$	18284	59

Logo $a^{\frac{1}{k}} = e$, ou $e^k = a$.

Tal é a equação finita que liga k e a, e que mostra que k *é o logarithmo de* a, *tomado no systema de base* e. Prefere-se esta base e nos calculos algebricos, porque os torna mais simples, como teremos occasião de observar. Chamam-se *logarithmos neperianos* os que são tomados n'este systema. D'aqui por diante exprimiremos respectivamente pelos signaes l, *Log.*, *log.*, os logarithmos neperianos, os de qualquer base arbitraria b, e os de base 10.

Temos pois

$k = la =$ *logar. neperiano de* a, *sendo a base* e .... (4)

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{2}l^2a + \frac{x^3}{2.3}l^3a + \frac{x^4}{2.3.4}l^4a \ldots\ldots \quad (A')$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Tomando os log. dos dous membros da equação $a = e^k$, n'um systema de base qualquer arbitrária b, vem

$$\text{Log. } a = k \text{ Log. } e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

d'onde se deduz, por ser $a = 1 + y$, e pondo por k o seu valor (2),

$$\text{Log } (1 + y) = \text{Log } e \left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots\right) \ldots\ldots\ldots (C).$$

Junctando Log h a ambos os membros, e fazendo $hy = z$, sendo h e z numeros quaesquer, vem

$$\text{Log } (h + z) = \text{Log } h + \text{Log } e \left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2} + \frac{z^3}{3h^3} + \text{etc.}\right) \ldots (D)$$

Querendo passar para os logarithmos neperianos, Log e muda-se em $le = 1$, por ser então e a base (*Alg. Elem.* n.° 154, 1.°); a equação (C) torna-se pois em

$$l(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{4}y^4 \ldots\ldots\ldots,$$

e por conseguinte

$$\text{Log } (1 + y) = \text{Log } e \times l\,(1 + y).$$

Logo: *para passarmos dos logarithmos neperianos para os logarithmos tomados n'um systema de base* b, *multiplicaremos os primeiros por* Log e (*Alg. Elem.* n.° 156). Este factor $\mathrm{Log}\, e = \mathrm{M}$, constante para cada systema, é o que se chama MODULO, e vem a ser *o log. da base neperiana tomado n'um systema* b, ou para melhor dizer, *a unidade dividida pelo log. neperiano da base* b. Para cada systema o modulo M tem um valor particular, porque tendo e o valor constante $= 2{,}71828\ldots$, o log. deste numero só variará com a base b.

Tomando a por base, a equação (5) torna-se em

$$k\ \mathrm{Log}\ e = 1,$$

que dá

$$\mathrm{M}k = 1,\ \mathrm{M} = \mathrm{Log}\ e,\ \mathrm{M} = \frac{1}{k} = \frac{1}{la} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Os dous factores M e k variam com a base do systema; mas tem um producto constante $= 1$. Adiante veremos a maneira de calcular o modulo M para qualquer base a. (*Nota 4.ª*)

154. Para applicarmos a equação (C) ao calculo do log. de um numero, é necessario tornar a serie convergente. A equação (C) dá pela mudança de y em $-y$,

$$\mathrm{Log}\,(1-y) = -\mathrm{M}\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \ldots\right);$$

subtraíndo esta expressão de (C), resulta

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\,\mathrm{M}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 \ldots\right) \ldots (\mathrm{E}).$$

Supponhamos $\quad \dfrac{1+y}{1-y} = \dfrac{z}{z-1}$, ou $y = \dfrac{1}{2z-1}$.

O primeiro membro torna-se em $\Delta = \mathrm{Log}\, z - \mathrm{Log}\,(z-1)$, i. é, na differença dos log. consecutivos de z e $z-1$. Logo

$$\Delta = 2M\left[\frac{1}{2z-1}+\frac{1}{3(2z-1)^3}+\frac{1}{5(2z-1)^5}\cdots\right]\cdots(F)$$

Conhecido o modulo M, facilmente se calculam, e seguidamente, os log. dos numeros inteiros 2, 3, 4, 5, ..., por isso que este valor da differença Δ entre estes log. é muito convergente, e o vae sendo cada vez mais á medida que z vai crescendo.

Se os logarithmos, que se tracta de formar, forem os neperianos, M ou Log. e se tornam em $le=1$, e então muito facilmente se calcula Δ, e se póde compôr uma taboa de log. neperianos

Em quanto ao valor de M expresso pela equação (5), deduz-se do calculo de $l\,a$, ou *do log. neperiano da base* a.

Se for, por ex.°, $a=10$: faremos na equação (F), $M=1$, depois $z=2$; teremos $\Delta=l2$ (por ser $l1=0$); o dobro de $l2$ é $l4$: depois $z=5$ dará $l5$, e obteremos por fim $l10$. Faz-se o cálculo segundo o typo em frente. Divide-se depois 1 por $l10$: e e acha-se por esta fórma

$$\begin{aligned}
l2 &= 0,69314\ 718056\\
l4 &= 1,38629\ 436112\\
\Delta \text{ para } z=5\,..\ & \ 0,22314\ 355131\\
l5 &= 1,60943\ 791243\\
l2 &= 0,69314\ 718056\\
l10 &= 2,30258\ 509298
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= 0.43429\ 48319\ 03251\ 82765,\\
\log. M &= \bar{1},63778\ 43113\ 00536\ 77817\\
\text{Compl.} &= 0,36221\ 56886\ 99463\ 22183\\
e &= 2,71828\ 18284\ 59045\ 25536.
\end{aligned}$$

Se 3 fosse a base do systema, obtido o valor de $l2$, far-se-hia $z=3$, e viria $l4=1,09861229$; finalmente

$$M = 1 : l3 = 0,9102392.$$

Identicamente para a base 5

$$M = 1 : l5 = 0{,}6213349.$$

Depois do que temos expendido, torna-se facil a formação da taboa dos log. de Briggs e Callet. A base é $a=10$; o valor de M augmenta a convergencia da serie (F); quando z passa de 100, póde desprezar-se o segundo termo, e o primeiro é sufficiente para dar Δ com 8 decimaes. É necessario porém calcular ainda mais 2 ou 3 algarismos, além d'aquelles que se pertende conservar, a fim de evitar a accumulação dos erros; e é conveniente tambem o começar a calcular desde $z=10000$, por isso que os log. inferiores facilmente se deduzem dos outros. Logo que z excede 1200 podemos desprezar 1 em comparação de $2z$, e suppôr $\Delta = \frac{M}{z}$.

Por exemplo, $z = 10001$ dá $\Delta=0{,}000043425$; e por conseguinte $\log 10001=4{,}000043425$. Se for $z=99857$, teremos $\Delta=0{,}000004349$, quantidade que é necessario ajunctar ao $\log 99856=4{,}9993742$, para ter

$$\log 99857 = 4{,}9993785.$$

Deve notar-se mais que os log. consecutivos tem uma differença constante em uma certa extensão da taboa (*Arith.* p. 119), e por conseguinte basta calcular Δ de certa em certa distancia. Póde ver-se que de $z=99840$ e $z=99860$ resulta o mesmo numero Δ que acima achámos, e por conseguinte no intervallo d'estes dous numeros z, Δ é constante se nos limitarmos a 9 letras de dizima.

A serie (E) é pouco convergente para os numeros pequenos 2, 3, 5 . . . Eis aqui como d'ella usa Borda (*Tableau de log. decimales*):

Suppõe $\dfrac{1+y}{1-y} = \dfrac{m}{n}$, ou $y = \dfrac{m-n}{m+n}$,

e $$\text{Log}\,\frac{m}{n} = 2M\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots\right\}$$

Tal é a differença entre os log. de dous numeros m e n expressa n'uma serie muito convergente, principalmente quando m e n são grandes e pouco differentes. Sendo por exemplo $m = 101$, e $n = 100$, o 1.° algarismo significativo do segundo termo é apenas da 8.ª casa decimal, e passado o numero 100, podemos contentar-nos com o primeiro termo, se calcularmos os log. só com 7 algarismos decimaes, e obteremos assim a differença entre dous log. successivos.

Para os numeros pequenos, Borda suppõe

$$m = (p-1)^2(p+2),\ n = (p+1)^2(p-2),$$

o que dá

$$m - n = 4,\ m + n = 2p^3 - 6p,$$

e os log. neperianos

$$2l(p-1) + l(p+2) - 2l(p+1) - l(p-2) =$$

$$2\left\{\frac{2}{p^3-3p} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{p^3-3p}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{p^3-3p}\right)^5 + \ldots\ldots\right\};$$

e fazendo successivamente $p = 5$, 6, 7 e 8, achar-se-ha

$$2l2 - 3l3 + l7 = 2\left(\tfrac{1}{55} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{55}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$2l5 + l2 - 2l7 = 2\left(\tfrac{1}{99} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{99}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$4l3 - 4l2 - l5 = 2\left(\tfrac{1}{161} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{161}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$2l7 + l5 - 5l3 = 2\left(\tfrac{1}{244} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{244}\right)^3 + \ldots\right).$$

Estas series que convergem com muita rapidez, são faceis de calcular, e deduzem-se d'ellas consecutivamente os log. de 2, 3, 5 e 7 por meio da eliminação entre estas quatro equações do 1.° gráo. Haros lembrou-se de suppôr

$$m = p^2(p+5)(p-5),\ n = (p+3)(p-3)(p+4)(p-4)$$

e obteve por este meio uma serie procedendo segundo as potencias impares de $\frac{72}{p^4-25p^2+72}$, a qual é tão convergente, que dando apenas a p o valor 12, o 2.° termo só tem o 1.° algarismo significativo na 9.ª casa decimal. Conhecidos os log. de $p+4$, $p+3$, p, $p-3$ e $p-5$ obtem-se logo o log. de $p+5$.

Series Circulares.

155. Para desenvolver em series as expressões sen x e cos x em ordem ás potencias crescentes do arco x, notemos que estas series não podem admittir termos, em que entre x com expoente negativo ou fraccionario. Por quanto:

1.° Se fosse possivel, que na serie entrasse um termo da fórma $Px^{\frac{h}{i}} = P\sqrt[i]{x^h}$, resultariam i valores por cada arco, o que não póde ser, por que a qualquer arco não corresponde mais do que um seno ou coseno.

2.° Se houvesse um termo de fórma $Px^{-i} = \frac{P}{x^i}$, a serie se tornaria infinita para $x=0$, o que é absurdo, por que, como se sabe, nesse caso o seno torna-se em zero, e o coseno na unidade. Por esta consideração conclue-se além disso, que na expressão de sen x só devem entrar termos em que x seja factor, e que o termo constante, que entra em cos x, deve ser a unidade.

Supponhamos pois

$$\text{sen}\, x = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots,$$

$$\cos x = 1 + a'x + b'x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Da 1.ª equação deduz-se $\frac{\text{sen}\, x}{x} = a + bx + \ldots\ldots$; mas (Geom. An. n.° 210) sabemos que o limite da relação do seno para o arco é $=1$; fazendo pois $x=0$, será $a=1$.

Quando x se torna negativo, tanto o seno, como o coseno, conservam as suas grandezas, mudando porém o seno de signal. Ora, se nas series precedentes mudarmos x em $-x$, só mudarão de signaes os termos das potencias impares; por conseguinte é necessario, *que no desenvolvimento de* sen x *entrem sómente termos com expoentes impares*, *e no de* cos x *só os de expoentes pares*. Será pois

$$\text{sen}\, x = x + Ax^3 + Bx^5 + \ldots\ldots + Mx^{2i-1} + Nx^{2i+1},$$

$$\cos x = 1 + A'x^2 + B'x^4 + C'x^6 + \ldots\ldots\ldots + N'x^{2i},$$

designando por i a ordem dos termos.

Tractemos agora de determinar os coefficientes numericos

$$A,\ B,\ C, \ldots\ldots\ldots\ldots A',\ B',\ C', \ldots\ldots$$

Se no binomio

$$P \cos x + Q\ \text{sen}\ x$$

mudarmos x em $x+h$, podemos obter o seu desenvolvimento em ordem ás potencias de h de duas maneiras, que devem dar resultados identicos; ou desenvolvendo primeiro o binomio em ordem a x, e mudando depois x em $x+h$; ou substituindo x por $x+h$, e pondo depois por sen h e cos h os seus valores em ordem a h.

Representando os dous resultados por

$$\alpha + \beta h + \gamma h^2 + \ldots\ldots = \alpha' + \beta' h + \gamma' h^2 + \ldots\ldots,$$

deduz-se

$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma', \ldots\ldots$$

A 2.ª equação $\beta = \beta'$, que corresponde aos coefficientes da 1.ª potencia de h, servirá para resolver a questão de que tractâmos. Para a obter:

1.° Façamos

$$P\cos x + Q\,\mathrm{sen}\,x = P(1 + A'x^2 + B'x^4 + \ldots\ldots + N'x^{2i})$$

$$+ Q\,(x + Ax^3 + Bx^5 + \ldots\ldots\ldots + Nx^{2i+1}).$$

Substituindo n'esta expressão x por $x+h$, e approveitando sómente o coefficiente de h, isto é, tomando a sua derivada, acharemos

$$\beta = P\,(2A'x + 4B'x^3 + \ldots + 2i\,N'x^{2i-1})$$

$$+ Q\,(1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + \ldots + (2i+1)\,Nx^{2i}).$$

2.° Mudemos $P\cos x + Q\,\mathrm{sen}\,x$

em $$P\cos(x+h) + Q\,\mathrm{sen}\,(x+h) = P\,(\cos x\cos h - \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,h)$$

$$+ Q\,(\mathrm{sen}\,x\,\cos h + \cos x\,\mathrm{sen}\,h).$$

Substituindo $1 + A'h^2 + \ldots$ por $\cos h$, e $h + Ah^3 + \ldots$ por $\mathrm{sen}\,h$, é evidente que dos termos em que entra $\cos h$ não resultará nenhum com a 1.ª potencia de h, e que por isso virá logo

$$\beta' = -P\,\mathrm{sen}\,x + Q\cos x.$$

Como na equação $\beta = \beta'$ entram os coefficientes P e Q, que são quantidades arbitrárias, é necessario (*Alg. El.* n.° 120), que a equação se parta em duas resultantes da egualdade dos coefficientes das duas arbitrárias. Substituindo pois $\cos x$ e $\mathrm{sen}\,x$ pelos seus desinvolvimentos, resultam as equações identicas

$$2A'x + 4B'x^3 + 6C'x^5 - \ldots + 2i\,N'x^{2i-1} = -x - Ax^3 - Bx^5 \ldots - Mx^{2i-1},$$

$$1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 \ldots + (2i+1)\,Nx^{2i} = 1 + A'x^2 + B'x^4 + \ldots + N'x^{2i};$$

das quaes deduziremos, egualando termo a termo,

$$2A'=-1,\ 4B'=-A,\ 6C'=-B,\ldots 2iN'=-M,$$

$$3A=A',\ 5B=B',\ 7C=C',\ldots(2i+1)\ N=N';$$

e depois

$$A'=-\frac{1}{2},\ A=-\frac{1}{2.3.},\ B'=\frac{1}{2.3.4},\ B=\frac{1}{2.3.4.5},\ C'=\frac{-1}{2.3.4.5.6},\ldots$$

Substituindo os valores de A, B, C,.., A′, B′, C′,... obteremos por ultimo

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3.\ldots.7}+\ldots\pm\frac{x^{2i+1}}{2.3\ldots(2i+1)}\ldots(G)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3..6}+\ldots\pm\frac{x^{2i}}{2.3..2i}\ldots(H)$$

Os termos geraes d'estas series resultam de $N'=\frac{-M}{2i}$, e de $N=\frac{N'}{2i+1}$, equações que mostram como os coefficientes d'uma das series se deduzem dos da mesma ordem da outra. Escolhe-se para estes termos o signal + ou —, conforme i é da fórma 2θ ou $2\theta+1$.

156. As fórmulas precedentes podem servir para achar as grandezas do seno e coseno d'um arco, cujo comprimento é x, e o raio de circulo a unidade. Representando por 2π a circumferencia, teremos

$\pi : x :: 180^\circ$: o numero t de gráos do arco $x=\frac{\pi t}{180}=\frac{t}{\mu}$, sendo o valor de μ, o que démos na Trigon. II. pag. 152.

Designando pois por t *o numero de gráos d'um arco* x, *as fórmulas* (G) e (H) tornam-se em

$$\operatorname{sen} x = At - Bt^3 + Ct^5, \ldots, \cos x = 1 - A't^2 + B't^4$$

cujos coefficientes são dados pelo calculo seguinte:

$\log A = \overline{2},24187\ 736759$	$\log C = \overline{11},13020559$	$\log E = \overline{22},61733$
$\log B = \overline{7},94748\ 0852-$	$\log D = \overline{17},990711-$	$\log F = \overline{25},05950-$
$\log A' = \overline{4},18272\ 47395-$	$\log C' = \overline{14},593932-$	$\log E' = \overline{25},85901-$
$\log B' = \overline{9},58729\ 823$	$\log D' = \overline{19},329498$	$\log F' = \overline{30},02219$

157. Porém o que ordinariamente nos serve não é o valor dos sen. e cos., porém sim os seus logarithmos. Seja δ a differença constante dos arcos da taboa que queremos construir; um arco qualquer t será $= n\delta$; logo

$$\operatorname{sen} x = n\delta\ (1 - \tfrac{1}{6} n^2\delta^2 \ldots), \cos x = 1 - \tfrac{1}{2} n^2\delta^2 + \ldots.$$

Façamos $\quad y = \dfrac{n^2\delta^2}{2.3} - \dfrac{n^4\delta^4}{2\ldots5}, z = \dfrac{n^2\delta^2}{2} - \dfrac{n^4\delta^4}{2.3.4.} \ldots,$

teremos $\operatorname{sen} x = n\delta\ (1 - y)$, $\cos x = 1 - z$; tomando os log. n'um systema qualquer, cujo modulo é M (n.° 154) acha-se

$$\operatorname{Log} \operatorname{sen} x = \operatorname{Log} r\delta - M\ (y + \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3 \ldots),$$

$$\operatorname{Log} \cos x = -M\,(z + \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 \ldots);$$

substituindo finalmente por y e z os seus valores, vem

$$\operatorname{Log} \operatorname{sen} x = \operatorname{Log}(n\delta) - \frac{M\delta^2}{2.3} n^2 - \frac{M\delta^4}{4.5.9} n^4 - \frac{M\delta^6}{9^2.5.7} n^6 \ldots\ldots$$

$$\text{Log cos } x = \quad -\frac{M\delta^2}{2}n^2 - \frac{M\delta^4}{3.4}n^4 - \frac{M\delta^6}{9.5}n^6 \ldots .$$

Se a base dos log. for 10, e se, como tem logar nas taboas de Callet, os arcos da taboa procederem de $10''$ em $10''$, δ será o comprimento do arco de $10''$, ou a 64800.ª parte da semicircumferencia π. Tomando os valores de π e M (n.° 159, 154) acha-se em resultado das operações,

$$\log \operatorname{sen} x = \log \delta + \log n - An^2 - Bn^4 \ldots, \quad \log \cos x = A'n^2 - B'n^4 \ldots .$$

$\log \delta = \overline{5}.68557\ 48668\ 23541$

$\log A = \overline{10},23078\ 27994\ 564$ $\qquad$ $\log B = \overline{20}.12481\ 12735$

$\log A' = \overline{10},70790\ 40492\ 84$ $\qquad$ $\log B' = \overline{19},30090\ 25326$

$\log C = \overline{30},29868\ 045$ $\qquad$ $\log D = \overline{40},54489\ 2$

$\log C' = \overline{28},09802\ 100$ $\qquad$ $\log D' = \overline{38},95143\ 2,$

Querendo, por ex., calcular o log. dos sen e cos do arco de $4.° \frac{1}{2}$ ou $16200''$, é então $n = 1620$.

$$\begin{array}{llllll}
\log \delta = & 5,68557487 & \log A = & \overline{10},2307828 & \log B = & \overline{20},1248113 \\
\log n = & 3,20951501 & \log n^2 = & 6,4190300 & \log n^4 = & 12,8380600 \\
\hline
- & 0.00044649 & & \overline{4},6498128 & & 8,9628713 \\
- & 0.00000009 & \multicolumn{4}{l}{\text{Subtráem-se os numeros correspondentes}} \\
\hline
 & \overline{2}.89464330 & = \log \operatorname{sen} 4.° 30' & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\log A' = & \overline{10}.7079041 & \log B' = & \overline{19}.3009025 & - & 0,00138947 \\
\log n^2 = & 6,4190300 & \log n^4 = & 12.8380600 & - & 0,00000138 \\
\hline
 & \overline{3},1269341 & & \overline{0},1389625 & - & 0,00034085
\end{array}$$

$$\text{Complemento} = \log \cos 4.° 30' \qquad = \overline{1},99865915$$

Querendo achar o log R $=10$, ajunctar-se-ha 10 ás caracteristicas (V.

Geom. An. n.° 210). Os log. das tang. e cot. obtêm-se por meio de simples subtracções.

Como n cresce cada vez mais, estas series não se podem empregar além de 12°, porque se tornam muito pouco convergentes. Não se faz mesmo uso d'ellas senão até 5.°; d'ahi por diante recorre-se ao seguinte processo:

Temos $$\frac{\operatorname{sen}(x+\delta)}{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen} x \cos \delta+\operatorname{sen} \delta \cos x}{\operatorname{sen} x}=$$

$$\cos \delta+\operatorname{sen} \delta \cot x=\cos \delta\,(1+\operatorname{tang} \delta \cot x);$$

tomando os logarithmos, o 1.° membro é a differença Δ entre os log. dos senos dos arcos $x+\delta$ e x, i. é,

$$\Delta=\log \cos \delta+\mathrm{M}\left(\operatorname{tang} \delta \cot x-\tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \cot^2 x+\ldots\right).$$

Raciocinando da mesma maneira a respeito de $\cos(x+\delta)$, acha-se que a differença entre os log. consecutivos dos cosenos é

$$\Delta'=\log \cos \delta-\mathrm{M}\left(\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} x+\tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \delta \operatorname{tang}^2 x+\ldots\right)$$

Querendo-nos limitar a 9 decimaes, e tomando $\delta=10''$, só o 1.° termo d'estas series dá algarismos significativos,

$$\Delta=\mathrm{M} \operatorname{tang} \delta \cot x, \quad \Delta'=-\mathrm{M} \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} x;$$

e temos $\log(\mathrm{M} \operatorname{tang} \delta)=\bar{5},32335\ 91788.$

Quando $\delta=1'$, temos $\log(\mathrm{M} \operatorname{tang} \delta)=\bar{4},10151\ 043.$

Por meio d'este artificio, partindo do arc $x=5.°$, do qual conhecemos o sen., o cos., a tang., e a cot., podemos calcular, seguidamente, todos os sen. e cos. por meio das suas differenças successivas Δ, Δ', de $10''$ em $10''$, ou ainda de $1'$ em $1'$, e por meio d'estes valores se acharão os das tang. e cot. Seja por ex.

$$\begin{array}{rr|r}
x=10°\,10'\,30'', & \log\cot x = 0.7459888 & \log\operatorname{tang} x = \bar{1}.2540112 \\
& \text{constante } \bar{5}.3233592 & \bar{5}.3233592 \\
\hline
& \bar{4}.0693480 & \bar{6}.5773704 \\
& \text{Diff. logarith. } \Delta = 0{,}00011731 & \Delta' = -0.000003779.
\end{array}$$

É de notar, como a pag. 281, que as quantidades Δ e Δ' são constantes durante uma certa extensão da taboa. A fim de evitar a accumulação d'erros, calcularemos préviamente os termos de certa em certa distancia, e estes servirão de ponto de partida.

A equação
$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
que dá
$$\log\operatorname{sen} 2x = \log 2 + \log\operatorname{sen} x + \log\cos x,$$

póde servir para este fim. Como sen $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45°$, podemos partir d'este arco e calcular $\operatorname{sen}(45° \pm 10'')$; nestes dous arcos complementares o seno de um corresponde reciprocamente ao cos. do outro; dos valores destas linhas deduzem-se as tang. e cot; e depois se passa para

$$45° \pm 20'',\ 45° \pm 30'',\ \text{etc.}$$

158. Comparando as series (G) e (H) com a eq. (B), vê-se que a sua somma é e^x, com a differença de signal nos termos de duas em duas ordens; ora se mudarmos x em $\pm x\sqrt{-1}$ no desinvolvimento (B) de e^x, como $\sqrt{-1}$ tem por potencias $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1$, as quaes se

reproduzem até ao infinito, acha-se que os signaes dos termos são os mesmos que nas series (G) e (H); d'onde se conclue

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} x \ldots (I)$$

Sommando e subtrahindo estas duas equações, vem

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},\ \operatorname{sen} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots (K);$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{\left(e^{2x\sqrt{-1}} + 1\right)\sqrt{-1}},$$

multiplicando ambos os termos por $e^{x\sqrt{-1}}$. Estas expressões devem considerar-se simplesmente como resultados analyticos, nos quaes os imaginarios são apenas apparentes, advertindo que elles devem desapparecer por um calculo identico.

Finalmente mudando x em nx em (I), vem

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos nx \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} nx ; \ldots . (L)$$

mas o primeiro membro é a potencia n da equação (I); logo para qualquer valor de n será

$$\cos nx \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} nx = (\cos x \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} x)^n \ldots . (M)$$

Estas fórmulas são muito usadas. Limitar-nos-hemos aqui a applical-as á resolução dos triangulos. Façamos

$$z = e^{C\sqrt{-1}},\ z' = e^{-C\sqrt{-1}};$$

será $\qquad \cos C = \frac{1}{2}(z+z'), \quad \sqrt{-1}.\ \text{sen}\, C = \frac{1}{2}(z-z').$

Sejam A, B, C os tres angulos d'um triangulo, e a, b, c os lados que lhes ficam respectivamente oppostos: teremos

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A = b \text{ sen } (B+C);$$

e por conseguinte

$$\frac{\text{sen } B}{\cos B} = \text{tang } B = \frac{b \text{ sen } C}{a - b \cos C};$$

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}}-1}{e^{2B\sqrt{-1}}+1} = \frac{b(z-z')}{2a - b(z+z')},\ e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a-bz'}{a-bz}.$$

Finalmente (eq. D)

$$2B\sqrt{-1} = 1(a-bz') - 1(a-bz)$$

$$= \frac{b}{a}\left(z - z'\right) + \frac{b^2}{2a^2}\left(z^2 - z'^2\right) + \frac{b^3}{3a^3}\left(z^3 - z'^3\right)\ldots.$$

Porém a fórmula (L) dá

$$z^m = \cos mC + \sqrt{-1} \text{ sen } mC,\ z'^m = \cos mC \mp \sqrt{-1} \text{ sen } mC;$$