Geometria no Espaço

Martins Ribeiro

[illegible]

Materias que constituem esta Bibliotheca

1.ª SERIE — **Elementos Geraes**

1-Desenho linear.
2-Arithmetica pratica.
3-Algebra elementar.
4-Geometria plana e suas applicações.
5-Elementos de Phisica.
6-Elementos de Chimica.
7-Elementos de Electricidade.
8-Elementos de Mecanica.
9-Geometria no espaço.
10-Elementos de projecções.
11-Sombras e perspectiva.
12-Applicações e traçados praticos das projecções, penetrações, sombras, etc.
13-Trabalhos manuaes.

2.ª SERIE — **Mecanica**

1-Desenho de Machinas.
2-Nomenclatura de Caldeiras de vapor.
3-Nomenclatura de Machinas de vapor.
4-Problemas de Machinas.
5-Phisica Industrial.
6-Chimica Industrial.
7-Motores especiaes.

3.ª SERIE — **Construcção Civil**

1-Elementos de Architectura.
2-Materiaes de Construcção.
3-Construcções Civis.
4-Arte decorativa e Estylos.
5-Estylisação, composição e ornamentação.

4.ª SERIE — **Construcção Naval**

1-Construcção Naval.
2-Materiaes de construcção e processos de ligação.
3-Construcção de navios.
4-Historia da construcção naval

5.ª SERIE — **Manuaes de officios** (em formato apropriado

1-Conductor de Machinas.
2-Torneiro mecanico.
3-Forjador.
4-Fundidor.
5-Serralheiro e Montador.
6-Caldeireiro.
7-Electricista.
8-Carpinteiro Civil.
9-Marceneiro.
10-Entalhador.
11-Modelador, formador e estucador.
12-Pintor e Decorador.
13-Pedreiro ou trolha.
14-Canteiro.
15-Tintureiro.
16-Sapateiro.
17-Selleiro e correeiro.
18-Fiandeiro e tecelão.
19-Funileiro.
20-Encadernador.
21-Tanoeiro.

6.ª SERIE — **Conhecimentos geraes de diversas industrias, etc.**

1-A Hulha.
2-Metallurgia.
3-Fiação e Tecelagem.
4-Industria de Illuminação.
5-Industria do Vidro.
6-Industria do Papel.
7-Industria Ceramica.
8-Industrias de alimentação.
9-Industria do alcool, cerveja, licores, etc.
10-Industria do Azeite, Oleos, Sabões e Adubos.
11-Industria da Borracha.
12-Industria de Relojoaria
13-Galvanoplastia.
14-Industria de Chapelaria.
15-Artes graphicas.
16-Photographia Industrial.
17-Hygiene das officinas.
18-Escripturação industrial.
19-Inventos Modernos.
20-Leis do trabalho e ensino industrial.

BIBLIOTHECA

de

Instrucção profissional

GEOMETRIA NO ESPAÇO

LISBOA
Bibliotheca de Instrucção Profissional
CALÇADA DO FERREGIAL, 6, 1.º

Typ. — R. Ivens, 45, 47 — Lisboa

BIBLIOTHECA DE INSTRUCÇÃO PROFISSIONAL

Elementos de geometria no espaço e suas applicações

PREFACIO

O presente livro, *Elementos de Geometria no Espaço e suas Applicações,* vem completar, tanto quanto é possivel nos limites d'esta Bibliotheca, o ensino da geometria elementar.

A parte theorica occupa naturalmente um logar importante n'esta obra, mas tivemos o maior cuidado em tornar as demonstrações tão simples e claras que, sem lhe alterar o rigor, ficaram certamente ao alcance de todos.

Alem das indispensaveis noções preliminares, tratamos em varios capitulos das linhas relativamente aos planos, dos angulos diedros e polyedros, dos polyedros em geral, das superficies curvas, das areas e volumes dos solidos, terminando por simples e breves noções sobre alinhamentos.

As pessoas que, no desempenho de uma profissão qualquer, se interessem mais particularmente pelo lado pratico do assumpto, terão tambem vantagem na consulta d'este livro, porque as numerosas applicações de geometria que n'elle se encontram, foram com esse fim, objecto muito especial da nossa attenção.

A. Cunha Rosa,
Professor da Escola Industrial Affonso Domingues.

NOÇÕES PRELIMINARES

1 — **Plano.** — Todas as figuras de que tratámos na geometria plana e cujas propriedades estudámos, perpendiculares, parallelas, polygonos, etc. — podem ser traçadas sobre uma folha de papel ou a giz sobre o quadro, considerando-se geometricamente, *no mesmo plano.*

Já tivemos occasião de dar uma idéa do plano, quando definimos rectas parallelas; comtudo vamos exemplificar mais precisamente:

Um tecto, um soalho, o tampo d'uma meza, um muro, a superficie da agua contida n'um vaso, são outros tantos exemplos de *planos,* ou de *superficies planas.* Se collocarmos uma regua sobre estas diversas superficies, ajustar-se-ha perfeitamente em todos os seus pontos e em todas as direcções; mas a regua não é de certo modo, senão a representação d'uma linha recta, vê-se portanto, que, *um plano é uma superficie sobre a qual podem ser traçadas linhas rectas em todas as direcções.*

Tomando dois pontos quaesquer sobre um quadro ou sobre uma folha de papel, unindo-os por uma linha recta e prolongando esta em ambos os sentidos, ella não sairá nem do quadro nem da folha de papel se suppozermos estas superficies igualmente prolongadas tanto quanto se deseje.

Não succede porém o mesmo quando se tomam dois pontos quaesquer sobre uma bola, e se unem por uma linha recta. Esta linha penetra no interior da bola, sae d'ella quando prolongada em qualquer dos sentidos, e não tem de commum com a superficie senão os dois pontos que se tomaram sobre ella. Pode-se pois ainda dizer que: *o plano é uma superficie que contem uma linha recta em toda a sua extensão, quando essa linha n'ella tenha dois dos seus pontos.*

2 — O plano tem uma extensão illimitada, porém, para fixar idéas e facilitar as demonstrações, representa-se ordinariamente por um parallelogrammo traçado sobre a sua superficie.

3 — Quando um *plano* contem uma recta, pode-se fazer com que elle gire em torno d'essa recta como se faria girar uma porta sobre

os seus gonzos, e dar-lhe uma infinidade de posições. N'este movimento, o *plano* passa successivamente por todos os pontos do espaço.

4 — O *plano* póde considerar-se gerado pelo movimento d'uma recta escorregando por cima de outras duas que se cortam ou que são parallelas.

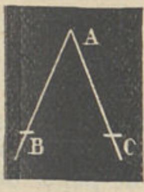


Fig. 1

O medidor de trigo, que pega da razoura e arraza a medida, fazendo escorregar a razoura por dois bordos parallelos, faz plana a face superior da mesma medida.

Do mesmo modo, o moldador de tijolos, fazendo escorregar a sua razoura por cima de dois bordos do molde, fórma a superficie plana do tijolo.

Assim diz-se, *que duas rectas parallelas*, ou *duas rectas que se cortam, determinam um plano.*

Ora, tres pontos, não situados em linha recta, determinam exactamente duas rectas que se cortam. Taes são, por exemplo, *B A* e *C A fig. 1.*

Logo, *tres pontos, não situados em linha recta, determinam um plano.*

I

DAS LINHAS RELATIVAMENTE AOS PLANOS

5 — As linhas rectas, exteriores a um plano, podem ser *perpendiculares ao plano, obliquas* ou *parallelas.*

Suspendendo livremente um fio de prumo sobre a superficie da agua em repouso, vê-se que o fio não se inclina mais para um lado do que para o outro em relação á mesma superficie. Diz-se então que o fio é perpendicular ao plano liquido.

Se imaginarmos prolongado o fio de prumo, elle irá passar pelo centro da terra. E' a esta direcção que se dá o nome de *vertical*, e á das superficies das aguas em repouso, que lhe é perpendicular, o de *horizontal.*

Um poste telegraphico, por exemplo, eleva-se verticalmente acima do solo horizontal. Mas o plano póde ter uma direcção qualquer e então as perpendiculares ao plano não são verticaes. Assim, se fixarmos sobre uma prancheta, collocada horisontalmente, uma agulha seguindo a direcção do fio de prumo, ella será perpendicular á prancheta, e não o deixará de ser, seja qual fôr a direcção da prancheta.

Da mesma fórma, os pés d'uma meza são sempre perpendiculares ao tampo, mesmo quando a meza esteja voltada de lado.

O ponto onde a agulha está fixada á prancheta, denomina-se *pé da perpendicular*. Se tirarmos por este ponto, e sobre a prancheta, linhas rectas em todas as direcções, a agulha fica perpendicular a cada uma d'estas rectas. Portanto, póde dizer-se que *uma recta é perpendicular a um plano quando é perpendicular a todas as rectas que n'esse plano passam pelo seu pé.* N'este caso diz-se tambem que o *plano é perpendicular á recta.*

Assim, para verificarmos se uma recta é perpendicular a um plano, basta encostar á recta um dos lados do angulo recto do esquadro, e fazer girar este em volta da recta; se o outro lado do angulo se ajustar sempre de leve com o plano, e o esquadro girar livremente, a recta será perpendicular ao plano.

Uma recta é *obliqua sobre um plano, quando é obliqua a uma só ou a algumas rectas existentes no plano e que passam pelo seu pé.* N'este caso diz-se tambem que *o plano é obliquo á recta.*

Na *fig.* 2, a recta A B é perpendicular ao plano M N, a recta A' B é obliqua a esse mesmo plano e o ponto B denomina-se *pé* da perpendicular, bem como da obliqua.

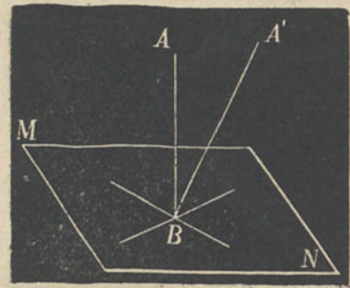


Fig. 2

6 — A distancia que vae de um ponto a um plano, mede se pela perpendicular baixada d'esse ponto sobre o plano.

Assim a distancia que vae do ponto A ao plano M N, *fig.* 2, é representada pela perpendicular A B, que se medirá com a unidade linear (metro) seus multiplos e submultiplos.

7 — Todo o plano que passa por uma linha vertical, *fig.* 3, diz-se *plano vertical*, e o que é perpendicular á vertical diz-se *plano horizontal*.

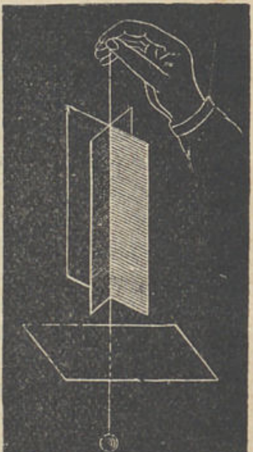


Fig. 3

8 — Um certo numero de principios da geometria plana tem os seus analogos na geometria no espaço, como, por exemplo, aquelles que se referem á perpendicular e ás obliquas.

Assim:

8 — *Se de um ponto, fóra de um plano, se tiram para esse plano diversas obliquas e a perpendicular:*

1.º A perpendicular é menor que as obliquas;

2.º As obliquas que distam igualmente do pé da perpendicular são iguaes;

3.º As obliquas que se desviam desigualmente do pé da perpendicular são desiguaes, e é maior aquella que se desvia mais.

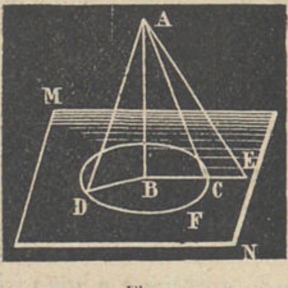


Fig. 4

1.º — Sejam A B a perpendicular e A C uma obliqua ao plano M N. *fig.* 4.

No plano A B C determinado pelas duas rectas, A B é perpendicular a B C (5) e A C é obliqua, portanto, *(41 g, p.)* A B < A C.

2.º — Sejam A C e A D duas obliquas equidistantes do pé da perpendicular A B, isto é, seja B C = B D *fig.* 4.

Os dois triangulos A B C e A B D têem o lado A B commum, os lados B C e B D iguaes, por hypothese, e os angulos A B C e A B D iguaes por serem rectos; são pois iguaes estes triangulos, visto terem dois lados iguaes bem como o angulo por elles formado; portanto, A C = A D.

3.º — Sejam A D e A E, *fig. 4*, duas obliquas desigualmente afastadas do pé da perpendicular A B, isto é, B E > B D, diremos que, A E > A D.

Tome-se sobre B E um comprimento B C igual a B D e una-se A com C. No plano A B E, as duas obliquas A C e A E estando desigualmente affastadas do pé da perpendicular A B, será A E > A C *(42 g. p.)*; mas, A C é igual a A D, pela segunda parte d'este principio; logo, A E > A D.

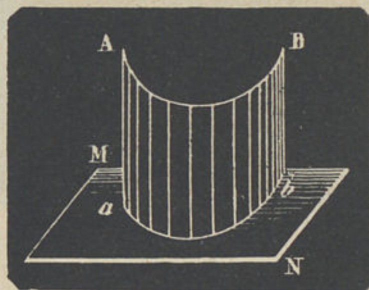


Fig. 5

9 — *Os pés das obliquas iguaes, tiradas d'um ponto para um plano, estão situados sobre uma circumferencia, cujo centro é o pé da perpendicular baixada do ponto sobre o plano.*

A perpendicular ao plano d'um circulo tirada pelo centro chama-se *eixo do circulo*.

Tem este principio uma applicação immediata; serve para baixar de um ponto uma perpendicular sobre um plano. Seja A o ponto dado *fig. 4* e M N o plano; fixe-se ao ponto A uma das extremidades de um cordel, torne-se este bem tenso dando-lhe uma direcção obliqua qualquer A C e com a outra extremidade marque-se sobre o plano tres pontos differentes C, D e F. O centro da circumferencia, passando por estes tres pontos, será o pé da perpendicular pedida.

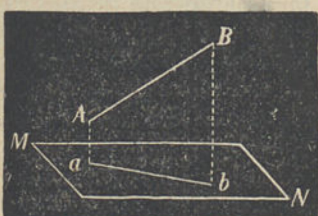


Fig. 6

10 — *Projecção orthogonal de um ponto* sobre um plano é o pé da perpendicular baixada d'esse ponto sobre o plano.

Assim, *fig. 5*, *a* é a projecção do ponto A sobre o plano M N.

O plano M N chama-se *plano de projecção*, a perpendicular A*a* é a projectante do ponto A.

Projecção orthogonal de uma linha A B sobre um plano M N, *fig. 5*, é o logar geometrico *ab* das projecções de todos os seus pontos. Se a linha dada fôr recta, basta n'esse caso unir as projecções dos dois extremos, *fig. 6*. Assim, *ab* é a projecção da recta A B sobre o plano M N.

Em geral a projecção d'uma figura sobre um plano é a figura formada pelas projecções de todos os seus pontos sobre esse plano.

11 — Quando uma recta é obliqua a um plano a sua *inclinação* mede-se em graus, pelo angulo que essa recta forma com a sua projecção. Assim, a inclinação da recta A B, *fig. 7*, sobre o plano M N é representada pelo angulo B A b. Este angulo é o menor que a obliqua póde formar com uma recta tirada no plano pelo seu pé.

12 — Uma recta que, por mais que seja prolongada, não encontra um plano, diz-se *parallela* a esse plano, *fig. 8*, e reciprocamente, o

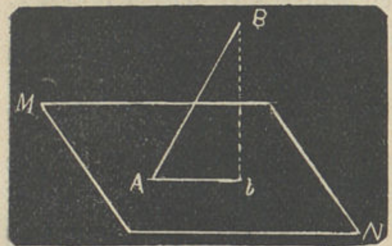


Fig. 7

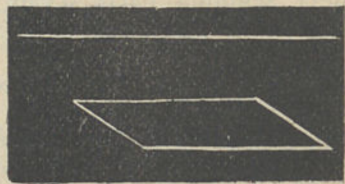


Fig. 8

plano diz-se parallelo á recta. Assim, cada uma das linhas que formam o contorno d'uma meza rectangular é parallela ao soalho, bem como este, parallelo áquellas linhas.

Applicações

13 — *Por um ponto dado sobre um plano levantar praticamente uma perpendicular a esse plano.*

Duplo esquadro. — Resolve-se facilmente este problema empregando o duplo esquadro ou esquadro de dois ramos, *fig. 9*, formado de dois esquadros ordinarios A O B e A O C, unidos por um dos lados do angulo recto. Fazendo escorregar este instrumento sobre o plano M N de maneira que os dois lados O B e O C coincidam com este plano e que o vertice O esteja sobre o ponto dado, a recta A O será perpendicular ao plano M N, visto ser perpendicular ás rectas O B e O C que passam pelo seu pé n'esse plano.

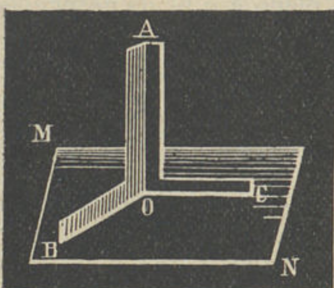


Fig. 9

14 — **Methodo dos tres cordeis.** — Tracem-se pelo

ponto O no plano M N *fig. 10*, duas rectas O A e O B de tres unidades de comprimento cada uma; fixem-se nos pontos A e B dois cordeis de cinco unidades cada um, e, no ponto O, um terceiro cordel de quatro unidades e reunam-se n'um ponto C as extremidades livres dos tres cordeis tornando-os bem tensos; o cordel O C indicará a direcção da perpendicular ao plano M N tirada pelo ponto O.

Com effeito tem-se

$$5^2=4^2+3^2$$

O que prova que os triangulos A O C e B O C são rectangulos em O; a recta O C sendo perpendicular ás duas rectas O A e O B que passam pelo seu pé no plano M N, é perpendicular a esse plano.

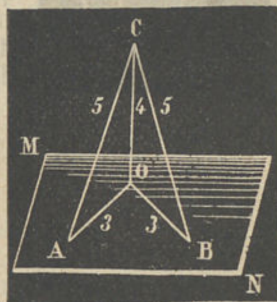


Fig 10

15 — *De um ponto fóra de um plano, baixar a perpendicular a esse plano.*

1.º — Ou o plano é horisontal; e n'esse caso o fio de prumo, lançado d'esse ponto dado, determinará a perpendicular pedida;

Ou o plano não é horisontal; e então póde-se empregar o duplo esquadro, *fig. 9.* que se faz escorregar sobre o plano até que o lado O A passe pelo ponto dado; este lado indica então a direcção da perpendicular pedida.

Se o lado O A não tem comprimento sufficiente, recorre-se ao methodo indicado no numero 9.

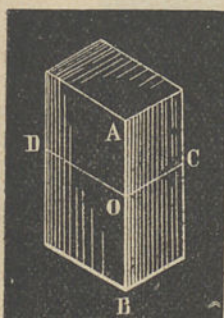


Fig. 11

16 — *Tirar por um ponto dado sobre uma recta um plano perpendicular a essa recta.*

Sejam A B a recta dada e O o ponto sobre a recta, *fig. 11.* Do ponto dado O, levantem-se duas perpendiculares encruzadas O C e O D, e o plano por ellas determinado será o plano pedido.

17 — *Por um ponto fóra d'uma recta tirar um plano perpendicular a essa recta.*

Sejam A B a recta dada e D o ponto exterior, *fig. 11.* N'este caso, do ponto D baixe-se uma perpendicular á recta, e do pé d'esta levante-se outra encruzada O C; o plano determinado pelas duas perpendiculares D O e O C será o plano procurado.

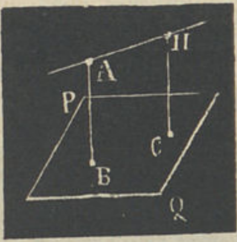


Fig. 12

18 — *De um ponto fóra de um plano, conduzir uma parallela ao plano.*

Do ponto dado A, *fig. 12*, baixe-se uma perpendicular A B ao plano dado P Q; e de outro ponto C, segundo a direcção em que se queira a parallela, levante-se outra perpendicular ao plano, igual á primeira. A recta A H, determinada pelo ponto A e pela extremidade da perpendicular C H, será a parallela pedida.

II

ANGULOS DIEDROS E POLYEDROS

19 — Dois planos dizem-se *parallelos,* quando, por mais que sejam prolongados, nunca se encontram, *fig. 13.*

Assim, o tecto e o sobrado d'uma sala, representam em geral dois planos parallelos. Se estes forem horisontaes, serão perpendiculares ao fio de prumo. O fio de prumo representa portanto uma linha, á

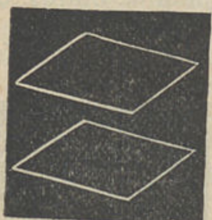


Fig. 13

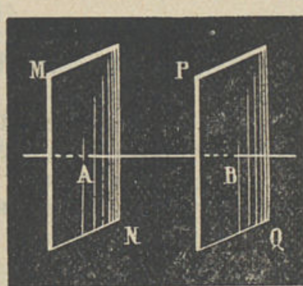


Fig. 14

qual os dois planos são perpendiculares: póde-se pois dizer que *dois planos perpendiculares á mesma recta são parallelos.* Assim os dois planos M N e P Q, *fig. 14*, perpendiculares á mesma recta A B são parallelos.

20 — O encontro ou córte de cada uma das paredes d'uma sala com o tecto e sobrado são linhas parallelas, porque, além de estarem no mesmo plano, não se podem encontrar sem que o tecto e o sobrado se encontrem. Diz-se pois que *se dois planos parallelos forem cortados por um terceiro*, *fig. 15*, *as intersecções serão parallelas.* Assim as intersecções A B e C D, dos dois planos parallelos M N e P Q, pelo plano R S, são parallelas.

21 — Os tectos das officinas e dos armazens são frequentemente sustentados por columnas de ferro do mesmo comprimento. Se imaginarmos essas columnas reduzidas a simples linhas, poder-se-ha dizer

que, *as perpendiculares communs a dois planos parallelos e comprehendidas entre elles, são iguaes e medem a distancia d'um ao outro.*

Assim as perpendiculares A B e C D, *fig. 16*, aos dois planos parallelos M N e P Q são iguaes, e qualquer d'ellas mede a distancia entre elles.

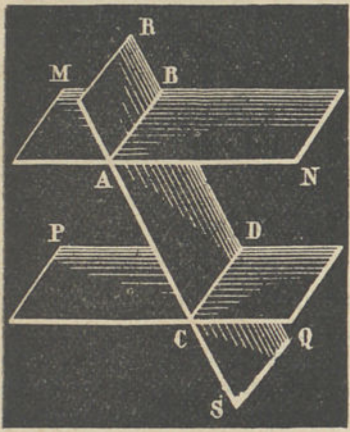


Fig. 15

22 — Quando dois planos não são parallelos, diz-se *angulo diedro* a porção indefinida de espaço comprehendida entre elles. A recta A B, *fig. 17*, segundo a qual os dois planos se interceptam, chama-se *aresta* e os dois planos chamam-se *faces*. Designa-se um diedro por quatro letras, duas collocadas na aresta e uma em cada face. Na enunciação as letras da aresta são lidas no meio das outras duas; ou então enuncia-se o angulo lendo apenas as duas letras da aresta, quando esta não é commum a outros diedros. Assim diz-se: angulo diedro M A B N ou o diedro A B.

Obtem-se facilmente um angulo diedro tomando uma folha de papel dobrada em duas. Se entre-abrirmos a folha, obteremos um angulo diedro maior ou menor, segundo augmentar ou diminuir o affastamento das duas meias folhas. Cada meia folha é uma face e a dobra a aresta.

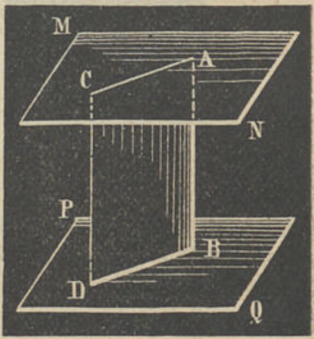


Fig. 16

As duas paredes d'uma casa concorrendo a um canto, formam um angulo diedro. O canto ou a esquina é a aresta e as paredes as faces.

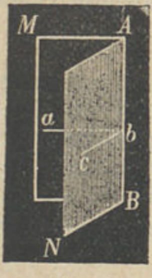


Fig. 17

23 — Diz-se *rectilineo* de um diedro o angulo formado por duas perpendiculares á aresta, levantadas pelo mesmo ponto d'ella, cada uma em sua face. Assim, *fig. 17*, se pelo ponto b e em cada uma das faces do diedro se tiram duas perpendiculares ab e cb á aresta A B, o angulo *abc* é o rectilineo do diedro A B.

Os diedros são medidos pelo numero de graus dos respectivos rectilineos.

24 — Um diedro póde imaginar-se gerado pelo movimento de uma das faces B N suppondo-a primeiro applicada sobre a face

A M, *fig. 18*, e depois movendo-se em torno da aresta A B sempre no mesmo sentido. N'esta rotação, o plano movel B N fórma com o plano fixo A M, um angulo diedro crescente.

A grandeza de um angulo diedro depende pois da posição e não da grandeza das faces. Dois diedros dir-se-hão iguaes, quando assentando uma face de um sobre uma face do outro, de modo que as arestas coincidam, as outras duas faces tomam a mesma direcção; quando assim não succeda os angulos dir-se-hão desiguaes, e será maior aquelle dentro do qual cahir a segunda face do outro angulo.

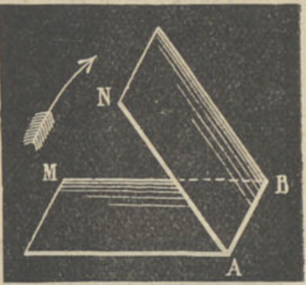


Fig. 18

25 — Dois diedros dizem-se *adjacentes*, quando têem a mesma aresta, uma face commum e as outras duas situadas de um e outro lado da face commum.

Taes são os angulos diedros M A B N e N A B P, *fig. 19*.

26 — Um plano é *perpendicular* a outro, quando cahindo sobre elle fórma dois diedros adjacentes iguaes. Assim, *fig. 20*, o plano A R é perpendicular ao plano M N se o diedro M A B R fôr igual ao diedro N A B R. N'este caso os diedros dizem-se *rectos*.

Angulo diedro recto é o que tem as suas faces perpendiculares entre si.

Como todos os angulos diedros rectos são iguaes, porque o são

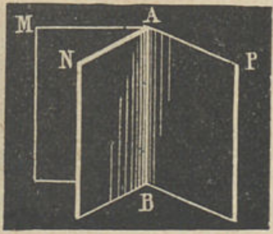


Fig. 19

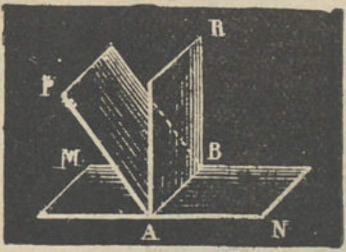


Fig. 20

os seus rectilineos, vê-se que, o angulo diedro recto é uma quantidade fixa á qual se podem comparar todos os angulos diedros.

Um plano diz-se *obliquo* a outro, quando cahindo sobre elle forma dois diedros adjacentes desiguaes, *fig. 20*, um, M A B P, agudo, e outro, N A B P, obtuso.

Diedro agudo é o diedro menor que um diedro recto.

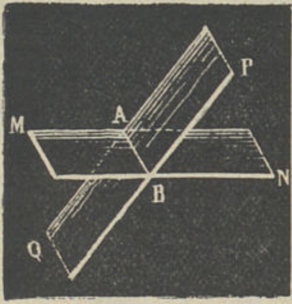
Diedro obtuso é o diedro maior que um diedro recto.

Diedros complementares são os diedros cuja somma vale um diedro recto.

Diedros suplementares são os diedros cuja somma vale dois diedros rectos.

Assim os angulos M A B P e R A B P, *fig. 20*, são complementares; e os angulos M A B P e P A B N supplementares.

27 — Se fôr dado um angulo diedro e prolongarmos as suas faces além da aresta, formaremos um segundo angulo diedro igual ao primeiro. Estes dois angulos denominam-se *oppostos pela aresta*. Taes são os angulos P A B N e M A B Q, *fig. 21*, bem como M A B P e N A B Q.



Fjg. 21

28 — Denomina-se *angulo polyedro* ou *angulo solido* a figura formada por tres ou mais planos, que se encontram no mesmo ponto.

Este ponto é o *vertice* do angulo solido.

Faces de um angulo solido são os angulos planos que o formam.

Arestas são as intersecções das faces.

Assim, a *fig. 22*, representa um *angulo polyedro* ou *angulo solido*, em que S é o vertice, os angulos A S B, B S C, C S D, D S A as faces, e as rectas S A, S B, S C, S D as arestas.

Designa-se um angulo polyedro pela letra do vertice, seguida das letras collocadas sobre as arestas, ou então sómente pela letra do vertice, quando este não é commum a outros angulos. Assim, *fig. 22*, dir-se-ha o angulo solido S A B C D, ou o angulo solido S.

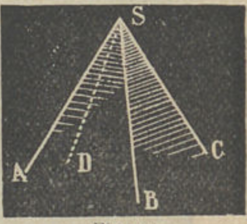


Fig. 22

De todos os angulos polyedros ha um que tem nome particular, é o angulo polyedro de tres faces, *fig. 23*, que se chama *angulo triedro*, ou simplesmente *triedro*.

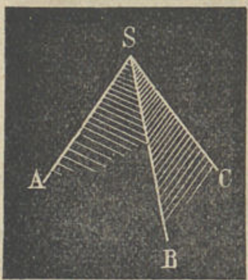


Fig. 23

Tres faces de um dado, ou tres planos de uma sala, (duas paredes e o chão, por exemplo), concorrendo a um canto formam um *triedro*.

Todos os outros angulos polyedros se distinguem pelo numero das faces. Assim, diz-se um angulo polyedro de quatro faces, de cinco faces, etc.

III

POLYEDROS

1.º — Definições

29 — Vimos na geometria plana que cada objecto ou cada corpo occupa um certo espaço que se denomina o seu volume. Assim se diz, o volume d'uma arvore, d'uma pedra ou de um monte de saibro. A geometria não se occupa das propriedades da pedra ou das qualidades da madeira; é como se a substancia do corpo não existisse; trata apenas das superficies que o limitam e o separam do resto do espaço. Se se trata, por exemplo, d'uma sala, d'uma caixa, d'uma gaveta, etc., emprega-se igualmente a denominação de volume para designar a capacidade da sala, da caixa ou da gaveta, etc. N'este caso porem o volume é o do ar encerrado pelas suas paredes. Diz-se ainda: o volume, quando se falla da quantidade d'agua contida n'um reservatorio.

Aos volumes dos corpos massiços, dá-se mais particularmente a denominação de *solidos*, e a de *capacidade* quando se trata de corpos ôcos.

Os volumes têem fórmas diversas como as superficies; mas, assim como a medida d'uma superficie qualquer se obtem decompondo-a n'um certo numero de superficies elementares, taes como o triangulo, o trapezio, etc., assim tambem os diversos volumes podem ser decompostos n'outros mais simples e por assim dizer primitivos, dos quaes nos vamos occupar.

Fig. 24

30 — Diz-se *polyedro*, *fig. 24*, o solido terminado em todos os sentidos por superficies planas. Os planos que o limitam chamam-se *faces;* as intersecções de duas faces contiguas *arestas;* os pontos communs a tres ou mais arestas *vertices*, os angulos solidos formados pelas faces que concorrem no mesmo ponto, *angulos do polyedro*, e as rectas que o atravessam para unirem dois vertices não situados na mesma

face *diagonaes*. *Plano diagonal* é o plano que passa por tres vertices não situados na mesma face.

Polyedro convexo é o que fica todo do mesmo lado de qualquer das suas faces prolongada indefinidamente.

Polyedros isoedros são os que têem as faces todas iguaes entre si.

Polyedros equiangulos são os que têem os angulos solidos todos iguaes entre si.

Os polyedros têem diversas denominações, segundo o numero das suas faces. Assim, o de quatro faces, que é o mais simples de todos, diz-se *tetraedro*, o de cinco *pentaedro*, o de seis *hexaedro*, o de oito *octaedro*, o de doze *dodecaedro*, o de vinte *icosaedro*. Os outros designam-se pelo numero das faces. O polyedro representado na *fig. 24* é um *octaedro*.

2. — Polyedros regulares

31 — Da mesma fórma que ha polygonos regulares, assim existem polyedros regulares. Os primeiros têem todos os seus lados bem como todos os angulos iguaes; os segundos têem todas as suas faces, que são polygonos regulares, iguaes entre si, e ainda todos os angulos diedros iguaes.

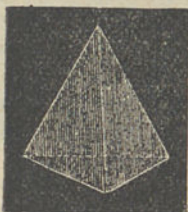


Fig. 25

Todo o polygono regular póde ser inscripto e circumscripto a um circulo; assim tambem, todo o polyedro regular póde ser inscripto e circumscripto a uma esphera.

O raio da esphera inscripta n'um polyedro regular é o apothema d'esse polyedro.

32 — O numero de polygonos regulares é infinito, não succede porém o mesmo aos polyedros regulares cujo numero é apenas de cinco, o que é facil de provar formando angulos solidos com polygonos regulares.

Tomemos triangulos equilateros em que cada angulo vale, como se sabe, 60 graus. Grupemos primeiramente tres em torno do mesmo vertice, visto ser este o menor numero preciso para formar um angulo solido. Obtem-se assim um angulo triedro formado de tres angulos planos de 60 graus. Para formar o volume basta apenas collocar uma quarta face que é como as outras um triangulo equilatero. O polyedro regular assim obtido de quatro faces triangulares, *fig. 25* é o *tetraedro regular*.

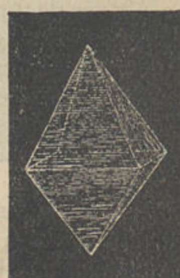


Fig. 26

Grupemos em seguida quatro d'estes triangulos de maneira a formar um angulo de 4 faces de 60°, o que ainda é possivel. Reunindo dois d'estes angulos solidos, teremos o polyedro regular de oito faces triangulares ou o *octaedro regular*, *fig. 26*.

Cinco triangulos equilateros grupados em torno d'um ponto, formarão um angulo solido com cinco faces de 60°, e quatro d'estes angulos adaptados pelos seus limites pentagonaes darão logar ao polyedro regular de vinte faces triangulares, *fig. 27*, ou *icosaedro regular*.

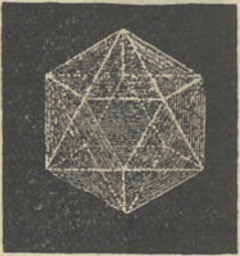


Fig. 27

Não se póde ir além d'este numero com triangulos equilateros: com effeito, seis d'estes triangulos reunidos em torno do mesmo ponto não podem formar um angulo polyedro, porque 6 vezes 60° é igual a 360° ou quatro angulos rectos, e os triangulos assim reunidos formariam uma superficie plana.

Existem pois tres polyedros regulares cujas faces são triangulos equilateros: estes são o *tetraedro*, o *octaedro* e o *icosaedro*.

Grupemos agora quadrados: tres quadrados reunidos em torno d'um ponto formam um triedro recto, e dois d'estes triedros adaptados pelos seus limites dão origem ao *cubo* ou *hexaedro* regular, *fig. 28*.

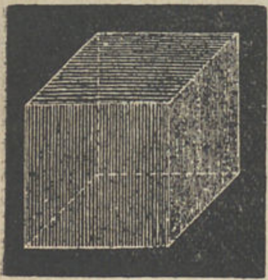


Fig. 28

Não é possivel grupar quatro quadrados, porque esse agrupamento formava quatro angulos rectos em torno do mesmo ponto e por consequencia uma superficie plana.

Grupemos pentagonos regulares cujo angulo interno vale 108°. Tres d'estes polygonos reunidos formarão um angulo triedro no qual os tres angulos são de 108°; $3 \times 108 = 324$, numero menor que 360.

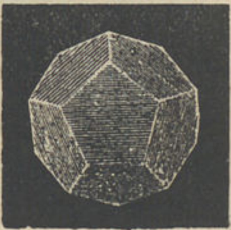


Fig. 29

Quatro agrupamentos semelhantes, convenientemente unidos, darão logar ao *dodecaedro regular* ou polyedro de doze faces, *fig. 29*.

O pentagono regular é o polygono de maior numero de lados com que se podem construir polyedros regulares, porque o angulo interno do hexagono regular é de 120°, $3 \times 120 = 360$, e não é possivel formar um triedro com angulos de 120°. Com mais forte razão se não pódem empregar polygonos d'um maior numero de lados.

Entre os polyedros não regulares têem importancia especial os denominados *prismas* e *pyramides*.

3.° — Prismas

33 — Dá-se o nome de *prisma* ao polyedro que tem por bases

dois polygonos iguaes e parallelos, e cujas faces lateraes são parallelogrammos, *fig. 30*.

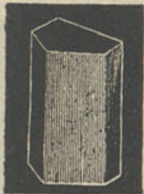


Fig. 30

Bases do prisma são os dois polygonos iguaes e parallelos.

As faces lateraes são tantas quantos os lados das faces.

As arestas lateraes são as arestas communs ás bases lateraes.

Arestas das bases são as arestas communs ás faces lateraes e ás bases. Todas as arestas lateraes são iguaes, como parallelas comprehendidas entre planos parallelos.

Os prismas dizem-se *triangulares, quadrangulares, pentagonaes*, etc., segundo as bases são triangulos, quadrilateros, etc.

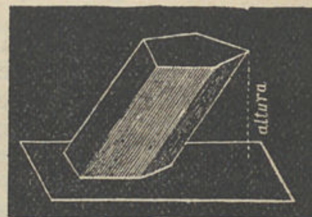


Fig. 31

Altura d'um prisma é a distancia entre as suas bases, medida pela perpendicular baixada de qualquer dos pontos da superior sobre o plano da inferior.

Diz-se *prisma recto, fig. 30*, aquelle cujas arestas lateraes são perpendiculares á base, e *obliquo, fig. 31* aquelle cujas arestas lateraes, parallelas entre si, são obliquas á base.

Um prisma diz-se *regular*, quando, além de ser recto, as bases são polygonos regulares.

Eixo de um prisma é a recta que une os centros das bases.

Fig. 32

A porção de prisma comprehendida entre a base e uma secção feita por um plano obliquo á base, diz-se *tronco de prisma* ou *prisma truncado, fig. 32*.

Secção recta de um prisma é a secção feita por um plano perpendicular ás arestas.

34. — O prisma cujas bases são parallelogrammos tem o nome especial de *parallelipipedo, figs. 33 e 34*.

Este polyedro é um hexaedro e as seis faces que o terminam são parallelogrammos.

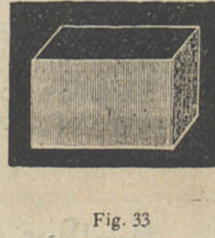


Fig. 33

Parallelipipedo obliquo é aquelle cujas arestas lateraes são obliquas ás bases.

Parallelipipedo recto é aquelle cujas arestas lateraes são perpendiculares ás bases, *figs. 33 e 34*.

Diz-se *parallelipipedo rectangulo, fig. 33*, aquelle que além de ser recto, tem por base um rectangulo. É claro que n'este caso todas as seis faces são rectangulos.

Cubo é o parallelipipedo rectangulo, cujas bases e faces lateraes são todas quadrados, *fig. 34*.

Rhomboedro é o parallelipipedo obliquo cujas bases e faces lateraes são losangos.

Póde-se dizer que o parellipipedo é entre os volumes o que o parallelogrammo é entre as superficies. Basta com effeito cortar n'uma placa ou n'uma prancha de madeira um fragmento em fórma de parallelogrammo para obter um parallelipipedo.

N'um parallelipipedo, as faces oppostas, bem como os triedros oppostos são iguaes, e as quatro diagonaes cortam-se em partes iguaes.

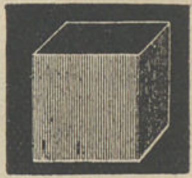


Fig. 34

4.° — Pyramides

35. — **Pyramide** é o solido que tem por base um polygono qualquer, e cujas faces lateraes são triangulos que concorrem n'um ponto chamado *vertice da pyramide*, *figs. 35 e 36*.

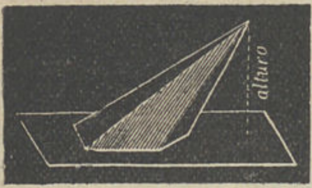


Fig. 35

A perpendicular baixada do vertice sobre a base diz-se *altura* da pyramide.

Faces lateraes são os triangulos resultantes das faces do angulo solido.

As pyramides dizem-se *triangulares*, *quadrangulares*, *pentagonaes*, etc., segundo a base é um triangulo, um quadrado, um pentagono, etc. A pyramide triangular é um *tetraedro*. Na pyramide triangular podemos tomar por base, uma qualquer das faces.

Uma pyramide designa-se pela letra do vertice seguida das letras que servem para designar a base.

Eixo de uma pyramide é a recta que une o vertice ao centro da base. A pyramide diz-se *recta*, *fig. 36*, ou *obliqua*, *fig. 35*, segundo o eixo é perpendicular ou obliquo á base.

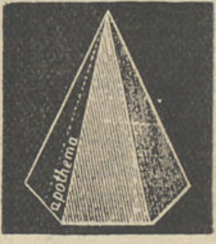


Fig. 36

Pyramide regular, *fig. 36*, é aquella que, além de ser recta, tem por base um polygono regular. N'uma pyramide regular diz-se *apothema* a perpendicular baixada do vertice sobre qualquer dos lados da base.

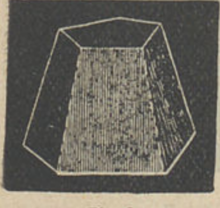


Fig. 37

A porção de pyramide comprehendida entre a base e uma secção plana diz-se *tronco de pyramide* ou *pyramide truncada*, *fig. 37*. Se o plano seccante fôr parallelo á base, o tronco de pyramide chama-se *tronco de bases parallelas*, a secção é um polygono similhante á base e as faces lateraes são trapezios. *Altura do tronco* é a distancia das bases.

IV

SUPERFICIES CURVAS

36. — **Superficie curva** é aquella que não tem parte alguma apreciavel que seja plana.

As superficies curvas consideradas na geometria elementar podem suppor-se geradas pelo movimento de uma linha denominada *geratriz*, sujeita a mover-se sobre uma outra denominada *directriz*.

37. — Diz-se **superficie cylindrica circular** *(veja-se a fig. 42)* a superficie gerada por uma recta, que se move sempre parallelamente a si mesma e apoiando-se sobre uma circumferencia.

Chama-se *eixo* a recta tirada parallelamente á geratriz pelo centro da circumferencia directriz.

38. — Diz-se **superficie conica circular** *(veja-se a fig. 48)* a superficie gerada pelo movimento de uma recta sujeita a ter um dos extremos fixo e a apoiar-se sobre uma circumferencia.

Diz-se *eixo* a recta que passa pelo ponto fixo, denominado *vertice* e pelo centro da circumferencia directriz.

39. — Diz-se **superficie espherica** *fig. 38*, a superficie gerada por uma semi-circumferencia girando em torno do diametro.

Calote espherica, *fig. 39*, é a porção de superficie espherica gerada pelo movimento de um arco, que tem uma das suas extremidades commum com o extremo do diametro que serve de eixo de movimento; a outra extremidade

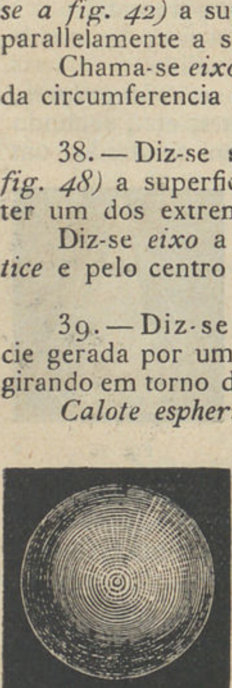


Fig. 38

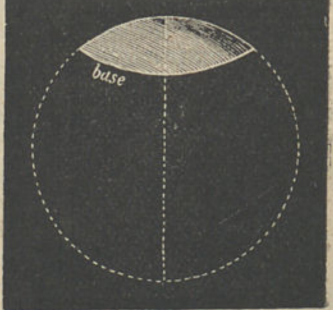


Fig. 39

do arco descreve uma circumferencia, que se diz *base da calote*; a porção de diametro comprehendida entre a calote e o plano da base diz-se *altura da calote*. Por exemplo: se tomarmos uma laranja bem lisa e espherica e se de uma banda lhe cortarmos um pedaço, fazendo o corte plano, e se tirarmos de ambos os pedaços a polpa da laranja, deixando só a pellicula extrema da casca, teremos exemplos da calote espherica.

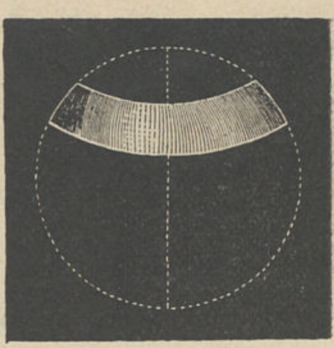


Fig. 40

Zona espherica, fig. 40, é a porção da superficie espherica gerada pelo movimento de um arco, que não tem ponto algum de commum com o diametro que serve de eixo de movimento; as circumferencias descriptas pelos extremos dos arcos são as *bases da zona*; a porção do eixo comprehendida entre os planos das bases é a *altura da zona*.

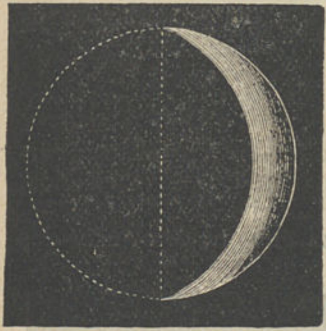


Fig. 41

Lunula espherica, fig. 41, é a porção de superficie espherica descripta pela semi-circumferencia geratriz, quando passa de uma posição para outra. Dános exemplo da lunula espherica a pellicula da casca, que ficará, se tirarmos a polpa do gomo d'uma laranja.

V

SOLIDOS REDONDOS

40. — Os corpos chamados *redondos* são o *cylindro,* o *cone* e a *esphera.*

Tambem se lhes chama *solidos de revolução,* porque são gerados por meio de rotação.

1.º — Cylindro

41. — **Cylindro** é o solido limitado pela superficie cylindrica e por dois planos seccantes parallelos, que se denominam *bases.*

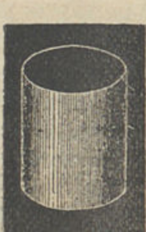


Fig. 42

Eixo do cylindro é a recta que une os centros das bases. O eixo é parallelo ás geratrizes.

Cylindro circular é o cylindro cujas bases são circulos, figs. 42 e 43. Na geometria elementar estudam-se sómente os cylindros circulares.

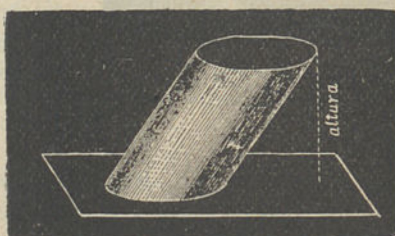


Fig. 43

O cylindro diz-se *recto,* fig. 42, ou *obliquo,* fig. 43, segundo as bases são perpendiculares ou obliquas ao eixo.

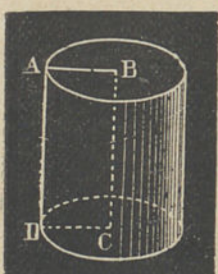


Fig. 44

O cylindro recto de base circular, ou *cylindro de revolução* póde suppôr-se gerado pelo movimento de um rectangulo A B C D por exemplo, em torno do lado B C, fig. 44; os lados A B e C D descreverão dois circulos iguaes, e o lado A D a superficie cylindrica.

Tambem se pode formar de outro modo esse cylindro; corta-se um rectangulo, e enrola-se até se unirem os dois lados ou bordos oppostos; ficará formado um canudo; depois, cortam-se dois circulos, cujas circumferencias rectificadas igualam exactamente os outros dois lados do rectangulo, isto é, os que ficam formando os bordos do canudo; e ajustam-se esses circulos com os ditos bordos. O cylindro ficará completo.

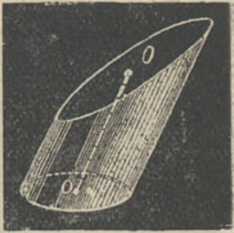


Fig. 45

Altura do cylindro é a distancia entre as suas bases, medida pela perpendicular baixada de um dos pontos de uma sobre a outra. Nos cylindros rectos a altura é igual ao eixo.

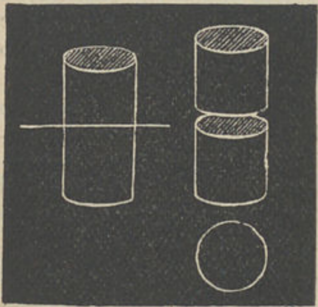


Fig. 46

A porção de cylindro comprehendida entre a base e uma secção feita por um plano obliquo á base diz-se, *tronco de cylindro ou cylindro truncado, fig. 45.*

Secções cylindricas são as figuras que resultam dos differentes córtes feitos em um cylindro; assim, se o córte é feito perpendicularmente ao eixo *fig. 46*, a *secção* é um circulo, se é feito obliquamente *fig. 47*, a *secção* é uma ellipse.

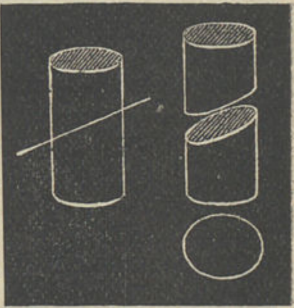


Fig. 47

42. — Consideremos um prisma regular, e imaginemos que o numero de lados do polygono regular que lhe serve de base se torna cada vez maior; as faces do prisma multiplicam-se conservando todas ellas o mesmo comprimento e diminuindo successivamente a largura.

Se suppozermos o numero de lados do polygono excessivamente grande, podel-o-hemos considerar como um circulo. N'esse momento então, as faces e as arestas desaparecem, a superficie lateral torna-se unida e arredondada, e o prisma transforma-se n'um cylindro.

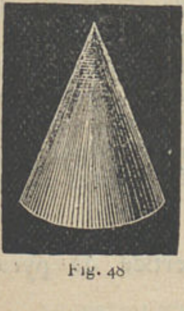


Fig. 48

2.º — Cone

43. — *Cone* ou *pyramide conica* é o solido limitado por uma superficie conica e por um plano seccante que se denomina *base do cone.*

Vertice do cone é o vertice da superficie.

Eixo do cone é a recta tirada do vertice para o centro da base.

Cone circular é aquelle cuja base é um circulo *figs. 48* e *49.*

Na geometria elementar estudam-se apenas os cones circulares.

O cone diz-se recto, *fig. 48*, ou obliquo, *fig. 49*, segundo o eixo é perpendicular ou obliquo á base.

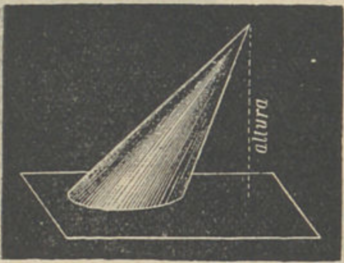


Fig. 49

O cone recto de base circular, ou cone de revolução, póde suppôr-se gerado pelo movimento de um triangulo rectangulo S A B, por exemplo, *fig. 50*, em torno da catheto S A, em que a hypothenusa S B gera a superficie conica, e o catheto A B a base do cone.

O cone tambem póde ser formado do modo seguinte: recorta-se um sector circular, e enrola-se, unindo os dois bordos lateraes, como para formar um cartuxo; depois corta-se um circulo, cuja circumferencia rectificada a iguale exactamente a rectificação do arco do sector, e ajusta-se um circulo na bocca do cartuxo. O cone ficará completo, como se queria.

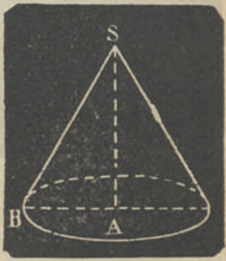


Fig. 50

Altura do cone é a perpendicular baixada do vertice sobre a base. Nos cones rectos a altura é igual ao eixo.

Diz-se *geratriz* a recta que une o vertice a qualquer ponto da circumferencia da base. No cone recto todas as geratrizes são iguaes, porque são obliquas equidistantes do pé da perpendicular.

Fig. 51

Cone equilatero é o cone de revolução cuja geratriz é igual ao diametro da base.

A porção de cone comprehendida entre a base e uma secção plana diz-se *tronco de cone ou cone truncado*, *fig. 51*. Pode ser considerado como a differença entre dois cones que têem o mesmo vertice, e cujas bases são os dois circulos bases do tronco. O tronco de cone tambem poderá ser armado por um modo analogo, ao cone, suppondo as bases parallelas.

De um sector circular cortando outro sector menor, fica um trapezio circular. Pois tomando esse trapezio, enrolando-o, unindo os bordos rectos, e fechando as duas bocas com dois circulos exactamente adequados, forma-se o tronco de cone, de um modo perfeito.

Secções conicas são as figuras que resultam dos differentes cortes feitos em uma pyramide conica recta.

Ha cinco secções conicas, a saber:

Triangulo — quando o corte passando pelo vertice da pyramide vem dividir a base em duas partes. Exemplo: a b c *fig. 52.*

Fig. 52

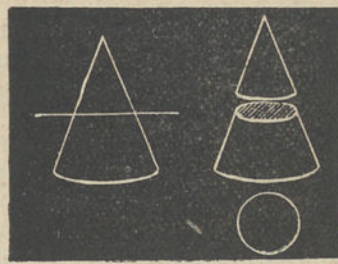


Fig. 53

Circulo — se o córte se faz parallelamente á base, *fig. 53.*
Ellipse — se o corte é obliquo á base, *fig. 54.*

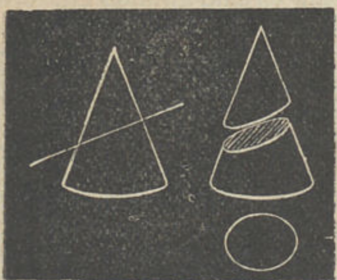


Fig. 54

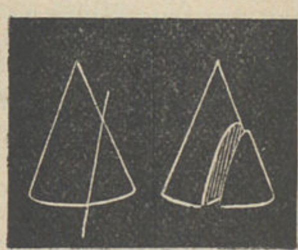


Fig. 55

Parabola — se o corte se faz de modo que o eixo da secção seja parallelo á geratriz do cone, *fig. 55.*

Hyperbole — se o eixo da secção é parallelo ao eixo da pyramide como e f g, ou forma um angulo inferior ao da parabola, *fig. 56.*

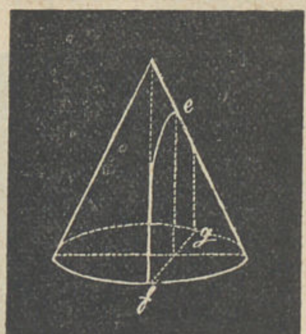


Fig. 56

44. — Assim como o prisma se torna um cylindro quando se suppõe excessivamente grande o numero dos lados do polygono que lhe serve de base, assim a pyramide se transforma em *cone* quando o numero de lados da base ou o das faces triangulares, é por assim dizer infinito.

3.º — Esphera

45. — Considerámos a circumferencia como um polygono regular d'um grande numero de lados; da mesma maneira a esphera pode ser comparada a um polyedro cujo numero de faces é por assim dizer infinito.

Todavia é mais rigoroso dizer que a *esphera* (veja-se a *fig. 38*), é um solido limitado por uma superficie na qual todos os pontos estão a igual distancia d'um ponto interior chamado centro. Achamos exemplos da esphera nas *bolas de bilhar*, *nas balas lisas de artilheria*, e em outros solidos de uso mui frequente.

Se se comparar a esphera ao circulo, vê-se que a linha denominada circumferencia corresponde á superficie espherica, e que a superficie denominada circulo corresponde ao volume da esphera. Se collocarmos verticalmente sobre uma meza uma moeda de 500 réis e a fizermos girar rapidamente em volta do seu diametro, suppor-se-ha ver uma esphera. Pode-se pois dizer que um circulo girando em torno d'um dos seus diametros gera uma esphera. O centro do circulo gerador diz-se tambem *centro da esphera*. As rectas tiradas do centro para qualquer ponto da superficie espherica dizem-se *raios da esphera* e as rectas que atravessam a esphera passando pelo centro e terminando na superficie espherica dizem-se *diametros da esphera*.

46. — Toda a secção feita por um plano n'uma esphera é um circulo, *fig. 57*. Se o plano seccante passa pelo centro, o raio da secção é igual ao da esphera e a secção diz-se *circulo maximo*, no caso contrario diz-se *circulo menor*. A secção feita por um plano que passa pelo eixo do circulo gerador diz-se *meridiano*. Todo o circulo maximo da esphera divide-a em duas partes iguaes, ou metades, cada uma das quaes é chamada *hemispherio*.

Quando uma esphera *fig. 58*, assenta sobre um plano, toca-o em

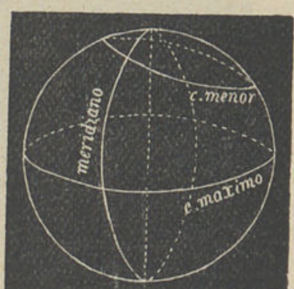


Fig. 57

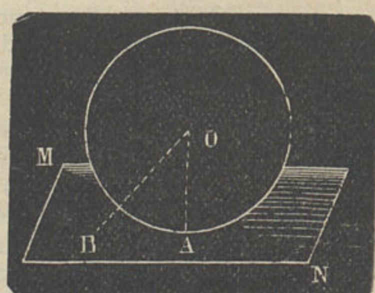


Fig. 58

um só ponto e o plano diz-se tangente á esphera. Este plano é perpendicular ao raio O A, tirado para o ponto de contacto. Qualquer outra linha O B, differente do raio O A, sendo obliqua ao plano, é maior que a perpendicular O A e por tanto a sua extremidade B está fóra da esphera.

Os planos tangentes á superficie da terra são planos horizontaes. Assim o plano M N é o plano horizontal ou o horisonte do ponto A. A direcção do raio O A é a do fio de prumo collocado no ponto A, e portanto a vertical d'esse ponto.

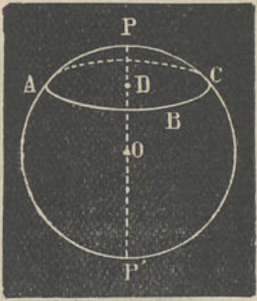


Fig. 59

Duas espheras podem occupar cinco posições relativas, que são absolutamente identicas ás posições relativas de dois circulos traçados no mesmo plano (g. plana n.º 74). Dão origem a principios analogos, porque se póde sempre supor as duas espheras dadas, como geradas por dois circulos traçados no mesmo plano e girando em torno da linha recta que une os seus centros.

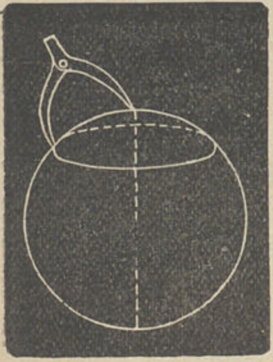


Fig. 60

Os gomos d'uma laranja estão dispostos em torno d'uma linha que se pode chamar o eixo natural da laranja, e os seus extremos os polos naturaes d'este fructo. N'uma esphera, pode ser tomado para eixo qualquer dos seus diametros, e as extremidades d'esse eixo são os polos de todos os circulos que se obtêem cortando a esphera por planos perpendiculares áquelle diametro; podemos portanto denominar *polos* d'um circulo A B C da esphera O, *fig. 59*, os extremos P e P' do diametro P P' perpendicular ao plano d'esse circulo.

O centro O da esphera, o centro D do circulo e os dois polos P e P' estão em linha recta.

A recta que une dois quaesquer d'estes pontos passa pelos outros dois, e a perpendicular baixada de qualquer d'elles sobre o plano do circulo passa pelos outros tres.

Todos os pontos da circumferencia A B C d'um circulo da esphera estão equidistantes dos polos P e P' d'esse circulo. Esta propriedade permitte descrever sobre a superficie da esphera circulos tão facilmente como sobre um plano. Para esse fim emprega-se o compasso de pontos curvas, ou compasso espherico *fig. 60*.

47. — A porção da esphera limitada por uma calote e pelo plano da sua base diz-se *segmento espherico* (veja-se a *fig. 39)*; a porção li-

mitada por uma zona e os planos das suas bases diz-se *camada espherica* (veja se a *fig. 40)*; a porção limitada por uma lunula e os dois semi-circulos geradores dos seus extremos diz-se *cunha espherica* (veja-se a *fig. 41)*; e a porção descripta pelo giro inteiro de um sector circular em torno de um dos seus raios diz-se *sector espherico, fig. 61.*

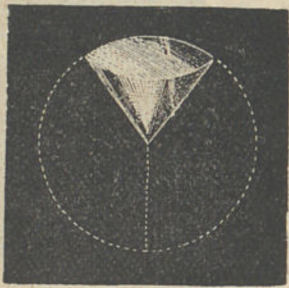


Fig. 61

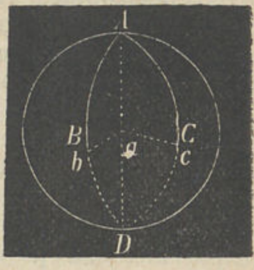


Fig. 62

48. — *Angulo espherico* é a inclinação reciproca de dois arcos de circulos maximos, que se interceptam n'um ponto da superficie espherica, *fig. 62*. Este ponto A, diz-se *vertice do angulo espherico*, e os arcos A B e A C dizem-se *lados.*

Um angulo espherico mede-se pelo numero de graus do diedro, B A D C, formado pelos dois circulos maximos a que pertencem os lados, que é igual ao numero de graus do rectilineo correspondente bac.

PROBLEMAS SOBRE A ESPHERA

Problema I

49. — *Sendo dada uma esphera achar o seu raio.*

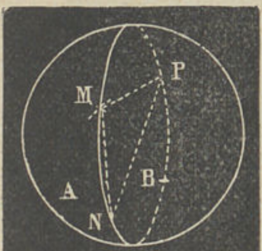


Fig. 63

De dois pontos quaesquer A e B tomados sobre a superficie da esphera como polos *fig. 63*, e com uma abertura de compasso arbitraria, descrevam-se dois arcos de circulo que se cortam n'um ponto M e determine-se pela mesma forma outros dois pontos N e P.

Os tres pontos M, N e P estando equidistantes dos extremos da recta A B determinam um plano perpendicular ao meio d'esta recta; este plano passa pelo centro, que está igualmente equidistante de A e de B e corta portanto a esphera segundo um circulo maximo. Tomando agora com o compasso os comprimentos das cordas

MN, NP, PM, construa-se o triangulo M N P. O raio do circulo circumscripto a este triangulo será o raio da esphera.

Problema II

50. — *Dividir um circulo maximo A B em duas partes iguaes.*

Do ponto A como polo *fig. 64*, com uma abertura de compasso arbitraria, descreva-se um arco de circulo; do ponto B como polo, com o mesmo raio, descreva-se um segundo arco de circulo, que corta o primeiro em dois pontos C e D.

O circulo maximo passando por estes dois pontos é perpendicular ao meio da corda A B, porque tem tres pontos C, D, O, equidistantes dos pontos A e B, e portanto divide o arco A B em duas partes iguaes.

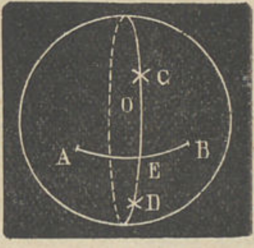


Fig. 64

Problema III

51. — *Traçar sobre a superficie d'uma esphera um circulo que passe por tres pontos dados, A, B, e C, fig. 65.*

Tracem-se dois circulos maximos respectivamente perpendiculares ao meio dos arcos AB e BC (n.º 50); estes circulos cortam-se n'um ponto P que está equi-distante dos tres pontos dados. O ponto P é pois o polo do circulo que passa por estes tres pontos.

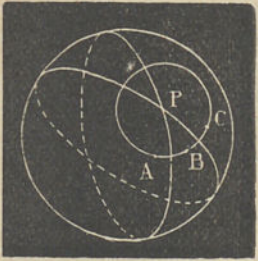


Fig. 65

VI

AREAS DAS SUPERFICIES POLYEDRICAS

52. — Pode-se considerar a superficie d'um polyedro de duas maneiras: ou se trata apenas do conjuncto das faces, sem comprehender as bases, e é então o que se chama a superficie convexa ou lateral, ou ainda addicionar-se á superficie convexa as superficies das bases e obter-se assim a superficie total.

Não offerece difficuldade a avaliação de qualquer d'estas superficies, pois basta effectuar a somma de superficies que já se sabem avaliar, por serem as suas faces lateraes palellogrammos (rectangulos ou quadrados), bem como triangulos e as bases polygonos.

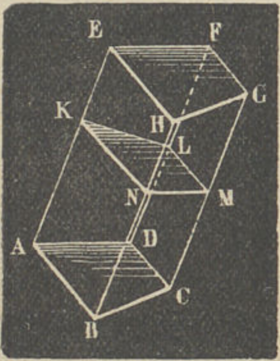


Fig. 66

53. — *A area da superficie lateral d'um prisma obliquo tem por medida o producto do perimetro da secção recta por uma das suas arestas lateraes.*

Sejam A G o prisma, *fig. 66* e K L M N a secção recta.

A face A B H E é um parallelogrammo cujos lados B H e A E são perpendiculares ao plano K L M N, e, por tanto, á recta K N; esta recta K N é pois a altura do parallelogrammo, se se tomar por base a aresta lateral B H. Os outros lados K L, L M, e M N da secção recta são, pelo mesmo motivo, as alturas das outras faces que têem a mesma base que a primeira, visto serem iguaes todas as arestas.

A area é pois igual a

$$B\,H\,(K\,N + K\,L + L\,M + M\,N)$$

Se designarmos por a a aresta lateral e por p o perimetro da secção recta, tem-se a formula

$$S = a \times p$$

54. — *A area da superficie lateral d'um prisma recto avalia-se multiplicando o perimetro da base pela altura.*

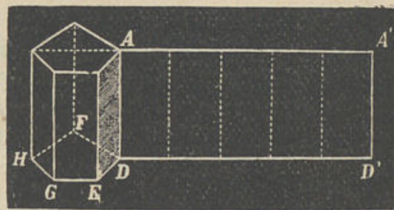


Fig. 67

Se o prisma é recto, *fig. 67*, as bases são secções rectas e cada uma das arestas é igual á altura.

Portanto, temos, representando a altura por h:

$$S = h\,(HG + GE + ED + DF + FH)$$

ou, $S = h \times p$, sendo p o perimetro da base.

Chegar-se-hia ao mesmo resultado planificando o prisma, quer dizer, assentando sobre um plano as suas faces, obtendo-se assim o rectangulo AA'DD', *fig. 67*, cuja altura A D é a do prisma e a base D D' o perimetro do polygono D E G H F.

Problema

Calcular a superficie lateral de um prisma hexagonal regular, sendo o raio da base 12 metros e a altura 37 metros.

Como o lado do hexagono regular é igual ao raio (g. plana n.º 159), o perimetro da base é $6 \times 12.^m = 72,^m$ e, portanto, a area pedida é

$$S = 72^m \times 37^m = 2664^{mq}$$

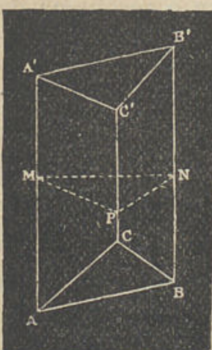


Fig. 68

55. — *A area da superficie lateral de um tronco de prisma é igual a metade da somma dos productos de cada lado da secção recta pela somma das arestas que o terminam.*

Sejam A B C e A' B' C' *fig. 68*, as bases do tronco de prisma e M N P uma secção recta.

A area do tronco é a somma das areas dos trapezios que formam as suas faces.

Designando por *S* a area, temos

$$S = \frac{1}{2}(AA' + CC')\,MP + \frac{1}{2}(AA' + BB')\,MN + \frac{1}{2}(BB' + CC')\,NP$$

ou $S = \frac{1}{2}\left[\left((AA' + CC')\,MP + (AA' + BB')\,MN + (BB' + CC')\,NP\right)\right]$

Problema

Calcular a area lateral d'um prisma triangular truncado, cujas arestas lateraes valem $5^{m},40$, $7^{m},30$ e $8^{m},70$ e a secção recta é um triangulo equilatero, cujo lado vale $2^{m},60$.

Applicando a regra acima indicada teremos:

$$S = \frac{1}{2}(5^{m},70 + 7^{m},30)\, 2^{m},60 + \frac{1}{2}(5^{m},70 + 8^{m},70)\, 2^{m},60 +$$
$$+ \frac{1}{2}(8^{m},70 + 7^{m},30)\, 2^{m},60$$

$$S = \frac{33^{mq},7}{2} + \frac{37^{mq},44}{2} + \frac{41^{mq},5}{2} = \frac{112^{mq},84}{3} = 56^{mq},42$$

56. — *A area da superficie lateral de uma pyramide regular avalia-se multiplicando o semiperimetro da base pelo apothema da pyramide (35).*

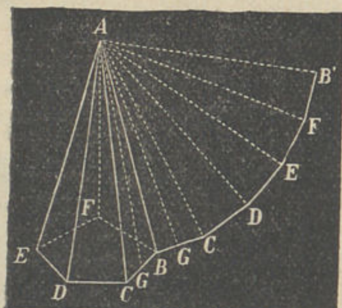


Fig. 69

Planificando a pyramide regular, *fig. 69*, obtem-se uma serie de triangulos, igual ao numero das suas faces, tendo todos por altura o apothema da pyramide, e por bases os lados do polygono base das mesmas.

Avaliando a area de um dos triangulos será $\frac{BC}{2} \times AG$ a area de uma das faces; e como todas as faces são iguaes, teremos para a expressão da area lateral da pyramide dada $5 \times \frac{BC}{2} \times AG = \frac{5\,BC}{2} \times AG$.

Designado por S a area lateral, por *a p* o apothema e por *p* o perimetro da base, tem-se a formula

$$S = \frac{1}{2}\, p \times ap$$

Problema

Calcular a superficie lateral de uma pyramide hexagonal regular, tendo de raio a base 12 metros e de altura 37 metros.

O perimetro da base terá 72 metros, e, portanto, para obter a superficie lateral, bastará conhecer o apothema da pyramide. Ora este, por ser a hypothenusa de um triangulo rectangulo, cujos cathetos são a altura da pyramide e o apothema do hexagono base, será (applicação do n.º 166—g. plana).

$$a = \sqrt{37^2 + 10{,}39^2} = 35^m{,}59$$

D'onde resulta para a superficie lateral

$$S = \frac{72}{2} \times 35^m{,}59 = 1281^{mq}{,}24$$

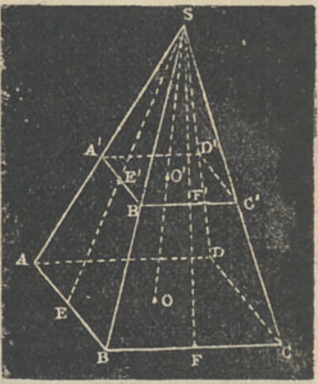


Fig. 70

67. — *A area lateral de um tronco de pyramide regular de bases parallelas é igual ao producto da semi-somma dos perimetros das bases pelo apothema do tronco.*

Se a pyramide é regular *fig.* 70, um plano parallelo á base determina sobre os apothemas da pyramide segmentos E E', F F'... iguaes entre si.

Representando por *S* a area lateral do tronco vem:

$$S = A' B + B' C + C' D + \ldots$$

Avaliando a area de cada um d'estes trapezios faces do tronco temos:

$$S = \frac{1}{2}(A\,B + A'\,B') \times E\,E' + \frac{1}{2}(B\,C + B'\,C') \times E\,E' + \frac{1}{2}(C\,D + C'\,D') \times E\,E' + \ldots$$

$$S = \frac{1}{2}(A\,B + B\,C + C\,D + D\,A + A'B' + B'\,C' + C'\,D' + D'\,A') \times E\,E'$$

Representando por P e P' os perimetros das bases e *a p* o apothema, resulta finalmente:

$$S = \frac{1}{2}(P + P') \times a\,p$$

68. — *Areas dos polyedros regulares.*—Para obter a area de um polyedro regular, basta multiplicar a area de uma das faces pelo numero d'ellas. Como as faces são polygonos regulares, a area de cada uma pode exprimir-se na aresta do polyedro.

Sejam S a area da superficie do polyedro, F a area de cada uma das faces e *n* o numero das faces. Temos:

$$S = n \times F$$

AREAS DOS CORPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES CURVAS

69. — *A area da superficie lateral de um cylindro recto avalia-se multiplicando a circumferencia da base pela altura.*

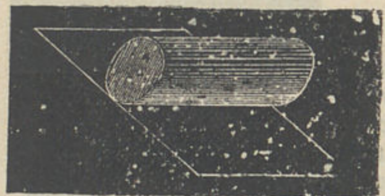


Fig. 71

Planificando um cylindro recto, *fig.* 71, obtem-se um rectangulo, cuja altura é a do cylindro e cuja base é a circumferencia rectificada.

Portanto, representando por S a superficie lateral do cylindro, por H a altura e por R o raio da base, tem-se para expressão da area

$$S = 2\pi R \times H$$

Para obter a area total basta juntar á area lateral as areas das duas bases, ou o dobro d'uma d'ellas.

Designando por T a area total do cylindro teremos portanto:

$$T = 2\pi R \times H + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(H + R)$$

Problemas

I — *Qual é a area da superficie lateral e total de um cylindro recto, tendo,* $4^m,6$ *de raio da base e* 12 *metros de altura?*

a) Como a circumferencia da base rectificada tem $28,^m888$, (veja-se o problema 1.º do n.º 95—g. plana), a superficie lateral do cylindro será:

$$S = 28^m,888 \times 12^m = 346^{mq},656$$

b) Para obter a superficie total, bastará addicionar á lateral, o dobro d'uma d'ellas, que é (167—g. plana) $2 \times 3,14 \times 4,6^2$ ou $132^{mq},884$, o que produz $479^{mq},540$.

II — *Calcular a superficie de folha de ferro necessaria para a* *construcção d'uma caldeira cylindrica tendo* $0^m,80$ *de diametro e* $1^m,20$ *de comprimento.*

E' claro que tratando-se da superficie total, temos que avaliar primeiramente a superficie lateral.

A circumferencia da base do cylindro tem por comprimento

$$2\pi R \text{ ou } 0^m,80 \times 3,14 = 2^m,512$$

A superficie lateral será portanto

$$S = 2^m,512 \times 1^m,20 = 3^{mq},0144$$

Falta juntar a esta superficie o dobro da superficie d'uma das bases. Ora a superficie d'este circulo pode obter-se multiplicando a circumferencia por metade do raio, ou um quarto do diametro que é igual a $0^m,20$.

$$\text{Superficie d'uma base} = 2^m,512 \times 0^m,20$$
$$\text{Duas vezes} = 2,512 \times 0^m,40 = 1^{mq},0048$$

A superficie total da caldeira é pois igual a

$$3^{mq},0144 + 1^{mq},0048 = 4^{mq},0192$$

70. — *A area da superficie lateral do cone recto avalia-se multiplicando metade da circumferencia da base pela geratriz.*

Planificando um cone recto S A B *fig.* 72, obtem-se um sector circular S B C, cujo raio é a geratriz S B do cone e o comprimento do arco B C é a circumferencia da base rectificada.

Portanto, a area será :

$$S = \frac{1}{2} S B \times 2 \pi R$$

ou, representándo por G a geratriz

$$S = \pi R G$$

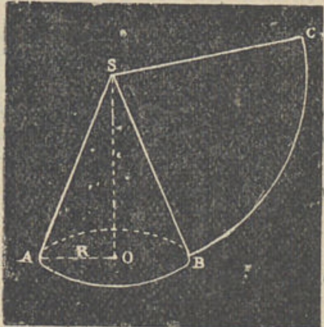


Fig. 72

Problema

Qual é a area da superficie de um cone recto tendo $4^m,6$ *de raio da base e* 12^m *de altura?*

A geratriz, *fig.* 72, sendo a hypothenusa de um triangulo rectangulo cujos cathetos são o raio da base e a altura, será:

$$G = \sqrt{4{,}6^2 + 12^2} = 12^m{,}85$$

e portanto a area pedida será (veja-se o problema 1.º do n.º 95 da g. plana).

$$S = \frac{28^m{,}878}{2} \times 12{,}85 = 184^{mq}{,}6054$$

71. — *A area da superficie lateral de um tronco de cone recto é igual ao producto da semi-somma das circumferencias das bases pela geratriz do cone.*

Representando por S a superficie do tronco, por R o raio da base inferior, por *r* o raio da base superior e por G a geratriz, a area do tronco será expressa pela formula seguinte:

$$S = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times G$$

ou

$$S = (\pi R + \pi r)\, G = \pi\, (R + r)\, G$$

Problema

Qual é a superficie lateral de um tronco de cone recto cujos diametros das bases superior e inferior são respectivamente 3^m *e* 5^m, *tendo a geratriz* 10^m?

$$S = 3{,}14\,(5^m + 3^m)\; 10 = 3{,}14 \times 8 \times 10 = 125^{mq}{,}6$$

72. — A superficie da esphera é implanificavel, e a sua area é *igual a quatro vezes a area de um dos seus circulos maximos.*

Representando por *r* o raio da esphera, a sua superficie será expressa por

$$S = 4\pi r^2$$

donde se deduz

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

Problemas

1.º — *A circumferencia de um circulo maximo de uma esphera é 50 metros. Qual é a superficie d'essa esphera?*

Calculando o raio do circulo maximo, que o é tambem da esphera, pelo modo ensinado no problema 2.º do n.º 95 da geometria plana, encontrariamos $7^m,96$ e portanto é

$$S = 4 \times 3,14 \times 7,96^2 = 795^{mq},821696$$

2.º — *A superficie de uma esphera é de 20 metros quadrados. Qual é o seu raio?*

$$r = \sqrt{\frac{20^{mq}}{4 \times 3,14}} = \sqrt{1,5923} = 1^m,26$$

3.º — *Calcular o diametro de uma esphera, cuja superficie vale* 250 *metros quadrados.*

$$S = 4\pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \times \frac{D^2}{4} = \pi D^2 = 250$$

$$D = \sqrt{\frac{250}{\pi}} = \sqrt{\frac{250}{3,14}} = 8^m,92$$

4.º — *Calcular o raio de uma esphera, cuja area é igual a um metro quadrado.*

$$1 = 4 \pi r^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{4}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,282$$

considerando-se $\pi = 3,14159$

73. — *A area de uma calote, ou de uma zona espherica, acha-se multiplicando a altura da calote ou da zona pela circumferencia rectificada de um circulo maximo da esphera.*

Sejam S a area da calote ou da zona, H a sua altura e R o raio do arco gerador, que é o raio da esphera, á qual pertence a calote ou a zona.

Teremos para expressão da area.

$$S = 2 \pi R \times H$$

Problema

Calcular a superficie d'uma zona com 6 *metros de altura, sendo* $5^m,40$ *o raio da esphera correspondente.*

$$S = 6^m \times 2 \pi \times 5^m,4 = 203^{mq},5757$$

74 — *A area d'uma lunula espherica é igual á da esphera, mul-*

tiplicada pelo numero de graus do angulo diedro formado pelos semicirculos da lunula, e dividida por 360°.

Sejam S a superficie da lunula espherica N o numero de graus do seu diedro, e R o raio da esphera, a expressão da area será:

$$S = 4\,\pi\,R^2 \times \frac{N^\circ}{360^\circ}$$

Problema

Calcular a superficie d'uma lunula espherica, sendo 1 *metro o raio da esphera correspondente e* 25°,,18' *o valor do angulo diedro.*

$$S = 4\pi \times \frac{25^\circ{,,}18'}{360^\circ} = 12^m{,}56 \times \frac{1518}{21600} = 0^{mq}{,}88$$

VII

1.º

VOLUMES DOS POLYEDROS

75 — **Volume** de um solido é *a expressão de quantas vezes o solido contem a unidade de volume.*

Escolhe-se para unidade de volume o volume de um cubo, cuja aresta é igual á unidade de comprimento.

Se a unidade de comprimento é o metro, a unidade de volume é um cubo, cuja aresta é igual a um metro. Chama-se metro cubico.

Se a unidade de comprimento é o decimetro, a unidade de volume é um cubo, cuja aresta é igual a um decimetro. Chama-se decimetro cubico.

A theoria dos volumes tem por fim reduzir o calculo dos volumes dos corpos a simples medidas de comprimentos.

76 — *O volume de um parallelipipedo rectangulo avalia-se multiplicando a base pela altura*, o que equivale a multiplicar as tres arestas saidas do mesmo vertice *(as tres dimensões do solido)* visto que o producto de duas representa a area da base (Nº 161 da g. plana).

Supponhamos que as tres arestas do angulo têem 3^m,5^m, e 7^m.

Ajuste-se ao canto o metro cubico como se vê na figura 73.

Ao longo da aresta igual a 5^m, podem enfileirar-se 5^m cubicos. E essa fileira póde repetir-se 3 vezes ao longo da aresta igual a 3 metros.

Sobre a base do parallelipipedo ficarão, pois, 5 vezes 3 metros cubicos, ou 15 metros cubicos.

Ora, esta primeira camada deverá repetir-se 7 vezes ao longo da aresta igual a 7 metros, até encher completamente o espaço do parallelipipedo.

E, assim, o parallelipipedo proposto conterá 7 vezes 15 metros cubicos, ou 105 metros cubicos.

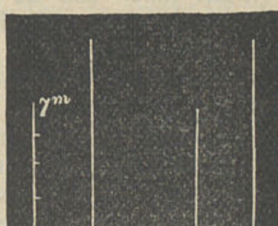


Fig. 73

Logo, o parallelipipedo rectangulo contem o metro cubico tantas vezes, quantas são as unidades do producto formado dos metros de comprimento das tres arestas de um dos seus angulos.

Se considerarmos as tres arestas divididas em decimetros, ou em centimetros, ou em millimetros, etc., o volume virá avaliado em decimetros cubicos, ou em centimetros, cubicos ou em millimetros cubicos, etc.

O resultado obter-se-ha sempre do mesmo modo. Mas é sempre necessario avaliar as tres arestas n'uma só especie de unidades, a saber: ou todas tres em metros, ou em centimetros; e nunca em especies differentes

77—*O volume d'um parallelipipedo recto avalia-se multiplicando a base pela altura.*

O parallelipipedo recto não differe do parallelipipedo rectangulo senão pela base, que é um parallelogrammo em vez d'um rectangulo; mas as arestas são prependiculares ao plano da base. Portanto, se no parellelipipedo recto A B C D E F G H *fig.* 74 tirarmos pela aresta D H um plano H K perpendicular a A D, cortarmos o prisma K C D L H G e o collocarmos á esquerda em A I B E M F, resultará o parallelipipedo rectangulo A I E M D K H L equivalente, porque tem a mesma altura e o rectangulo que lhe serve de base é equivalente ao parallelogrammo que serve de base ao primeiro. A medida do parallelipipedo recto é pois, como a do parallelipipedo rectangulo igual ao producto da base pela altura.

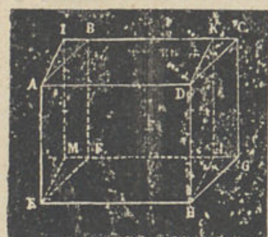


Fig. 74

78. — *O volume d'um parallelipipedo obliquo é igual ao producto da base pela altura.*

Sem fazer uso de construcções geometricas, pode-se mostrar a equivalencia do parallelipipedo recto e do parallelipipedo obliquo da mesma base e altura.

Basta tomar um maço de bilhetes de visita e dispol-os primeiramente em pilha vertical, ou em parallelipipedo rectangulo; feito isto, sem tocar no bilhete que fórma a base e que assenta sobre a meza, desloquem-se ligeiramente os outros, de maneira que uma das faces, que era vertical, fique inclinada; obter-se-ha assim um parallelipipedo obliquo, cuja obliquidade se poderá fazer variar á vontade. Ora todos estes parallelipipedos têem a mesma base que é a superficie d'um bilhete e a mesma altura que é a da pilha.

O volume é sempre o mesmo, pois que este é o da pilha, que se conserva invariavel, apezar das deformações, e portanto a sua avaliação faz-se ainda multiplicando a base pela altura.

79. — *O volume de um cubo é expresso pela terceira potencia de uma das suas arestas,* porque sendo as tres arestas contiguas todas iguaes, o seu producto (76) é o cubo de uma d'ellas.

80. — Em resumo, *para obter o volume de qualquer parallelipipedo, multiplica-se a base pela altura.*

Problemas

1.º — *Qual é o volume de um parallelipipedo rectangulo, que tem de base $2^{mq},5$ e de altura $1^{m},25$?*

Designando por V o volume teremos:

$$V = 2^{mq},5 \times 1^{m},25 = 3^{mc},125$$

2.º — *Quantos litros se conterão em uma caixa de fórma parallelipipeda, cujas dimensões interiores são $1^{m},6$ de comprimento, $1^{m},2$ de largura e $0^{m},9$ de altura?*

$$V = 1^{m},6 \times 1^{m},2 \times 0^{m},9 = 1^{mc},728 = 1728 \text{ litros}$$

3.º — *Uma prancha de madeira, com a fórma de um parallelipipedo rectangulo, tem as dimensões seguintes:*

Comprimento	$5^{m},35$
Largura.............	38 centimetros
Espessura	83 millimetros

Qual é o volume?

Designando por V o volume teremos:

$$V = 5^{m},35 \times 0^{m},38 \times 0^{m},083$$
$$V = 0^{mc},1687390$$

1.º — *Qual é o volume de um cubo que tem de aresta $0^{m},86$?*

$$V = 0^{m},86^{3} = 0^{mc},636056$$

81.—*O volume de um prisma triangular recto é expresso pelo producto da base pela altura.*—Se cortarmos um parallelipipedo A B C D E F G H, recto ou rectangulo, *fig.* 75, em duas partes, segundo a diagonal G F obter-se-hão dois prismas triangulares iguaes. Cada um d'elles é pois metade do parallelipipedo.

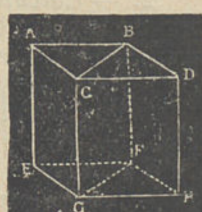


Fig. 7

Ora a altura A E d'estes prismas é a do parallelipipedo, e a base de cada um d'elles metade da base G E F H. Designemos por B a base E F G e por H a altura A E.

O volume do parallelipipedo é expresso por E F H G$\times$A E; logo o volume V do prisma triangular que é metade do volume do parallelipipedo, será:

$$V=\frac{E\,F\,H\,G\times A\,E}{2}=E\,F\,G\times A\,E=B\times H$$

Esta regra é igualmente applicavel ao prismo obliquo, visto ser o parallelipipedo recto equivalente ao parallelipipedo obliquo da mesma base e altura.

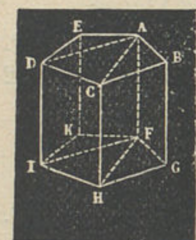


Fig. 76

82—*O volume de um prisma qualquer é igual ao producto da base pela altura.*

Seja o prisma I B A, *fig.* 76, cuja base é um polygono qualquer F G H I K e a altura D I.

Designemos por B a base F G H I K e por H a altura D I.

Fazendo passar planos diagonaes pela aresta A F e pelos vertices I e H, o prisma dado fica decomposto em prismas triangulares, tendo a mesma altura D I. O volume total será pois:

$$V=F\,G\,H\times D\,I+H\,I\,F\times D\,I+I\,K\,F\times D\,I$$

$$V=(F\,G\,H+H\,I\,F+I\,K\,F)\times D\,I$$

$$V=B\times H$$

Problemas

1.º — *Calcular o volume de um prisma hexagonal regular, cuja base tem* 12 *metros de lado e cuja altura é* $8^{m},5$?

Sendo a superficie da base (problema 1.º do n.º 166 da g. plana) $374^{mq},04$, o volume será:

$$V=374^{mq},04\times 8,^{m}5=3179,^{mc}34$$

2.º — *Calcular o peso d'um prisma de ferro, e regular tendo* $0,^{m}55$ *de altura, sendo o lado do hexagono da base igual a* $0,^{m}35$, *e pesando o decimetro cubico de ferro* $7,^{k}2$.

Sendo o lado do hexagono da base *fig.* 77, $0,^{m}35$, o perimetro será $0,^{m}35\times 6$ ou $2,^{m}10$, e por tanto, para obter a area da base basta multiplicar $1,^{m}05$ pelo apothema.

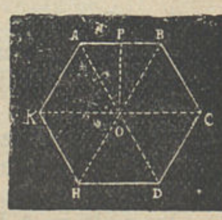


Fig. 77

O apothema póde facilmente ser calculado pois que sendo no hexagono regular o raio igual ao lado, O P será o catheto de um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa é A O=$0,^{m}35$ e o outro catheto A P=$0,^{m}175$; teremos pois:

$$O\,P = \sqrt{0,^{m}35^2 - 0,^{m}175^2} = \sqrt{0,^{m}091875} = 0,^{m}303$$

E por tanto a area da base do prisma será

$$S = 1,^{m}05 \times 0,^{m}303 = 0,^{mq}3182$$

o volume do prisma

$$V = 0,^{mq}3182 \times 0,^{m}55 = 0,^{mc}175$$

e o seu peso

$$P = 175^{k} \times 7,2 = 1260 \text{ kilogrammas}$$

83 — *O volume de um tronco de prisma avalia-se multiplicando a base do mesmo prisma pela somma das perpendiculares baixadas das extremidades das suas arestas lateraes, sobre o plano da base, e dividindo o producto pelo numero das ditas arestas.*

Assim, se o prisma tiver cinco faces, se a sua base fôr B, e as perpendiculares dos extremos das suas arestas *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, a expresão do volume do tronco será:

$$V = \frac{B \times (a+b+c+d+e)}{5}$$

84—*O volume de uma pyramide é expresso por um terço do producto da base pela altura,* por ser a pyramide a terça parte do volume do prisma da mesma base e da mesma altura.

Designando por V o volume da pyramide, B a base e H a altura teremos:

$$V = \frac{B \times H}{3}$$

Problema

Qual é o volume de uma pyramide cuja base é um triangulo equilatero de $12,^{m}6$ *de lado e cuja altura é de* 15 *metros?*

Sendo a superficie da base (problema do n.º 164—g. plana) $68,^{mq}733$, o volume pedido será:

$$V = \frac{68,^{mq}733 \times 15}{3} = 68,^{mq}733 \times 5 = 343,^{mc}665$$

85 — *O volume de um tronco de pyramide é igual a um terço do producto da sua altura pela somma das duas bases e da meia proporcional entre ellas.*

Assim, sendo B e b as bases do tronco, e H a altura, será:

$$V = \frac{H \times (B + b + \sqrt{B \times b})}{3}$$

Problema

Calcular o volume d'um tronco de pyramide, cujas bases têem respectivamente 144 *e* 64 *centimetros quadrados, e a altura* 24 *centimetros.*

Applicando a formula vemos:

$$V = \frac{0,^{m}24 \times (0,^{mq}0144 + 0,^{mq}0064 + \sqrt{0,^{mq}0144 \times 0,^{mq}0064})}{3} =$$

$$= \frac{0,24 \times (0,0208 + 0,00396)}{3} = \frac{0,24 \times 0,0304}{3} = \frac{0,007296)}{3} =$$

$$= 0^{mc},002432$$

Suppondo agora que se pretendia saber quanto pesaria o mesmo tronco se o quizessemos reproduzir em ferro fundido, não teriamos mais do que multiplicar o volume achado em centimetros cubicos pelo peso especifico do metal. Ora sendo este de 7,2 grammas cada centimetro cubico temos

$0,^{mc}002432 \times 7,2 = 17510$ grammas ou 17,510 kilogrammas

86 — Um dos volumes que mais convem saber avaliar, por ser applicavel ao calculo de aterros e fossos, é o do tronco de pyramides quadrangulares. Fal-o-hemos pelo emprego da seguinte formula:

$$V = \frac{h}{6} \times \left[c \times l + c' \times l' + (c + c') \times (l + l') \right]$$

na qual h representa a altura, *c* e *l* as duas dimensões da base maior, e *c'* e *l'* as duas dimensões da base menor.

Problema

Qual é o volume de um fosso, que tem por dimensões: profundidade 4 *metros, abertura* 18 *metros por* 8 *metros, fundo* 12 *metros por* 5 *metros?*

Substituindo na formula temos:

$$V = \frac{4}{6} \times (18 \times 8 + 12 \times 5 + 30 \times 13)$$

$$V = \frac{4}{6} \times (144 + 60 + 390)$$

$$V = \frac{4 \times 594}{6} = 396^{mc}$$

2.º

VOLUME DOS CORPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES CURVAS

87 — *O volume de um cylindro avalia-se multiplicando a base pela altura* porque o cylindro pode ser considerado como um prisma que tem por base um polygono d'um infinito numero de lados.

Representando por V o volume do cylindro, $B = \pi R^2$ a area da base e H a altura será:

$$V = B \times H = \pi R^2 \times H$$

Problemas

1.º — *Qual é o volume de um cylindro, que tem de raio da base* $2,^{m}5$ *e de altura 6 metros?*

Sendo o raio da base $2,^{m}5$, a area d'esta será $B = 3,14 \times 2,^{m}5^2$ ou $19,^{mq}625$, e portanto o volume pedido será:

$$V = 19,^{mq}625 \times 6 = 117,^{mc}75$$

2.º — *Qual é, em hectolitros, a capacidade d'um tanque circular tendo* $4,^{m}60$ *de diametro e* $0,^{m}9$ *de profundidade?*

Como o raio da base é igual a metade de $4,^{m}60$ ou $2,^{m}30$, e a sua superficie

$$B = 3,^{m}14 \times 2,^{m}30^2 = 16,^{mq}61$$

O volume do tanque cylindrico será:

$$V = 16,^{mq}61 \times 0,^{m}9 = 14,^{mc}949$$

e a capacidade pedida $149,^{H}49$.

88 — E' de grande utilidade saber medir bem o cone.

Esta forma apresenta-se muitas vezes á nossa vista: a terra descarregada de uma viatura, toma ordinariamente a fórma cónica; os montes de trigo, nas eiras ou nos celeiros, são muitas vezes cónicos; os copos, geralmente usados para vinho, são troncos de cone invertidos; as pipas e os toneis são considerados compostos de dois troncos de cone iguaes, unidos pelas bases maiores, etc.

Para se avaliar a capacidade de um tonel, calcula-se o volume de um dos troncos de cone componentes, e multiplica-se por 2. Este processo não é bem exacto, porque a linha geratriz da superficie convexa dos toneis costuma ser uma linha curva muito approximada da ellipse; e, assim, a capacidade dos toneis é maior que a determinada pela regra exposta.

Adiante veremos como se faz a correção, e se mede o volume dos toneis, pipas, etc., com exactidão sufficiente.

89 — *O volume de um cone avalia-se multiplicando a terça parte da base pela altura* porque o cone pode ser considerado como uma pyramide que tem por base um polygono d'um infinito numero de lados.

Representando por V o volume do cone, $B = \pi R^2$ a area da base e H a altura será:

$$V = \frac{B \times H}{3} = \frac{\pi R^2 \times H}{3}$$

Problemas

1.º — *Qual é o volume de um cone recto, tendo de raio da base* $0^m,9$ *e de geratriz* $2^m,4$?

Como a altura de um cone é um dos cathetos de um triangulo rectangulo, cuja hypothenusa é a geratriz e o outro catheto o raio da base, a altura do cone considerado será (n.º 154 — g. plana):

$$H = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}9^2} = 2^m{,}2248$$

e, como a area do circulo base é

$$B = 3{,}14 \times 0{,}9^2 = 2{,}^{mq}5434$$

o volume pedido será:

$$V = \frac{2{,}^{mq}5434 \times 2^m{,}2248}{3} = 1^{mc}{,}88618544$$

2.º — *Qual é a cubagem de um monte conico de trigo, que tem 2 metros de raio e 1 metro de altura?*

$$V = \frac{3{,}1416 \times 2^2 \times 1^m}{3} = 4{,}^{mc}188800$$

90 — *O volume de um tronco de cylindro recto é expresso pelo seu eixo multiplicado pela area da sua base:* porque, tomando outro solido igual, invertendo-o, e ajustando-o com o primeiro, de modo que complete um cylindro: esse cylindro terá a mesma base que o tronco proposto, mas terá dobrado volume e eixo tambem dobrado.

Portanto, representando por V o volume do tronco, $B = \pi R^2$ a area da base e E o eixo, será:

$$V = B \times E = \pi R^2 \times E$$

91 — *O volume de um tronco de cone de bases parallelas é igual a um terço do producto da altura pela somma das bases e da meia proporcional entre ellas,* porque o tronco do cone póde ser considerado como um tronco de pyramide.

Representando por V o volume do tronco, por *B* e *b* as areas das bases e por H a altura do tronco, a expressão do volume será:

$$V = \frac{H \times (B + b + \sqrt{B \times b})}{3}$$

e como $B = \pi R^2$ e $b = \pi r^2$, sendo R e r os raios das bases do tronco, será:

$$V = \frac{H \times (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2})}{3}$$

ou

$$V = \frac{H \times (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})}{3} = \frac{H \times (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)}{3}$$

$$V = \frac{H \times (R^2 + r^2 + Rr) \times \pi}{3}$$

Problema

Quantos litros d'agua póde conter uma celha, tendo no fundo $0^m{,}30$ *de raio,* $0^m{,}40$ *nos bordos e* $0^m{,}24$ *de profundidade?*

Como a celha tem a fórma d'um tronco de cone o seu volume será:

$$V=\frac{0,24\times(0^m,3^2+0^m,4^2+0^m,3\times0^m,4)\times3,14}{3}$$

$$V=\frac{0,24\times0,37\times3,14}{3}=0,08\times0,37\times3,14=0^{mc},092944$$

A celha contem portanto 93 litros, approximadamente.

92 — *O volume de uma esphera avalia-se multiplicando a area de um dos seus circulos maximos por quatro terços do raio.*

Suppondo a superficie da esphera, *fig.* 79, formada d'uma infinidade de pequenas facetas, o que equivale a consideral-a como um polyedro, pode-se imaginar um grande numero de pequenas pyramides tendo todas por vertice commum o centro da esphera, e por bases as respectivas facetas.

Fig. 79

O volume da esphera é portanto igual á somma dos volumes d'aquellas pyramides, em que todas têem por altura commum o raio da esphera: basta pois *multiplicar* um *terço d'este raio* pela somma de todas as bases, isto é, pela *superficie da esphera,* para obter o seu volume, o qual é representado pela seguinte expressão:

$$V=\frac{R}{3}\times4\pi R^2=\frac{4\pi R^2\times R}{3}=\frac{4}{3}\times\pi R^3$$

Problema

1.º — *Qual é o volume de uma esphera que tem de raio* $1^m,2$?

$$V=\frac{4}{3}\times3,14\times1^m,2^3=1^{mc},80864$$

2.º — *Calcular o volume da parte massiça d'uma esphera ôca, que tem* $0^m,50$ *de diametro e* $0^m,04$ *de espessura.*

O volume da parte massiça é igual á differença entre o volume da esphera dada, e o de uma esphera interior concentrica cujo raio seria a differença entre o raio da esphera dada e a sua espessura.

O volume da esphera dada é

$$V=\frac{4}{3}\times3,14+0,25^3=0^{mc},065417$$

O raio da parte ôca sendo $0^m,25-0^m,04=0^m,21$ o volume correspondente será:

$$V' = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 0^{m}{,}21^{3} = 0^{mc}{,}038773$$

O volume pedido será portanto:

$$V'' = 0^{mc}{,}065417 - 0^{mc}{,}038773 = 0^{mc}{,}026644$$

93. — *O volume da cunha espherica é igual ao volume da esphera, multiplicado pelo numero de graus do angulo diedro formado pelos semi-circulos da lunula e dividido por 360°.*

Sejam V o volume da cunha e *n* o numero de graus do seu diedro, a expressão do volume será:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^{3} \times \frac{n.^{o}}{360}$$

Problema

Calcular o volume de uma cunha espherica, sendo 1 metro o raio da esphera e 23°.18' o valor do angulo diedro.

$$V = \frac{4}{3}\,\pi \times \frac{25^{o}.18'}{360} = 4^{m3}{,}18 \times \frac{1518}{21600} = 2^{m3}{,}937$$

94 — O conhecimento da avaliação do volume da cunha espherica, bem como a area da lunula correspondente é de grande utilidade na pratica, tanto na agricultura como nas industrias.

Se ha um cumulo hemispherico ou conico, dividido em *talhadas,* na direcção do eixo, o volume de cada uma d'ellas obter-se-ha pelo methodo precedente.

E se um cylindro fôr dividido do mesmo modo, o volume de cada talhada, ou de cada cunha, tambem será obtido multiplicando o volume do cylindro pela mesma relação supra-mencionada.

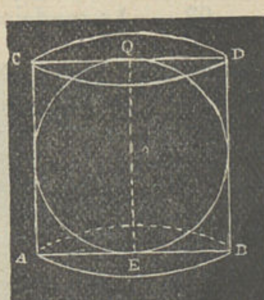


Fig. 80

95. — A esphera e o cylindro têem relações metricas notaveis, cuja descoberta é attribuida a Archimedes. Se tivermos um cylindro *quadrado, fig.* 80, isto é, cuja altura seja igual ao diametro; e se uma esphera tiver o mesmo diametro do cylindro; acharemos os seguintes resultados:

1.° — *A area da esphera, igual a* $4\pi R^{2}$, *é igual á area da superficie convexa do cylindro, tambem expressa por* $4\,\pi\,R^{2}$; (sendo R o raio da esphera, e tambem o do cylindro);

2.º — *A area total do cylindro é expressa por* $6\pi R^2$; *e está, pois, para a da esphera, assim como 6 para 4, ou assim como 3 para 2;*

3.º — *O volume do cylindro é expresso por* $2\pi R^3$, *e o da esphera por* $\frac{4}{3}\pi R^3$; *e, por isso, o volume da esphera está para o do cylindro, assim como 2 para* $\frac{4}{3}$, *ou assim como 6 para 4, ou assim como 3 para 2.*

Por consequencia, se uma bola ôca se ajustar exactamente no interior da medida cylindrica o decalitro; a capacidade d'essa bola será apenas $\frac{2}{3}$ do decalitro, ou $6^l,666\ldots$, e a sua cubação será de 6666666 millimetros cubicos.

96 — Para terminar este capitulo, trataremos ainda de outras especies de medição de volumes, que, apesar de serem applicações dos principios de geometria e das regras ou formulas apresentadas n'este livro, merecem comtudo especial menção pelo modo como são executadas e admittidas pela pratica.

A operação de medir os solidos a metros recebe differentes denominações, segundo a qualidade das materias a que se applica e as industrias em que é empregada. Assim, diz-se *cubagem,* quando se trata das madeiras de construcção, dos paus de queimar, ou da lenha, etc., e diz-se *arqueação,* a respeito dos vasos de arco, dos toneis que encerram liquidos, das embarcações, etc.

97. — Em geral para se *cubar* um solido irregular, póde empregar-se o seguinte processo abreviado: toma-se uma vasilha de volume conhecido, mette-se o solido dentro d'ella, e depois enche-se d'agua; em seguida, tira-se o solido, e avalia-se o volume da agua contida; e a differença entre o volume da vasilha e o da agua contida, é igual ao volume do solido que se havia mergulhado.

98. — As madeiras apresentam-se no commercio de tres fórmas: ou esquadradas, ou só descascadas, ou só cortadas, isto é, com a propria casca.

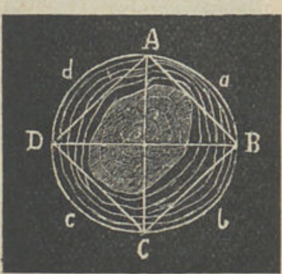


Fig. 81

Os paus esquadrados, devem ser em arestas vivas. Se o pau conserva uma parte do seu roliço, diz-se que tem, ou que está *entre casca.* Para esquadrar em aresta viva um tronco descascado, inscreve-se-lhe no topo um quadrado A B C D, *fig.* 81, e marcam-se as arestas da esquadria, ao longo do tronco, partindo de A, B, C, D, bem destorcidas com o eixo. Os quatro segmentos A*a*B, B*b*C, C*c*D, D*d*A, são chamados, as *costaneiras* do pau.

Para se obter o lado da esquadria, procede se da seguinte fórma: *Mede-se o diametro ao meio do tronco limpo de casca, diminue-se-lhe a decima parte, e toma-se a quarta parte do resto obtido;* o quociente exprime o lado da esquadria com sufficiente approximação.

Assim, por exemplo, tendo um tronco descascado, de circumferencia média $2,^{m}80$, o lado da esquadria será dado pelo seguinte calculo :

$$\frac{2^{m},80 - 0^{m},28}{4} = 0^{m},63$$

99 — *Cubagem das madeiras.* = Já sabemos que a secção do faceamento se toma ao meio da peça esquadrada. A peça considera-se como um parallelipipedo rectangulo, cuja base é a secção media, e cuja altura é o comprimento da peça : a sua cubagem, n'este caso, obtem-se pela formula do volume do parallelipipedo.

Mede-se o diametro ao meio do tronco limpo de casca, diminue-se-lhe a decima parte, e toma-se a quarta parte do resto obtido. Eleva-se esta quarta parte ao quadrado, e multiplica-se o resultado pelo comprimento do tronco.

Exemplo: Um tronco abatido, tem $7^{m},30$ de comprimento, e $0^{m},96$ de volta na parte media, qual é a sua cubagem?

$$\text{Lado da esquadria } \frac{0^{m},96 - 0^{m},096}{4} = 0^{m},216$$

$$\text{Area da secção média } 0^{m},216^{2} = 0^{mq},046656$$

$$\text{Cubagem } 0^{mq},046656 \times 7^{m},30 = 0^{mc},3405888$$

100. — Chama-se *arqueação*, como dissemos, o processo de determinar a capacidade das vasilhas destinadas aos liquidos. Se as vasilhas são cylindricas, ou em fórma de cones trundados, a sua arqueação faz-se conforme as regras sabidas da geometria pratica, para a medição dos volumesdos solidos. Porém no commercio, e nos varejos feitos para a cobrança de impostos sobre liquidos, em que é frequente o uso da arqueação, acham-se por toda a parte adoptados processos mais expedidos, de varia segurança, e certos instrumentos de arqueação, de que vamos dar uma ideia succinta.

101. — As vasilhas de arco, segundo as suas fórmas e dimenssões são denominadas : *toneis*, *cascos*, *pipas*, *quartos*, *quartolas*, *pipotes*, *barris*, *balseiros*, *dornas*, *baldes*, *etc*.

Os toneis e as outras vasilhas da mesma forma, podem considerar-se como a somma de dois troncos de cone identicos, reunidos pelas bases maiores, *fig.* 82; mas isto não é bem exacto porque a secção media, feita segundo o eixo do tonel, é limitada por duas curvas alongadas DFH e EGI, que se approximam muito da ellipse ou da parabola. E', pois, indispensavel modificar de modo conveniente a consideracão dos dois troncos de cone componentes, multiplicando por um coefficiente constante o volume obtido por esse modo; coefficiente, achado pelo calculo ou pela experiencia, mas que dê o excesso de volume devido á curvatura longitudinal do tonel, que se considera como sendo parabolica.

O coefficiente que deve ser adoptado, é o numero 0,60, dado pelo calculo, e confirmado pela experiencia.

O processo de arqueação vulgarmente empregado é o seguinte:

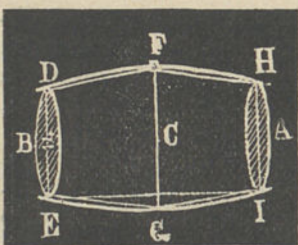


Fig. 82

Medem-se os diametros interiores dos *tampos* A e B *fig.* 82, se são differentes, e toma-se a media; mas basta medir só um se são iguaes. Mede-se tambem o diametro interior do *bojo C*, ou mettendo o metro ou um fio de prumo pelo *batoque F*, ou por fóra achegando aos lados da vasilha, dois fios de prumo, e deduzindo depois duas vezes a espessura da *aduela*. Mede-se, em terceiro logar, o comprimento interior do tonel, tomando o de fóra e deduzindo a profundidade dos *javres* (entalhes circulares, abertos na grossura das aduelas, onde se fixam os tampos), e a grossura dos tampos.

Problema

Avaliar a capacidade de uma quartola de vinho cujas medidas são: tampos $= 0^m,623$*; bojo* $= 0^m,814$*; comprimento exterior* $= 1^m,352$*; profundidade dos javres* $= 0^m,042$*; grossura dos tampos;* $= 0^m,02$.

Typo do calculo

Bojo	0,814
Tampo..........	0,623
Differença	= 0,191
Coefficiente de curvatura....	60
	0,1146
Tampo	0,623
Diametro medio definitivo...	0,7376

$$\text{Area} = \pi \left(\frac{0,7376}{2}\right)^2 = 3,14 \times 0,136 =$$

$$
\begin{array}{lr}
 & =0{,}427 \\
\text{Comprimento interior} \ldots\ldots & 1{,}228 \\
\hline
 & 3416 \\
 & 854 \\
 & 854 \\
 & 427 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{Capacidade} = 0^{mc},524356 = 524^{l},36$$

O diametro do bojo é difficil de se obter, se o tonel é grande e está encanteirado no meio de outros. Mas, tambem, dispensa-se a medida d'esse diametro, e basta conhecer o excesso d'elle sobre o do fundo. Para esse fim, faz-se um esquadro com duas ripas, e ajusta-se ao tonel como representa a *fig.* 83, ficando um dos lados certo com o aro do tampo e o outro bem destorcido e tangente ao bojo. O intervallo *ab* será a differença entre o raio do tampo e o do bojo: mede-se o diametro do tampo, toma-se metade, junta-se a esta a differença $ab \times 0{,}6$, e ahi está o raio medio, cujo quadrado se multiplica por 3,14, e pelo comprimento interior.

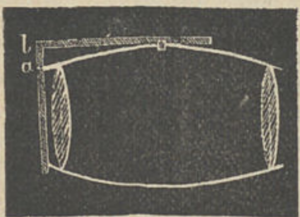


Fig. 83

Problema

Avaliar a capacidade de um tonel cujas dimensões são: Diametro do tampo $= 1^m,325$; *differença* ab$=0^m,219$; *comprimento* $1^m,754$; *fundura dos javres* $= 0^m,045$; *grossura dos fundos* $= 0^m,031$.

Typo do calculo

$$
\begin{array}{rr}
\text{Raio} & =0{,}6625 \\
\text{Excesso } 0{,}219 \times 0{,}6 & =0{,}1314 \\
\hline
\text{Raio medio} & =0{,}7939 \\
 & 0{,}79 \\
\hline
 & 714 \\
 & 555 \\
\hline
(\text{Raio})^2 & =0{,}6264 \\
\pi & = \quad 3{,}14 \\
\hline
 & 25056 \\
 & 6264 \\
 & 18792 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{Capacidade} = 1{,}966896 \times 1^m,602 = 3^{mc},151134$$

Logo o tonel contém 3151 litros, o que equivale a mais de 7 pipas.

Calculo subsidiario

Comprimento exterior..........		$=1^m,754$
Fundura dos javres. $=0^m,045$		
Grossura dos fundos $=0^m,031$		
	$0^m,076 \times 2$	$=0^m,152$
Comprimento interior..........		$=1^m,602$

Observação — Se o comprimento do tonel, quartola, ou vasilha em geral, exceder pouco ao diametro do bojo, não se multiplicará a differença *ab* por 0,6, mas por 0,56.

Este modo de calcular não é exacto; mas, para os calculos particulares e para os varejos que devem nas adegas fazer os agentes administrativos, póde ter-se a segurança de que satisfaz razoavelmente. Em todo o caso, é essencial que o medidor seja bem experiente e sagaz, para advinhar as compensações de que o calculo tenha necessidade.

102 — A arqueação póde ser feita por medição interior, com brevidade, segurança e notavel diminuição de trabalho, por meio de *varas* graduadas, de ferro, que se introduzem pelo batoque, ou a prumo, ou inclinadas ao ponto mais baixo de um dos fundos do tonel.

Porém, adoptando-se este systema, ou ha de haver *varas* graduadas, em particular, para cada fórma differente, ou as dimensões dos toneis devem ter uma proporção constante, para que possa haver um unico padrão.

Já quizeram introduzir nas alfandegas portuguezas o uso da vara ingleza de galões e o da vara franceza de decalitros. E' escusado gastar tempo em se demonstrar o absurdo de tal medida; basta, sómente, recordar que a proporcionalidade entre as dimensões de nossos toneis não é a mesma que ha entre as dos toneis francezes, nem a que ha nos inglezes. Poderiamos, sim, ter uma vara para arqueação, mas deveria ser uma vara especial, *graduada* em harmonia com a fórma dos nossos toneis; e seria necessario que uma lei regulasse a proporção entre as tres dimensões, *comprimento interior, diametro do bojo* e *diametro do fundo.*

A formula, pela qual se graduam as varas francezas e inglezas, é a seguinte:

Volume $= 0,605 \times \overline{AB}^3$ representando A B o comprimento da vara, desde o batoque até ao ponto mais baixo de um dos fundos do tonel.

Das experiencias a que procedeu, o ex.^{mo} general J. M. Couceiro da Costa concluiu que esta formula não serviria para a graduação da vara portugueza de litros, ou de decalitros, e que seria indispensavel modifical-a, crendo que a mais segura deveria ser est'outra, a saber:

$$\textit{Volume}\ldots \text{ entre } 0{,}60 \text{ e } 0{,}65 \times \overline{AB}^3,$$

conforme a vasilha fôr alongada, ou tiver o comprimento quasi igual ao diametro do bojo.

103. — No commercio empregam-se tambem as medidas graduadas, as medidas de vidro principalmente, como usam os chimicos e os pharmaceuticos.

Qualquer pessoa póde construir uma *bitola*, para medir o liquido contido n'um vaso. O processo é este: deite no vaso um litro de liquido; metta-lhe uma vara bem a prumo, até ao fundo, tire-a immediatamente, e faça um córte na extremidade molhada. Em seguida lance outro litro; introduza a vara; tire-a, e faça outro golpe. E assim vá continuando até encher o vaso.

Não se deve demorar a vara dentro do liquido, nem para graduar, nem para depois medir; porque o liquido embebe-se na vara para cima do ponto de nivel, e resulta d'ahi uma avaliação falsa.

Este methodo emprega-se em algumas herdades, para saber a quantidade de leite mungido para os baldes ou francelas de cada vez que se ordenha o gado.

VIII

NOÇÕES SOBRE NIVELAMENTO

104. — O levantamento de plantas tem por fim construir um polygono semelhante áquelle que se obtem projectando um terreno sobre um plano horizontal. Este polygono porém não basta para dar uma idéa da fórma do solo; é necessario conhecer além d'isso as alturas relativas dos seus differentes pontos acima do plano sobre o qual é projectado. O plano de projecção toma o nome de *plano de comparação.*

A altura d'um ponto acima do plano de comparação é a *cota* d'esse ponto,

Se o plano de comparação é o nivel dos mares a cota toma o nome de *altitude.*

Sejam 60^m a cota de um ponto A e supponhamos que um outro ponto B está 3^m abaixo de A; é evidente que a cota de B será $60 - 3 = 57^m$.

A differença entre a altura d'um ponto B e a do ponto A cuja cota é conhecida, é pois sufficiente para calcular a cota do ponto B.

O *nivelamento* tem por fim determinar esta differença, que se denomina *differença de nivel.* Para isso emprega-se um *nivel* e uma *mira.*

Um *fio de prumo* em equilibrio sob a acção da gravidade toma uma direcção fixa que se chama *vertical.*

Todo o plano perpendicular á vertical é um *plano horizontal*, e qualquer recta traçada n'um plano horizontal é uma *linha horizontal.*

Duas linhas horizontaes que se cortem determinam um plano horizontal.

Uma linha horizontal girando em torno de um dos seus pontos descreve um plano horizontal.

Todos as verticaes concorrem no centro da terra que se suppõe espherica; consideram-se comtudo as verticaes pouco affastadas uma da outra como sendo parallelas. O emprego do nivel funda-se sobre este principio.

105 — **Nivel d'agua.** — Este instrumento, compõe-se de um tubo cylindrico de metal *fig.* 84, de um metro pouco mais ou menos de comprimento, por 30 a 35 millimetros de diametro, recurvado nas suas extremidades, em cada uma das quaes sustenta um frasco de vidro. O diametro interior d'estes frascos é igual; e para evitar que possam quebrar-se com facilidade, quando se transporta o instrumento, cobrem-se com mangas de metal. O tubo metallico tem adaptada, a meio do seu comprimento, uma virola que sustenta um bocal, onde entra a haste em volta da qual gira o instrumento, quando montado no competente tripé.

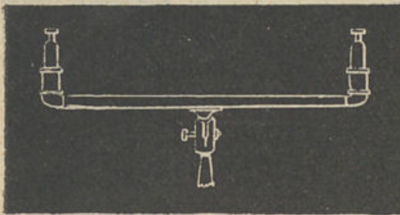


Fig. 84

O liquido enche o vão interior até metade ou dois terços da altura dos frascos, e a capillaridade fazendo elevar a superficie do liquido junto das paredes dos frascos, fórma um annel ou menisco que a reflexão torna mais escuro do que o resto do liquido, e que estando á mesma altura em ambos os frascos determina a linha de nivel apparente. Verifica-se se o nivel está horizontal, dirigindo o raio visual tangencialmente ás duas intersecções dos meniscos com o vidro; e para tornar bem visiveis as linhas d'estas intersecções, deve empregar-se, sempre que seja possivel, liquido córado. Os niveis de latão são mais solidos e commodos, porque se desmancham em muitas peças, podendo assim ser facilmente transportados n'uma pequena caixa.

106. — **Miras.** — As miras são instrumentos indispensaveis nas operações do nivelamento. Ha tres especies de miras: 1.ª, *mira simples; 2.ª, mira de corrediça; 3.ª, mira fallante.*

107. — A *mira simples* consiste n'uma regua de madeira *m n*, *fig.* 85, de 2 a 3 metros de comprido, dividida metricamente.

Sobre esta regua move-se um quadrado de lata A B C D ligeiramente redondo nos vertices, de 30 centimetros de lado, dividido em quadrados mais pequenos, dois brancos e dois encarnados ou pretos, ficando os quadrados da mesma côr nos dois angulos oppostos. A intersecção das duas linhas determina um ponto P, ao qual se chama *ponto de visão.*

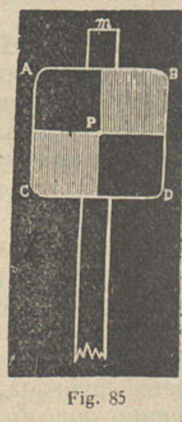


Fig. 85

O quadrado da mira toma o nome de *volante*, adaptando-se á vontade na régua por meio de um cursor de latão I, *fig.* 86, que permitte fazel-o deslisar a todo o comprimento da regua. Um parafuso de pressão V, collocado no cursor, serve para fixar o *volante* quando a operação está concluida.

Para medir as alturas com maior rigor, faz-se uso da *mira de corrediça,* e da *mira fallante.*

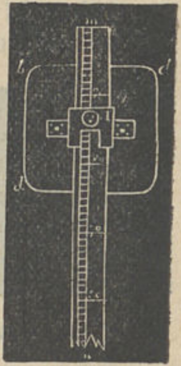


Fig. 86

108. — **Mira de corrediça.** — Para medir alturas assás consideraveis, faz-se uso d'esta mira. Este instrumento é formado de uma regua M N H, *fig.* 87, e de um volante A B C D, fixo a uma das extremidades, escorregando com facilidade sobre uma calha de madeira longitudinalmente adaptada na regua principal. Fazendo escorregar a regua sobre a calha póde-se elevar o volante acima da extremidade M N da régua, e por consequencia augmentar o seu comprimento. Tanto a regua principal como a que anda na corrediça têem 2 metros de comprimento cada uma, o que permitte augmentar a mira até 4 metros. Estas reguas são divididas em decimetros e centimetros.

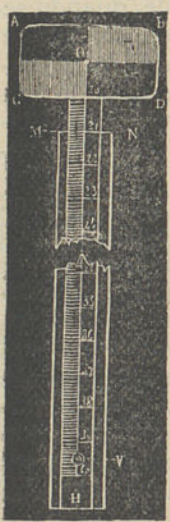


Fig. 87

Quando o ponto *O* coincidir com a linha M N, é claro que terá 2 metros de elevação acima do solo; por isso fazendo elevar o volante, de modo que a linha M N coincida com o numero 21, o *ponto de visão O* eleva-se a 21 decimetros acima do solo. Um parafuso de pressão V é destinado a firmar a regua movel sobre a calha, a fim de facilitar a leitura da graduação.

109. — **Mira fallante.** — Esta mira foi inventada por um engenheiro francez chamado Bourdalone, offerecendo a vantagem de apresentar divisões assás visiveis para que o observador as possa distinguir facilmente á simples vista.

A mira fallante mais usada consiste em duas reguas de madeira, *fig.* 88, de 2 metros de comprimento sobre $0^m,10$ a $0^m,12$ de largura, o que permitte, por meio de uma charneira ou corrediça, elevar o seu comprimento até 4 metros.

Esta mira está dividida em decimetros, formando cada uma dois grupos de 5 centimetros, traçados alternadamente sobre os dois terços da largura total da régua, tendo no terço restante gravadas letras de conta. Cada decimetro é marcado por uma letra invertida, sendo a ultima indicada por uma letra mais saliente que as outras, pintada em fundo escarlate. Todos os

Fig. 88

numeros dos decimetros do segundo metro têem cada um na parte superior um ponto; os do terceiro dois, e os do quarto tres.

Para ler sobre a mira fallante os numeros que estão virados sobre este instrumento, lê-se a divisão sobre a qual cae o cruzamento dos fios do reticulo da luneta. Supponhamos que esse ponto cae em P sobre a mira, ter-se-ha directamente 1 metro e 28 centimetros.

Para collocar a mira fallante n'uma posição vertical, ha n'ella adaptado um pequeno nivel *C*.

110 — **Nivelar uma superficie pouco extensa.** — Para nivelar uma superficie pouco extensa, emprega-se o nivel de perpendiculo ou de bolha de ar; fazendo uso de duas reguas de 2 metros de comprido proximamente, uma das quaes é dividida metricamente.

Para conhecer a differença de nivel que existe entre os pontos B e C, *fig.* 89, colloca-se a régua dividida metricamente F B n'uma posição vertical, de maneira que uma das suas extremidades B fique apoiada sobre o ponto inferior; depois estabelece-se a régua não dividida C D n'uma direcção horizontal, de maneira que uma das extremidades C fique apoiada sobre o ponto mais elevado. Satisfeito este preceito, eleva-se ou abaixa-se a outra extremidade até que o fio de prumo do nivel coincida com a *linha de fé*, e a extremidade D indicará sobre a régua dividida, a differença da altura entre os dois pontos C e B.

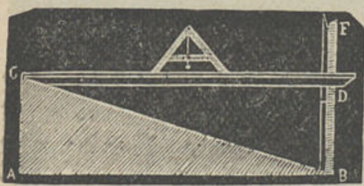


Fig. 89

Se a distancia fôr consideravel, póde-se empregar este processo repetindo successivamente a mesma operação. A somma total de todos estes comprimentos, obtidos com a regua collocada verticalmente, representa a altura do ponto mais elevado.

Toda a linha A B que vae de um ponto a outro, sobre o mesmo nivel, denomina-se *horisontal;* chama-se *vertical* á linha A C, que sendo perpendicular á linha *horisontal,* marca a differença de elevação do ponto C ao ponto B. Quanto á linha inclinada C B, que parte do ponto mais elevado ao ponto mais baixo, chama-se *talude*. O nome de *rampa* é dado aos taludes que tocam o terreno.

111. — **Differentes especies de nivelamentos.** — O nivelamento distingue-se: 1.º em *nivelamento simples; 2.º*, em *nivelamento composto.*

O *nivelamento simples* é aquelle que se executa n'uma só estação, quer seja collocado o instrumento sobre um dos pontos para dirigir o raio visual para outro, quer seja estabelecendo-o pouco mais ou menos no meio da distancia d'estes dois pontos, operando-se successivamente sobre cada um d'elles sem tirar o instrumento da sua posição.

Por *nivelamento composto* entende-se uma série de nivelamentos simples que se fazem entre dois pontos, estabelecidos além dos limites da extensão do raio visual, entre os quaes se acham muitas desigualdades de terreno, ou entre os pontos situados n'uma inclinação rapida, na qual não é possivel operar empregando uma só estação.

112 — **Nivelamento simples.** — Para determinar entre os pontos A e D *fig.* 90, a differença de nivel, ou a inclinação que existe entre os mesmos pontos, empregando o nivelamento simples, opera-se do seguinte modo:

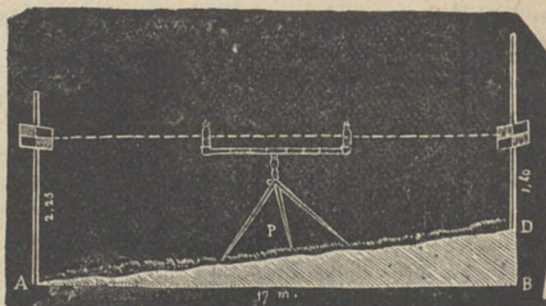


Fig. 90

Colloca-se o instrumento no ponto P considerado como o melhor entre os pontos A e D, nos quaes se faz plantar a mira n'uma posição bem vertical, e de maneira que o *volante* fique para o lado do observador; depois por meio de signaes convencionaes, faz-se subir ou descer o volante conforme fôr necessario, até que o raio visual, razando a superficie do liquido dos vidros do nivel, toque o *ponto de visão* da mira. Logo que esta condição é satisfeita, fixa-se o volante e lê-se sobre a régua a *cota* da altura do ponto A observado, e inscreve-se o numero achado. Procede-se do mesmo modo em relação ao ponto D, e regista-se o numero obtido sobre o desenho: esta segunda operação, relativamente á precedente, toma o nome de *nivelada da frente.*

Para concluir a operação só resta medir com a cadeia a distancia do ponto A ao ponto D.

Quando as cotas obtidas para cada um dos dois pontos onde se estabelece *a mira*, forem desiguaes, toma-se a differença dos dois numeros obtidos, e o resultado indicará a differença de nivel entre os dois pontos A e D.

Supponhamos, á vista d'este exemplo, que se achou $2^m,25$ para a altura do ponto A e $1^m,40$ para a altura do ponto D: a differença de $2^m,25$ para $1^m,20$ é $0^m,85$, a qual exprime que A (relativamente a D) fica mais baixo de 85 centimetros que o ponto D, ou reciprocamente que D (relativamente ao ponto A) é mais elevado d'aquella mesma quantidade.

Esta differença é representada por B D acima da linha horisontal.

Ora, sendo a distancia dos dois pontos nivelados A e D de 17 metros, se dividirmos a differença de nivel de 85 centimetros por 17, o resultado 5 centimetros exprimirá a differença de nivel por metro.

D'onde podemos concluir: *Que, conhecendo a differença de nivel de dois pontos e a sua distancia, para obter a differença de nivel por metro, dividir-se-ha a differença de nivel entre esses pontos pela distancia que os separa.*

113 — **Nivelamento composto.** — Propondo-nos nivelar o terreno A B C D, *fig.* 91 quando os pontos extremos A e D são muito affastados um do outro, não é possivel determinar por uma só observação a differença de nivel que houver entre elles. Para fazer o nivelamento composto estabelecem-se muitas estações intermedias, a primeira, por exemplo, em I, para observar os pontos A e B como no

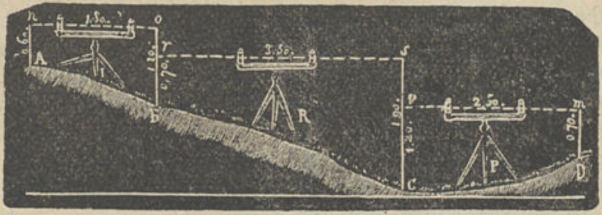


Fig. 91

nivelamento simples; a segunda no ponto R, a terceira no ponto P e assim successivamente.

E' facil vêr, examinando a marcha seguida no primeiro ponto A e no ultimo D, empregando o nivelamento simples como se ligam todos estes pontos para obter o nivelamento composto.

Com effeito, na primeira estação I, a observação dá as cotas An e Bo; na segunda estação R, as cotas Br e Cs; finalmente, na terceira estação as cotas Cv e Dm, collocando sempre o instrumento ao meio das distancias AB, BC, CD e registando as cotas nas linhas do desenho correspondentes ás do terreno, como foi ensinado no nivelamento simples; de todas estas operações se conclue que, os pontos extremos têem uma só cota e os intermedios duas.

Quanto ao comprimento das linhas horisontaes *no, rs,* etc., marcam-se as distancias de um ponto a outro e escrevem-se sobre cada uma d'estas linhas do desenho os numeros que se acharam em virtude da medição que se fez com a cadeia; por exemplo, para *no* $1^m,80$, para *rs* $3^m,50$ e para *vm* $2^m,50$.

Querendo nós agora determinar a differença de nivel entre dois pontos A e D, conhecendo sobre o desenho ou esboço do nivelamento todas as *cotas* atraz e adiante, faremos uso da seguinte tabella:

Estações	Cotas de nivel		Distancia
	Atraz	Adiante	
I. B. P.	An = 0,60 Br = 0,70 Cv = 1,20	Bo = 1,20 Cs = 1,90 Dm = 0,70	no = 1,80 rs = 3,50 vm = 2,50
Sommas..	2,50	3,80	7,80
Differença...............	1,30		

Na primeira d'estas columnas acham-se indicadas as diversas *estações*; na segunda (que é subdividida em duas) acham-se inscriptas as *cotas* atraz e adiante; as primeiras são as differentes alturas da mira resultante das observações dirigidas para o ponto A; as segundas são provenientes das observações dirigidas para o ponto B, etc.; finalmente na terceira columna registam-se as distancias entre cada ponto da mira.

Todas as sommas obtidas são inscriptas n'uma mesma linha horisontal; quanto á sua differença, escreve-se n'uma das subdivisões da columna. Eis aqui a regra que se deve seguir para se obter a differença de altura de dois pontos propostos: *Faz-se a somma dos numeros comprehendidos na columna de diante, depois dos numeros contidos na columna detraz; diminue-se a menor somma da maior, e o resultado exprimirá a differença de nivel dos dois pontos dados.*

O ponto mais elevado é aquelle que corresponde á somma menor (lembrando-nos que o ponto A, n'este exemplo, é relativo á columna detraz, e B á columna de diante).

A somma das cotas de diante sendo maiores que as detraz, diminuindo a segunda da primeira, obtem-se $1^m,30$, o que exprimirá que o ponto D está 1 metro e 30 centimetros abaixo do ponto A.

Com effeito, na primeira estação, vê-se que o ponto A é mais elevado que o ponto B de (1,20 — 0,60), isto é, de 60 centimetros; na segunda estação, vê-se que o ponto B é mais elevado que o ponto C de ($1^m,90 - 0^m,70$) isto é, de $1^m,20$; logo o ponto A é mais elevado que o ponto *C* de ($0^m,60 + 1^m,20 = 1^m,80$); na terceira estação, o ponto C fica mais baixo que o ponto D de ($1^m,20 - 0^m,70 = 0,50$), ou D mais alto de $0^m,50$ relativamente a C; ora, sendo A mais elevado que C de $1^m,80$ e D sendo mais elevado que o ponto C, $0^m,50$, é facil concluir que A é mais elevado que D de ($1^m,80 + 0^m,50 = 1^m,30$); que é o numero já obtido conforme a regra precedente.

Havendo duvida na exactidão do nivelamento, pode-se verificar a operação repetindo-a pelo ponto opposto em relação áquelle de que se partiu, empregando o methodo do nivelamento composto. O resultado obtido deve ser o mesmo, se a operação se tiver executado com perfeição.

114 — **Nivelamento geral d'um terreno.** — O nivelamento geral d'um terreno consiste as mais das vezes em determinar as alturas relativas dos seus pontos principaes.

Para isso começa-se por nivelar o contorno do terreno ligando em seguida este nivelamento, com o dos pontos mais notaveis collocados no seu interior. Quando seja posssivel, colloca-se o nivel n'um ponto central, do qual se possa nivelar todos os pontos que se desejam cotar sobre o plano, e *irradia-se* em torno do ponto occupado pelo nivel.

Esta operação denomina-se nivelamento por *irradiação*. A planta d'um terreno contendo a indicação das alturas d'um grande numero de seus pontos acima do plano de comparação toma o nome de *plano cotado*.

Como semelhante plano é ainda insufficiente para representar á vista o relevo do terreno, construe-se para esse fim o seu *perfil* seguindo alguns alinhamentos convenientemente escolhidos e determinam-se as curvas de nivel.

115. — **Perfil.** — Supponhamos que foram nivelados um certo numero de pontos A, M, N, O, P, Q, B situados n'uma direcção rectilinea dada e medidas as suas distancias horisontaes. Se transportarmos estas distancias para a recta A B, *fig.* 92, e levantarmos nos pontos M', N', O', P', Q' e B' perpendiculares, aquella recta, representando as cotas dos pontos M, N, O... acima do plano de comparação, a curva que liga as extremidades d'aquellas perpendiculares representará exactamente a fórma do terreno, segundo a direcção considerada. Esta curva, que se denomina *perfil*, indica a intersecção do terreno com um plano vertical.

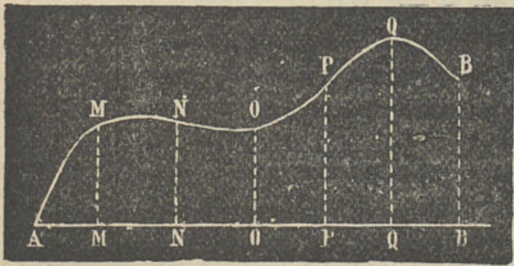


Fig. 92

116. — **Curvas de nivel.** — Denomina-se *curva de nivel* a intersecção do terreno com um plano horizontal passando por todos os pontos que têem a mesma cota.

As ondulações d'um terreno ficarão perfeitamente representadas se o cortarmos por planos horizontaes muito proximos, projectarmos as curvas resultantes d'estes córtes, sobre um plano de comparação, e indicarmos ao lado de cada projecção a altura do plano correspondente.

Supponhamos que se pretende determinar uma *curva de nivel* que passe por um ponto A, *fig.* 93.

Collocado o nivel em O a uma certa distancia do ponto A, e a mira n'este ponto em posição vertical, o ajudante ou porta-mira obedecendo ás indicações do operador, fará escorregar o volante até que o raio visual determinado pelo nivel se confunda com a linha de fé.

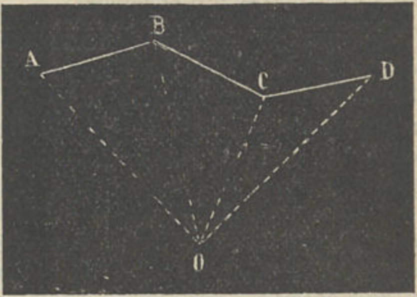


Fig. 93

Em seguida o porta-mira, depois de ter fixado o volante caminhará para B, a 10 metros de distancia de A, evitando tanto quanto possivel, subir ou descer, e collocará n'esse ponto a mira verticalmente, sem tocar no volante; o operador então far-lhe-ha signal para que se colloque um pouco mais alto ou mais baixo afim de poder levar a linha de fé ao plano do nivel.

Conseguido isto, obter-se-ha um ponto, que é aquelle aonde se encontrar o pé da mira, que estará á mesma altura que o ponto A, e portanto um ponto da curva, no qual se cravará uma estaca.

Para obter outros pontos C, D, etc., da curva proceder-se-ha da mesma fórma.

Levantando a planta da figura A B C D, ter-se-ha a projecção da curva de nivel passando pelo ponto A.

117. — Para fazermos uma ideia perfeita do que sejam *curvas de nivel,* tomemos a metade d'uma batata, *fig.* 94, e supponhamos que ella representa a reducção segundo uma dada escala, d'um movimento de terreno. N'esta metade da batata cortemos quatro talhadas de espessura igual. Pondo estas talhadas umas sobre as outras, temos o terreno em ponto pequeno. Colloquemos a primeira talhada sobre o esboço e tracemos no papel a curva (1) seguindo os contornos d'esta primeira talhada. Tiremol-a sem desarranjar as outras das suas posições; deixemos cair a segunda; como é mais pequena que a primeira cahirá no interior da curva (1). As duas ultimas talhadas não se movem durante o traçado da curva da segunda talhada. Repetindo a mesma operação, obtemos finalmente na parte inferior da *fig.* 94, as quatro curvas 1, 2, 3, 4.

Se a curva (1) está de nivel com o solo, os pontos pertencentes ás curvas 2, 3 e 4 terão respectivamente acima do solo uma altura igual a a, a duas vezes a, e a tres vezes a; e sabemos, pela nossa escala, o que vale essa altura a.

Se tornarmos a pôr as talhadas umas sobre as outras, inteirando a batata, vemos que *para os logares em que o declive é mais ingreme as curvas são mais approximadas no esboço.* D'este modo conseguiremos figurar um terreno de sorte que, com um simples lanço de olhos, podemos vêr quaes são os pontos mais elevados e mais baixos, concluir a direcção das inclinações e formar uma ideia approximada das fórmas d'esse terreno.

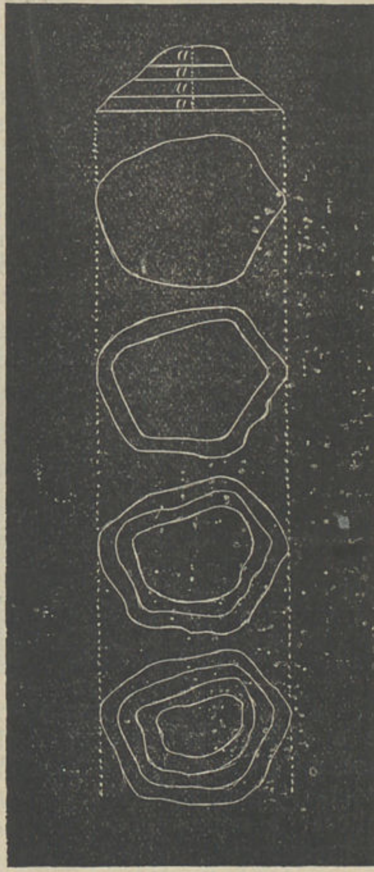


Fig. 94

Em logar de empregar metade de uma batata, tomemos uma d'essas antigas crinolines ([1]), cujos arcos de aço são igualmente espaçados em altura.

Conservando a crinoline estendida representa em ponto pequeno um movimento de terreno, e os arcos figuram as curvas que separam as camadas de terreno, tendo todas a mesma espessura. Deixando cair a crinoline, os arcos collocam-se no interior uns dos outros, e figuram as curvas sobre o plano.

118. — Denomina-se carta *topographica,* o plano sobre o qual se tenha traçado um numero maior ou menor de curvas de nivel.

Os planos horizontaes que determinam as curvas, devem ser equidistantes.

A distancia entre dois planos consecutivos toma o nome de *equidistancia real.*

Imaginemos agora um relevo semelhante ao terreno e n'uma escala dada; os planos secantes estarão tambem alli representados, e a sua distancia será igual á equidistancia real multiplicada pela escala; é a este producto que se chama *equidistancia graphica.*

([1]) Saia entufada assente sobre circulos parallelos de aço ou de barba de baleia para dar maior roda ao vestido.

Assim, representando por E a equidistancia real, e a equidistancia graphica e $\frac{1}{M}$ a escala, ter-se-ha:

$$e = E \times \frac{1}{M}$$

Se E for constante, e será inversamente proporcional a M ou directamente proporcional á escala.

De maneira que para uma escala muito pequena, e tornar-se-ha tambem muito pequeno; mas não se póde descer abaixo d'um certo limite, porque chegaria um momento em que, sobre o plano topographico, as curvas se confundiriam. Se suppozermos ao contrario, e constante, E será proporcional a M, ou inversamente proporcional á escala. Por consequencia um relevo dado será representado por um numero de curvas tanto menor, quanto menor fôr a escala. Façamos uma applicação numerica e seja

$$e = 0^m,002 \qquad M = 80000$$

Teremos

$$E = 0^m,002 \times 80000 = 160^m$$

D'onde, na escala $\frac{1}{80000}$, uma montanha de 640^m será representada por $\frac{640}{160} = 4$ curvas de nivel.

Na escala $\frac{1}{40000}$, seria figurado por 8 curvas, etc.

119. — A equidistancia graphica e a escala estão sempre indicadas sobre o plano topographico. Póde-se portanto por um simples calculo, conhecer a equidistancia real, e, por consequencia, saber a altura d'uma montanha indicada por um certo numero de curvas de nivel.

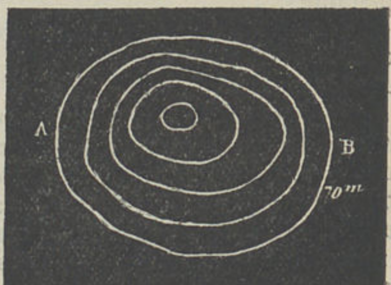


Fig. 95

Com effeito, seja uma montanha representada por 5 curvas *fig. 95*, na escala $\frac{1}{5000}$. Supponhamos que a equidistancia graphica seja $0,^m003$

Tem-se immediatamente

$$E = 0^m,003 \times 5000 = 15^m$$

A ultima curva está pois a $15^m \times 4 = 60^m$ acima da primeira, e se a cota d'esta é 70^m, a altitude da ultima será $70^m + 60^m = 130^m$.

Do que fica exposto se conclue que, um plano topographico representa todos os accidentes do solo, tão fielmente como um *plano relevo,* porque encerra todos os dados necessarios para construir o proprio relevo.

120. — **Hachures.** — A hachure *fig. 96* é a linha de maior declive entre duas curvas: marca a direcção que seguiria uma gôta d'agua, descendo de um ponto de uma curva para a curva inferior, se a superficie do terreno fosse perfeitamente lisa. A hachure é normal ás duas curvas sobre que apoia, isto é, faz angulo recto com as tangentes ás curvas nos pontos em que ella as encontra.

A hachure é a linha mais curta que se póde tirar de um ponto de uma curva á curva inferior. O comprimento das hachures varia

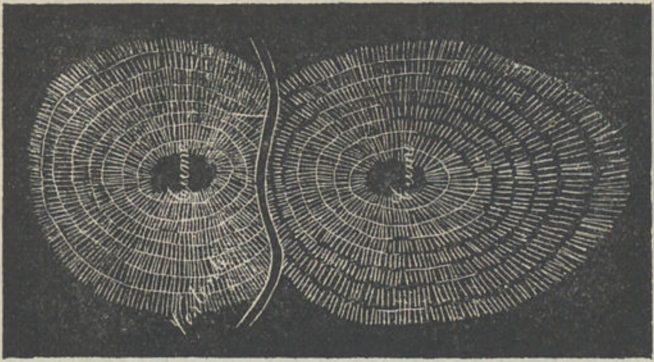


Fig. 96

pois com o afastamento das curvas; e como os declives são tanto mais rapidos quanto as curvas são mais approximadas, podemos desde já estabelecer uma primeira conclusão:

Em uma mesma planta, ou em plantas de escalas differentes, duas hachures de comprimento igual indicam declives igualmente rapidos; de duas hachures desiguaes, a mais curta indica declive mais rapido.

Convencionou-se espaçar as hachures de $1/4$ do seu comprimento, e engrossar-lhes o traço á medida que o declive augmenta. Resulta d'esta convenção que, quanto mais rapido é o declive, mais apertadas são as hachures, mais o seu traço engrossa, mais a tinta do seu desenho se torna intensa.

Chegamos assim a uma conclusão final:

Em uma planta ou em plantas de escalas differentes, quanto masi *as tintas produzidas pelo conjuncto das hachures forem negras e intensas, mais rapido é o declive do terreno; quanto mais desbotadas mais suave será.*

O emprego das hachures, por consequencia, habilita a julgar dos declives.

Assim traçadas entre as curvas, as hachures produzem fitas distinctas que envolvem todas as sinuosidades do terreno.

As *hachures* formam uma tinta graduada. Para obter effeito preto e brilhante, ellas devem ser grossas, accentuadas, e o preto deve ser tanto como o branco.

Afim de emitar o que existe no terreno onde o começo e a parte inferior dos declives se ligam insensivelmente ao rerreno adjacente, desfiam-se as *hachures* no alto e no baixo dos movimentos do terreno. As planuras de declives muito suaves, as linhas de cumes e os desfiladeiros não são marcadas a côres ordinariamente.

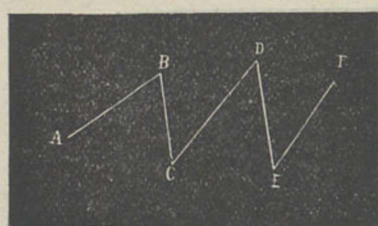


Fig. 97

121. — E' importante poder-se traçar sobre uma carta ou n'um plano topographico as *linhas caracteristicas*, isto é as *linhas de separação das aguas* e os *thalwegs*.

Na *fig. 97* representamos schematicamente a fórma typica da superficie terrestre para melhor comprehensão das difinições que damos em seguida:

Tergo — resultante do encontro de dois planos formando um angulo diedro convexo: *a b c*, *c d e*. A' aresta do diedro se chama *linha de festo, linha de separação das aguas* ou *cumieira;* as faces lateraes *a b*, *b c*, *c d*, *d e*, são as *vertentes* ou *encostas.*

Valle — resultante do encontro de dois planos formando um angulo diedro concavo: *b c d*, *d e f*. A' aresta do diedro se chama *thalweg;* as faces lateraes *b c*, *c d*, *d e*, *e f*, que constituem as encostas ou vertentes, tratando-se de um *tergo*, passam a chamar-se *flancos* ou *margens* tratando-se de um valle.

122. — Fizemos todo o possivel por expôr com clareza as explicações precedentes; comtudo julgamos que não é facil abarcar á primeira vista o espirito d'esses processos destinados a representar o terreno nas plantas. *Do que fica exposto deduzem-se certas conclusões evidentes que é preciso absolutamente saber e admittir para poder lêr o terreno nas plantas:*

1.ª Para representar o terreno, suppõe-se dividido em camadas da mesma espessura, por uma serie de planos horisontaes. Estes planos determinam curvas sobre a superficie do terreno. As curvas são representadas em projecção n'estas plantas; as cotas inscriptas nas plantas dão a altitude dos pontos (altura acima do nivel do mar).

2.ª A espessura das camadas do terreno não é a mesma em todas as plantas; ella augmenta á medida que a escala da planta diminue; de sorte que as curvas têem cotas que variam de 2,50 em 2,50 metros para a escala $\frac{1}{10:000}$, de 5 em 5 metros para a de $\frac{1}{20:000}$, de 10 em 10 para a de $\frac{1}{40:000}$, de 20 em 20 para de $\frac{1}{80:000}$.

3.ª Em uma mesma planta ou sobre plantas de escalas differentes, curvas igualmente afastadas, e por consequencia hachures iguaes, representam declives iguaes; quanto mais se apertam as curvas, mais a tinta produzida pelas hachures se torna intensa, mais se torna rapido o declive.

Estes principios applicam-se a todas as alturas e profundidades, quaesquer que seiam as fórmas que apresentem; mas como é raro haver uma cova que não tenha agua, indica-se esta circumstancia com traços horisontaes sobre o desenho, ou com tinta azul. Se pelo contrario a cova é secca, não ha meio de a distinguir de uma montanha sem um signal particular; o mais simples e o mais seguido é escrever-lhe, *cota da sua profundidade.*

EXERCICIOS

1.º Qual deve ser o diametro d'um reservatorio cylindrico que tem $2^m,40$ de altura e que deve conter 1200 litros d'agua?

2.º Pede-se a capacidade de um tanque, tendo 8 metros de comprido, 4 metros de largo e $2^m,25$ de fundo, e a quantidade de agua que poderá levar.

3.º Precisa-se saber o peso de uma pyramide quadrangular de ferro fundido, tendo 10^m de altura e sendo a base um quadrado com $2^m,50$ de lado. A densidade do ferro fundido é 7,2.

4.º Qual é a superficie convexa bem como o volume d'um cylindro recto, cujo diametro da base mede $2^m,25$ e que tem por altura $6^m,25$?

5.º Quanto deverá pesar um cylindro de chumbo fundido, cujas dimensões são as seguintes: diametro da base, 2 decimetros, altura 20 decimetros. A densidade do chumbo fundido é 11,302.

6.º Qual é a superficie d'uma esphera de raio $2^m,5$?

7.º Calcular o volume de uma cunha em forma de prisma triangular, cujos triangulos têem de base 4 decimetros e de altura 20 decimetros, sendo a altura da cunha 12 decimetros.

8.º Sendo a geratriz d'um cone circular recto igual a $30^m,45$, e a sua altura $25^m,55$; calcular a superficie lateral e o volume d'este cone.

9.º Sendo dado um hemispherio de raio igual a $0^m,6$, deseja-se construir sobre o circulo maximo que serve de base a este hemispherio, um cylindro cuja superficie convexa seja igual a $\frac{5}{6}$ da superficie do hemispherio.

10.º Calcular a altura d'uma zona, cuja superficie seja equivalente á d'um circulo maximo pertencente a uma esphera de raio $4^m,5$,

11.º Sobre uma esphera de $1^m,8$ de raio, dá-se uma zona, tendo $0^m,20$ de altura; achar o raio d'um circulo equivalente á superficie d'essa zona.

12.º Qual é o diametro d'uma bola de ferro fundido que tem de peso 24 kilogrammas?

13.º Suppondo o globo terrestre perfeitamente espherico, e sabendo que o quarto do meridiano é igual a 10.000:000 de metros, pede-se: o raio do globo, a area da sua superficie e o seu volume.

14.º Achar a area total do cone recto, cuja altura é $20^m,212$ e a geratriz $26^m,415$.

15.º Sendo $14^m,816$ a altura d'um tronco de cone recto, e $16^m,18$ $10^m,14$ os raios das bases, avaliar a superficie lateral.

16.º Calcular a area da zona de $2^m,17$ de altura, na esphera de $438^{mq},76$ de area.

17.º Calcular a aresta d'um cubo, cujo volume é igual á somma dos volumes de tres cubos que têem respectivamente por arestas 3^m, 4^m, e 5^m.

18.º Calcular o volume d'uma pyramide que tem de altura $30^m,45$ e cuja base é um quadrado com 5 metros de lado.

19.º Calcular o raio da base d'um cone circular recto, que tem por altura 3 metros, e cujo volume é igual a um stere.

20.º Um cone recto cujo raio da base é um metro, tem por volume $\frac{1}{5}$ do metro cubico; pergunta-se qual a superficie lateral d'este cone.

21.º Sendo dado um cone truncado, cuja altura é $3^m,25$, o raio da base superior 4 metros, e o da base inferior 22 metros; achar o raio d'um cylindro recto da mesma altura do tronco, sendo estes dois volumes equivalentes.

22.º Calcular o volume d'um prisma recto que tem por base um triangulo equilatero de 5^m de lado, sendo a altura do prisma igual ao lado da base.

23.º Calcular o volume d'um prisma hexagonal regular, tendo o lado da base $2^m,30$ e a altura $5^m,80$.

24.º Uma pilha de paus tem $12^m,40$ de comprimento, $4^m,30$ de largura e $6^m,50$ de altura; avaliar em steres a quantidade de madeira que ella contem.

25.º Qual é o peso do ar contido n'uma sala rectangular, que tem $6^m,80$ de comprimento, $3^m,50$ de largura e $3^m,80$ de altura, sabendo-se que um litro d'ar pesa em media $1^g,3$.

26.º Um tanque rectangular que tem $5^m,40$ de comprimento, $2^m,30$ de largura e $1^m,70$ de profundidade está cheio de agua até $\frac{2}{3}$ da sua altura, quantos hectolitros d'agua contem?

27.º A superficie lateral d'um prisma hexagonal recto é igual a 50^{mq}; o lado da base tem $3^m,80$; achar o volume d'este prisma.

28.º Calcular o comprimento das arestas d'uma pyramide hexagonal regular, bem como a sua superficie lateral e o seu volume, sabendo-se que a pyramide tem por altura 10^m e o lado da base 2^m.

29.º Calcular o volume d'um tronco de pyramide, tendo por bases dois hexagonos regulares, dos quaes um tem 3^m de lado e o outro $1^m,80$, sendo a altura do tronco $1^m,50$.

30.º Pede-se a capacidade d'um tanque, cuja profundidade é de 4^m, tendo as suas paredes em talude, e sendo tanto o fundo como a figura formada pelas bordas do tanque, quadrados com os lados respectivamente iguaes a 30 e 32 metros.

31.º Um monte de cascalho tem por bases parallelas dois rectangulos; as dimensões do primeiro são $2^m,30$ e $1^m,80$ e as do segundo $1^m,50$ e $1^m,20$. Sabendo-se que a distancia entre as bases é $0^m,90$, qual será o seu volume?

32.º Calcular o volume d'um tronco de prisma, no qual a secção recta é um triangulo equilatero com $0^m,50$ de lado e os comprimentos das suas arestas 5^m, 3^m, e $4^m,30$.

33.º Calcular a aresta d'um cubo duplo d'um outro cuja aresta é $0^m,30$.

34.º Qual é a superficie convexa e o volume de um cylindro de revolução que tem 5^m de altura e cujo raio da base é igual a 3 metros?

35.º Calcular a altura d'um cylindro de revolução cuja superficie convexa tem 12^{mq} e o raio da base $2^m,30$.

36.º Calcular a altura d'um cylindro circular recto cujo volume é 4^{mc}, sabendo-se que a circumferencia da base tem $3^m,80$ de comprimento.

37.º Qual é a espessura d'um disco de prata que pesa 25^g, e que tem $0^m,037$ de diametro, sabendo-se que a densidade da prata é 10,47.

38.º O diametro d'um cylindro está para a sua altura como 4 para 7 e a superficie lateral é igual a 87 decimetros quadrados. Quaes são as suas dimensões?

39.º Que diametro é necessario dar á base d'um cylindro para que a sua superficie total seja 1 metro quadrado, se a altura fôr igual ao diametro?

40.º Que profundidade se deve dar a um vaso de fórma circular para que possa conter 1000^{mc} d'agua, sendo o diametro da base 25 metros.

41.º O rectangulo que se obtem planificando um cylindro recto, tem uma diagonal de 3 metros; a altura do cylindro é de $1^m,30$. Qual é o seu volume?

42.º Qual é o comprimento de um fio cylindrico de ferro fundido, tendo $0^m,0015$ de espessura e cujo peso é 3^k; sendo a densidade do ferro 7,2.

43.º Calcular a superficie convexa e o volume d'um cone de revolução que tem 4^m de altura e 3^m de raio da base.

44.º Calcular o raio da base d'um cone circular recto que tem 8^m de altura e 19^{mc} de volume.

45.º A altura e a geratriz d'um cone recto têem respectivamente 8^m e 10^m; calcular a superficie total e o volume.

46.º Qual é a geratriz d'um cone circular recto que tem 8^m de altura, sendo o seu volume 25^{mc}?

47.º Quaes são as dimensões do triangulo rectangulo isosceles que, girando em torno d'um dos cathetos, gera um cone cuja superficie total é 1 metro quadrado ou o volume 1 metro cubico?

48.º Calcular a superficie lateral d'um tronco de cone de revolução de bases parallelas, que tem 5^m de altura, sendo os raios das bases respectivamente iguaes a 3 e 2 metros.

49.º Sendo a superficie lateral d'um tronco de cone de revolução de bases parallelas igual a 30^{mq}, o raio de uma das bases 3^m e a geratriz 2^m; calcular o raio da outra base e a altura do tronco.

50.° Os raios das bases e a altura d'um tronco de cone recto têem respectivamente 2^m,1,30 e 1,^{m}50; calcular a superficie lateral dos troncos de cone que se obtêem cortando o primeiro por um plano parallelo ás bases e passando pelo meio da altura.

51.° Um liquido cuja densidade é 1,72 enche um vaso que tem interiormente a fórma d'um tronco de cone, cuja altura é 0^m,25, tendo os raios das bases respectivamente 0,^{m}20 e 0^m,15. Determinar o volume e o peso d'este liquido.

52.° Um vaso de fórma conica foi construido com um sector circular de folha de Flandres tendo 80° o arco e 0^m,50 o raio. Qual é a capacidade d'esse vaso?

53.° Um copo para Champagne, de fórma conica, tem 0^m,13 de profundidade e 0^m,06 de diametro na borda; deite-se-lhe mercurio até metade da altura, e acabe-se de encher com agua pura; pergunta-se qual o peso de cada um d'estes liquidos, sabendo-se que a densidade do mercurio é 13,59 e a da agua 1.

54.° Qual é a altura d'uma zona cuja superficie é 1^{mq},56, e o raio da esphera 1 metro?

55.° Tendo a superficie d'uma zona 8 metros quadrados e a sua altura 0^m,3, qual será o raio da esphera?

56.° O diametro d'uma esphera tem 4^m; divida-se este em cinco partes iguaes e tirem-se pelos pontos de divisão planos perpendiculares ao diametro. Calcular a superficie das differentes zonas determinadas por esses planos.

57.° Qual é n'uma esphera de raio 3^m, a altura d'uma zona que é equivalente a um circulo maximo?

58.° Calcular a area d'uma esphera de 5^m de raio.

59.° Qual é o raio da esphera que tem 1 metro quadrado de superficie?

60.° Calcular a area d'uma esphera de 5^m de diametro.

61.º Qual é o diametro d'uma esphera tendo 10 metros quadrados de superficie?

62.º Calcular a circumferencia do circulo maximo d'uma esphera, sabendo-se que esta tem 4 metros quadrados de superficie.

63.º Qual é o volume de uma esphera cuja superficie é equivalente á d'um cubo de $0^m,30$ de aresta?

64.º Qual é a superficie d'uma calotte espherica determinada por um plano passando a $0^m,50$ do centro d'uma esphera que tem 3^{mc} de volume?

65.º Sendo 8,85 a densidade do cobre, calcular a aresta de um cubo de cobre que pesa 1 kilogramma.

66.º Calcular o volume de um poste tronco-conico, cujas circumferencias extremas medem $0^m,40$ e $0^m,50$ e o comprimento do poste é $8^m,40$.

67.º Sendo $540^{mq},30$ a area de uma esphera, calcular a altura d'uma calotte, cuja area é igual a $220^{mq},40$.

68.º Achar o raio de uma esphera, cujo volume é meio proporcional entre os volumes d'um cylindro e d'um cone, tendo 3^m de altura e por base commum em circulo de 1^m de raio.

69.º Tendo uma esphera 5^m de raio, qual será o raio de uma outra cujo volume seja metade do da primeira.?

70.º Um tubo cylindrico, tendo $3^m,40$ de comprimento, é feito de chapa pesando 50 grammas por decimetro quadrado; o peso do tubo é $12^{kg},60$; calcular o diametro do tubo.

71.º Planificar um tronco de cone de revolução, sendo $1^m,20$ e $0^m,80$ os raios das bases e $1^m,60$ a altura.

72.º Calcular a area de um fuso espherico, cujo angulo vale 34º,,27',,25'' e o raio da esphera $0^m,58$.

73.º Calcular a area de um fuso espherico, cujo angulo vale 60º e o raio da esphera $8^m,20$.

74.º Calcular a altura d'um cone de revolução, cuja area total é $420^{mq},30$ e o raio da base $6^m,30$.

75.º Calcular o volume da esphera na qual o volume da cunho de 72º é igual a $0^{mc},068$.

76.º Calcular o diametro de um fio cylindrico de cobre que pesa $20^{kg},640$ e tem de comprimento 600 metros. A densidade do cobre é 8,85.

77.º Calcular o raio da base de um cylindro de revolução, cujo volume é 10 hectolitros e altura 1 metro.

78.º Os tijolos ordinarios empregados nas construcções têem a fórma de um parallelipipedo rectangulo com $0^m,22$ de comprimento, $0^m,11$ de largura e $0^m,055$ de espessura. Calcular o volume occupado por 5:000 d'estes solidos.

79.º Sendo 4:000 hectolitros a capacidade de um reservatorio, que tem a fórma de um prisma hexagonal regular com $12^m,40$ de altura, calcular o perimetro da base.

80.º Um bloco de cantaria tem a fórma de um prisma hexagonal regular, cujo lado da base vale $2^m,30$ e a altura 10 metros; a densidade da cantaria é 2:800. Calcular o peso do bloco expresso em toneladas metricas.

81.º Calcular o volume de um cone de revolução, sendo $4^m,20$ o raio do sector que resulta da sua planificação e 140º o angulo do sector.

82.º Calcular o volume gerado por um semi-rectangulo movendo-se em torno de uma diagonal. Os lados do rectangulo são $6^m,30$ e $4^m,20$.

83.º Avaliar a area da lunula espherica medida pelo arco de $17^m,32$ na esphera de $12^m,28$ de raio.

84.º Achar a area do cone recto, cuja altura é $20^m,212$ e a geratriz $26^m,415$.

85.º Avalior a area da esphera, na qual os circulos menores distantes $2^m,116$ do centro têem $114^m,28$ de circumferencia.

86.º Calcular a capacidade de um tonel que tem $0^m,512$ de diametro nos tampos; $1^m,20$ no bojo: $2^m,40$ de comprimento exterior; 0,052 de profundidade dos javres e $0^m,03$ de grossura dos tampos.

FIM

INDICE

CAPITULO VI

CAPITULO VII

CAPITULO VIII

TYP. DA LIVRARIA FERIN