Escola Pu[...]ia de Sant' Anna.

Leopoldina Sampaio.

COMPENDIO

DE

ARITHMETICA

PARA A

INSTRUCÇÃO PRIMARIA

ADOPTADO PELA INSPECTORIA GERAL DA INSTRUCÇÃO PUBLICA COM APPROVAÇÃO DO GOVERNO IMPERIAL

POR

C. B. Ottoni

Rio de Janeiro

Vende-se em casa do editor Nicoláo A. Alves

54 — Rua de Gonçalves Dias — 54

1873

TYP. — CINCO DE MARÇO — RUA D'AJUDA N. 59.

PREFACIO

A necessidade em que me achei ultimamente de dar lições de arithmetica a meos filhos menores, foi a origem do trabalho de compilação que ora dou ao prelo.

Dos livros a que tive de recorrer, uns não estavão ao alcance daquellas intelligencias, ainda não amadurecidas pela idade ou pelo estudo; outros erão por demais deficientes, ou abundavão apenas em processos praticos, uteis sómente á classe commercial.

O compendio, que eu mesmo organisei para uso da Academia de marinha, só é proprio, se é que tem algum merito, para o ensino secundario e superior. O tratado mais completo do Sr. Dr. Eduardo de Sá está no mesmo caso.

Dos resumos, com que em geral são iniciados os principiantes no estudo da arithmetica, alguns se não me engano contém theorias que devem ser reservadas para outro gráo de instrucção; outros não esclarecem sufficientemente as doutrinas de que tratão.

Creio que um bom *compendio elementar* de arithmetica deve, 1° *expor todos os principios e operações uteis aos que não têm de cultivar estudos superiores*; 2° *demonstral-os de modo que apro-*

veitem aos que houverem de seguir curso mais completo da sciencia dos numeros.

Nas palavras griphadas está o meu programma.

Omitti as operações sobre complexos, que não tem applicação alguma na vida commum; limitando-me a indicar o modo de redusil-os a fracções ordinarias ou decimaes, e de voltar destas para os complexos.

Supprimi as fracções continuas, raizes quadrada e cubica, progressões e logarithmos; theorias faceis de estabelecer com os recursos algebricos, difficeis sem elles.

Propuz-me a tratar, com a maior clareza e precisão de que fosse capaz, os principios e operações sobre *numeros inteiros*, *fracções*, *decimaes*, *proporções* e suas applicações mais usuaes.

Penso que este programma satisfaz as necessidades da *instrucção elementar*, encerrando somma de conhecimentos arithmeticos sufficiente para os que não se dedicão ás sciencias, para os que cedo precisão entregar-se aos trabalhos da vida, assim como para o 1° anno do Collegio de Pedro II e para as escolas do sexo feminino.

Acredito igualmente que o estudante bem senhor deste pequeno compendio estará preparado para comprehender em todas as suas partes um tratado completo de Arithmetica theorica, ou os desenvolvimentos das applicações commerciaes, ou outras quaesquer.

Pelo menos, tal foi a tarefa que me impuz: de como a desempenhei julgarão os profissionaes. Com tudo espero não ser notado de immodestia por observar, que uma experiencia de 26 annos de ensino em outra época de minha vida, e novos exercicios nestes ultimos tempos me fazem crer que este meo trabalho não será de todo inutil á *Instrucção Elementar*.

Rio de Janeiro.

C. B. Ottoni.

ARITHMETICA

NOÇÕES PRELIMINARES

1. Arithmetica é a *sciencia dos numeros.*

Todos adquirimos desde a infancia alguma noção dos numeros: a primeira idéa, a de *um* ou de *unidade*, provém da presença de qualquer objecto isolado; repetida a sensação, logo se apresenta ao espirito a idéa de collecção de objectos da mesma especie: esta collecção é um numero. *Exemplo*: ha neste jardim *trinta e duas arvores.*

As permutas, a compra e venda, as relações entre os homens creão a necessidade de avaliar e medir, isto é, comparar um objecto com outro da mesma especie. Dahi tambem nasce a idéa do numero.

Quando dizemos que uma peça de fazenda tem *23 metros*; que um sacco de café pesa *sessenta kilogrammos*; que entre o almoço e o jantar medeião *sete horas*; todas estas expressões encerrão a idéa da *unidade* (metro, kilogrammo, hora), tambem a da *grandeza* avaliada ou medida (peça de fazenda, sacco de café, tempo decorrido entre o almoço e o jantar) e ainda a idéa da relação entre a grandeza e a unidade, que é o *numero*.

A analyse destas primeiras noções conduz ás seguintes definições.

2. *Grandeza ou quantidade* é tudo o que é capaz de augmento ou diminuição.

Unidade é uma grandeza, que serve de termo de comparação a todas as outras da mesma especie. *Numero* é a relação entre a quantidade e a unidade.

Nos exemplos apontados os numeros erão *inteiros* ou compostos de unidades inteiras, isto é, não divididas.

Quando contém partes da unidade, como *tres metros e meio, tres quartas partes da libra etc.*, chamão-se numeros fraccionarios ou fracções.

3. Pode-se considerar um numero de dous modos, como *abstracto*, ou como *concreto*. Abstracto quando não se designa a especie das unidades que o compõe: *concreto* quando a especie é determinada. *Oito, tres, cinco* são numeros abstractos; *sete legoas, onze alqueires, vinte horas* são *concretos*.

Em geral se demonstrão as regras e processos da Arithmetica com relação aos numeros abstractos: na pratica facilmente se conhece de que modo são taes regras e processos applicaveis aos numeros concretos.

CAPITULO I

NUMEROS INTEIROS

§ 1.º NUMERAÇÃO

4. Os numeros inteiros se formão a começar de *um*, ajuntando a cada numero uma unidade para passar ao immediato. A sua serie é *infinita*, isto é, por maior que seja um numero, é sempre possivel ajuntar-lhe uma unidade e outra e outra, continuando o crescimento *sem fim ou limite*. E' isto o que se chama *serie infinita de numeros.*

Os nomes dos numeros, que todos conhecem, formão-se combinando com certa arte uma porção limitada de palavras, que são: *um*, *dous*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito*, *nove*; *dez*, *cem*, *mil*, *milhão*, *billião*, *etc*. O systema dos nomes dos numeros, ou a arte porque são compostos, é o que se chama *Numeração fallada.*

5. Escrevem-se os numeros combinando entre si os nove signaes ou algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que isolados representão os nove primeiros numeros inteiros; e mais o signal *0*, que se lê *zero* e por si só não representa valor algum. Esta combinação constitue o que se chama *Numeração escripta.*

A numeração fallada funda-se no primeiro dos seguintes *principios convencionaes*, a escripta em todos elles.

6. *Primeiro principio*. De dez *unidades* primitivas se forma uma nova unidade chamada *dezena*;

de dez dezenas uma *centena;* de dez centenas um *milhar*; de dez milhares uma *dezena de milhares*; e assim por diante, *centena de milhares*, *milhão*, *dezena de milhões*, etc. Chamão-se *unidades de diversas ordens.*

Segundo principio. Reunidos muitos algarismos, o 1º da direita representa unidades, o 2º dezenas, o 3º centenas, o 4º milhares e assim por diante.

Terceiro principio. Faltando em um numero alguma das ordens de unidades, no logar respectivo se escreve o signal *0*.

7. Para melhor conservar na memoria os nomes das diversas ordens e facilmente represental-os por signaes ou algarismos, convém notar que as unidades que formão o systema se distribuem naturalmente em classes, cada uma contendo tres ordens, deste modo:

1.ª classe.—*Unidade*, *dezena*, *centena*, (dezena de unidades, centena de unidades).

2.ª classe.—*Milhar*, *dezena de milhares*, *centena de milhares.*

3.ª classe.—*Milhão*, *dezena de milhões*, *centena de milhões.*

4.ª classe.—*Billião*, *dezena de billiões*, *centena de billiões.*

etc., etc., etc.

Assim, contando por classes, cada uma dellas tem uniformemente *unidades*, *dezenas*, *centenas;* sendo porém as unidades, na 1ª classe as primitivas, na

2ª milhares, na 3ª milhões, na 4ª billiões e assim por diante.

Cada classe é representada por tres algarismos, supprindo-se com zeros as ordens de unidades que faltarem.

Destes principios se derivão as seguintes regras.

8. REGRA para escrever um numero dictado. *Escreve-se em seguida as ordens de unidades que formão cada classe, de maior para menor, tendo attenção que cada classe deve ser impreterivelmente representada por tres algarismos, supprindo com um zero cada ordem que faltar em uma classe, com tres zeros a classe inteira que houver sido omittida.*

9. REGRA para lêr um numero. *Divide-se em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, podendo a ultima classe ter um ou dous algarismos : da-se-lhe na mesma ordem os nomes unidades, milhares, milhões, billiões, trilliões etc.: lê-se seguidamente, da esqnerda para a direita, cada classe com o nome respectivo.*

Exemplo :

trilliões. *billiões.* *milhões.* *milhares.* *unidades.*

3.479.012.005.268

10. O systema de numeração exposto é o que se chama *Numeração Decimal* ; é caracterisado pelos seguintes corollarios das convenções estabelecidas :

1.º *Qualquer algarismo de um numero representa unidades dez vezes maiores do que as que formão o algarismo immediato à direita, dez vezes menores do que as do algarismo immediato à esquerda.*

2.º Todo o algarismo tem dous valores, absoluto e local.

Valor absoluto é o do algarismo isolado: é invariavel para cada um delles.

Valor local é o que depende do logar que o algarismo occupa em o numero. E' pois variavel.

O valor absoluto do algarismo 5 é sempre 5: o local é 5, ou 50, ou 500, ou 5000 conforme occupa o 1º, 2º, 3º, 4º logar da direita para a esquerda.

3.º O signal *0* não tem valor numerico proprio, mas preenche dous fins; 1º mostrar que não ha no numero unidades da ordem que o *0* occupa; 2º determinar o valor local dos algarismos que lhe ficão á esquerda, fazendo-os occupar os devidos logares.

11. A Arithmetica ou sciencia dos numeros ensina as propriedades delles e os diversos modos de os *compor e decompor*, ao que se chama *calcular*.

A formação dos numeros inteiros, qual acaba de ser exposta, é a mais simples das composições. *Compõe-se*, ou reune-se a unidade com o numero 3 para formar o numero 4: reunindo a este mais 1 *compomos* o n. 5, e assim por diante.

Se percorremos a serie dos numeros inteiros em sentido inverso, ou de mais para menos, os *de-*

compomos, isto é, desfazemos a composição que os tinha formado.

Evidentemente, em vez de ajuntar ou tirar successivamente o numero 1, poder-se-hia ajuntar ou tirar qualquer outro, por exemplo 3, formando a serie

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19

ou a inversa

19, 16, 13, 10, 7, 4, 3, 1

Eis um segundo exemplo de composição e decomposição.

As combinações dos numeros para fins de utilidade exigem outras *composições e decomposições:* o modo de realisal-as é o que se chama *calculo arithmetico*, ou *operações sobre os numeros*.

Das principaes passamos a occupar-nos no que toca aos numeros inteiros, objecto deste capitulo.

§ 2.º ADDIÇÃO

12. ADDIÇÃO *é a operação pela qual se reunem em um numero todas as unidades que compoem outros numeros da mesma especie.*

Os numeros dados se chamão *parcellas;* o resultado da operação *somma.*

Sendo sómente duas parcellas, e uma dellas menor que 9, a operação se faz ajuntando á maior as unidades da menor, uma por uma. Por exemplo, querendo sommar 28 e 5, ajunta-se ao 1º cada uma das cinco unidades do 2º formando successivamente os numeros 29, 30, 31, 32, 33: o ultimo é a somma pedida.

Deve o estudante exercitar-se em fazer com rapidez e mentalmente estas operações elementares: a lista dos resultados dellas é o que se lê em algumas Arithmeticas com o titulo — *Taboada de sommar.* Formar por si esta taboada é util exercicio, que não deve ser preterido.

13. Sendo maiores os numeros á sommar, procede-se na fórma da seguinte

REGRA. *Escrevem-se as parcellas de modo que as unidades de cada ordem se achem em columna; sublinha-se; somma-se cada ordem separadamente começando pelas unidades.*

Quando a somma de uma columna é menos de 10, escreve-se por baixo do traço e na mesma columna; sendo 10 ou mais escreve-se na columna o excesso sobre 10, 20, 30..... e destas 10, 20, 30.... se faz 1, 2, 3... unidades da ordem immediata, e sommão-se com a columna respectiva.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 57 \\ 409 \\ 5080 \\ 607 \\ 1000 \\ 38546 \\ \hline 45699 \end{array}$$

E' manifesto que assim reunimos na somma todas as unidades das diversas ordens, que compunhão as parcellas.

§ 3.º SUBTRACÇÃO

14. SUBTRACÇÃO *é a operação que tem por fim tirar de um numero outro menor.*

Chama-se o numero maior *Minuendo*, por que com a operação ficará reduzido ou diminuido. O menor se denomina *Subtrahendo*, isto é, o que deve ser tirado ou subtrahido do maior. O resultado toma o nome de *Resto, Excesso, ou Differença.*

O emprego appropriado de cada um destes vocabulos depende dos problemas praticos, em que se faz uso da subtracção: mas é questão de estylo; em Arithmetica as palavras *resto, excesso, differença* se reputão synonimos, exprimindo sempre o resultado de uma subtracção.

15. Facilmente se reconhece que *ajuntando o mesmo numero ao minuendo e ao subtrahendo, o resto não se altera.* O que accresce ao maior, accresce tambem ao menor que tem de ser subtrahido; e assim tira-se de mais o que demais se ajunta, o que não póde alterar o resultado. Este principio é indispensavel para boa intelligencia da regra de subtracção dos numeros compostos (n. 17).

16. Sendo o subtrahendo menor que 10, a subtracção se póde fazer mentalmente, unidade por

unidade, como no caso analogo da Addição (n. 12). Por exemplo, para tirar 6 de 35 abate-se deste successivamente cada uma das seis unidades do outro, formando os numeros 34, 33, 32, 31, 30, 29: o ultimo é o resto ou differença.

Uma lista destes resultados póde chamar-se *taboada de subtracção*: deve formal-a o estudante como a de sommar, e confial-a á memoria.

17. Sendo maiores os numeros, procede-se pela seguinte

REGRA. *Escreve-se o numero menor por baixo do maior, correspondendo-se os algarismos da mesma ordem; sublinha-se; tira-se cada algarismo inferior do superior correspondente, começando pelas unidades. Sendo maior o inferior, mentalmente se ajunta 10 ao superior; e para compensação se ajunta 1 ao seguinte algarismo inferior. Continua-se assim até a ultima columna á esquerda.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 4050589 \\ 3506705 \\ \hline 543884 \end{array}$$

Neste exemplo as unidades, as dezenas, as dezenas de milhares e os milhões puderão ser subtrahidos sem artificio: em cada uma das outras ordens foi preciso ajuntar 10 ao algarismo superior, e estabelecer a compensação ajuntando 1 ao algarismo seguinte inferior, o que não altera o resto ~~(n. 15)~~.

E' claro que por este processo tiramos do minuendo todas as unidades, dezenas, centenas...... que formão o subtrahendo; pelo que ficou prehenchido o fim da operação.

§ 4.º PROVAS DA ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

18 Prova *de uma operação é outra operação, pela qual nos certificamos se a primeira foi executada com acerto.*

Regra para prova da addição. *Somma-se de novo cada uma das columnas, começando pela da esquerda; abate-se o que produzir cada columna da parte correspondente na somma; converte-se cada resto em unidades da ordem immediata, e ajunta-se ao algarismo respectivo, do qual assim augmentado se diminue a columna correspondente. Na das unidades o resto deve ser zero.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 5603 \\ 2851 \\ 1232 \\ 8104 \\ \hline 17790 \\ 1010 \end{array}$$

Com effeito, por este processo se tira da somma todas as unidades de diversas ordens que devem compol-a, isto é, todas as que compõe as parcellas: pelo que nada deve restar.

19. Outros preferem *sommar de novo todas as parcellas menos a primeira, e tirando uma somma da outra ver se o resto é a 1ª parcella, como deve ser.*

No exemplo supra

$$
\begin{array}{r}
5603 \\
\hline
2851 \\
1232 \\
8104 \\
\hline
17790 \\
12187 \\
\hline
5603
\end{array}
$$

20. A PROVA da subtracção consiste em sommar o subtrahendo com o resto: a somma deve ser igual ao minuendo.

Eis o processo :

$$
\begin{array}{r}
85376 \\
78473 \\
\hline
6903 \\
\hline
85376
\end{array}
$$

A regra é evidente, vistas as noções e definições da subtracção.

§ 5.º MULTIPLICAÇÃO

21. Multiplicar dous numeros é *repetir um delles tantas vezes, quantas são as unidades do outro.* (a) O numero que se repete chama-se *Multiplicando;* o que marca as vezes *Multiplicador*; os dous em commum *Factores*; o resultado da operação *Producto.*

22. Segue-se da definição que o producto é somma de tantas parcellas iguaes ao multiplicando, quantas são as unidades do multiplicador: pelo que a multiplicação póde reduzir-se a uma addição.

Assim $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$ (b).

A regra especial da multiplicação tem por fim abreviar os calculos.

23. A multiplicação dos numeros inteiros offerece tres casos distinctos, a saber:

Multiplicação de dous numeros simplices.

Multiplicação de um composto por um simples.

Multiplicação de dous numeros compostos.

(a) Esta definição tem sido regeitada, porque é sómente applicavel aos numeros inteiros, e não exprime com bastante generalidade o verdadeiro caracter da multiplicação: preferem outra, cujos termos se adaptão ás fracções como aos inteiros. Eu porem reconhecendo que a definição supra não é generica, e só se applica litteralmente aos numeros inteiros, objecto deste capitulo, conservo-a por amor de sua grande simplicidade e clareza, que lança muita luz sobre a theoria da multiplicação. No capitulo das fracções mostrarei, como se generalisa a noção para abranger toda a especie de numeros.

(b) O signal $+$ indica addição e lê-se *mais.*
O signal $-$ indica subtracção e le-se *menos.*
O signal $\times$ indica multiplicação e le-se *multiplicado por.*
O signal $\div$ indica divisão e le-se *dividido por.*
O signal $=$ indica igualdade e le-se *igual á.*

Chama-se *numero simples* o que se representa por um só algarismo: todos os outros são *compostos*.

24. *Primeiro caso.* Os productos dos numeros simplices se formão pela addição; assim

$$7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35.$$

A lista destes productos, que fórma a *taboada da multiplicação*, deve ser confiada à memoria.

25. *Segundo caso.* REGRA para multiplicar um numero composto por um simples. *Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando; multiplica-se successivamente cada algarismo do multiplicando pelo multiplicador; cada producto que não excede a 9 escreve-se por inteiro; de 10 em diante escreve-se o excesso sobre 10, 20, 30...... e estes 10, 20, 30...... se convertem em 1, 2, 3...... unidades da ordem seguinte, que se sommão com o producto respectivo.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 2513 \\ 7 \\ \hline 17591 \end{array}$$

Assim todas as partes que compõe o multiplicando ficão repetidas 7 vezes.

26. Quando o multiplicando ou o multiplicador acabão em *zeros*, omittem-se estes na operação, e ajuntão-se todos ao producto.

Exemplos:

```
 31500        287
     5       8000
 ------     -------
157500    2296000
```

No primeiro exemplo se repete 5 vezes 315 centenas, e o producto deve exprimir 1575 centenas. No 2.º depois de repetir 8 vezes 287, ajuntar 000 ao producto 2296 é fazel-o mil vezes maior, ou repetil-o mil vezes. Ora, a somma de 8 parcellas iguaes ao multiplicando, sendo repetida mil vezes fórma o total de 8000 parcellas; por tanto ficou 287 multiplicado por 8000.

Advertencia. O ultimo exemplo pertence já ao 3º caso: mas é um specimen (multiplicador numero simples seguido de zeros) que convinha antecipar, para boa intelligencia da regra seguinte.

27. *Terceiro caso.* REGRA para multiplicar dous numeros compostos. *Multiplica-se todo o multiplicando por cada um dos algarismos do multiplicador; escrevem-se os productos parciaes de modo que o 1º algarismo de cada um delles corresponda ao algarismo respectivo do multiplicador; sommão-se os productos parciaes.*

Exemplo:

```
   5328
    437
  -----
  37296
 15984
21312
-------
2328336
```

28. *Demonstração.* O 1º producto parcial 37296 contém 7 vezes o multiplicando.

O 2º 15984 resultou de repetir 3 vezes o multiplicando; mas escrevendo o seu 1º algarismo 4 no logar das dezenas, o que equivale a ajuntar-lhe um *zero*, ficou multiplicado por 10 e por isso contendo 30 vezes o multiplicando.

Conseqnencia da observação do n. 26.

Do mesmo modo se prova que o 3º producto parcial 21312 comprehende 400 vezes o multiplicando.

Logo a somma dos tres equivale á 437 vezes o multiplicando 5328, ou é o producto de 5328 por 437.

29. Havendo *zeros* entre os algarismos de um ou de outro factor ou de ambos, a regra não se altera por isso. *Multiplica-se todo o multiplicando por cada um dos algarismos significativos do multiplicador:* o essencial é que o 1º algarismo de cada producto parcial corresponda ao algarismo respectivo do multiplicador.

Exemplo:

```
      305007
       20406
      ------
     1830042
    1220028
   610014
  ----------
  6223972842
```

Applicando a este exemplo o raciocinio empregado no anterior e baseado na observação do n. 26, se reconhece que o 1° producto parcial contém 6 vezes, o 2° 400 vezes, o 3° 20000 vezes o multiplicando 305007: por tanto a somma dos tres é o producto de 305007 por 20406.

§ 6.° DIVISÃO

30. DIVIDIR um numero inteiro por outro é *investigar quantas vezes o 1° contém o 2°* (a).

O 1° numero se chama *Dividendo*; o 2° *Divisor*; e o resultado da operação *Quociente*, do latim *quoties*, quantas vezes.

Desta definição se segue que o divisor repetido tantas vezes quantas são as unidades do quociente deve reproduzir o dividendo: este pois é igual ao producto dos dous. Assim o objecto da divisão é, *dado um producto e um dos factores determinar o outro.*

31. Póde effectuar-se a divisão por meio de uma serie de subtracções, tirando sempre o divisor do dividendo, do 1° resto, do 2° resto, etc. Claro é que quantas vezes puder subtrahir-se o divisor, tantas se continha no dividendo: por tanto o numero de subtracções será o quociente.

Sejão exemplos 56 a dividir por 14, ou 68 por 13; subtrahiremos,

---

(a) Cabe aqui a observação da nota ao n. 21. Tenho observado que as definições genericas abrangendo todos os casos, quer de multiplicação quer de divisão, embaração muito os principiantes. Por isso julgo preferivel dar para o calculo dos numeros inteiros as definições mais simplices e mais claras, procurando generalisal-as depois que os alumnos se familiarisarem com os raciocinios exigidos pelo estudo da Arithmetica.

no 1º exemplo de	56	no 2º exemplo de	68
1ª subt.	14	1ª subt.	13
de	42	de	55
2ª subt.	14	2ª subt.	13
de	28	de	42
3ª subt.	14	3ª subt.	13
de	14	de	29
4ª subt.	14	4ª subt.	13
	0	de	16
		5ª subt.	13
		resto....	3

Sendo possiveis 4 subtracções no 1º exemplo e 5 no 2º os quocientes são 4 e 5, com a differença que o 1º quociente é exacto, e a 2ª divisão deixou o resto 3, cuja significação mais tarde estudaremos.

Este processo é generico, mas applicado á numeros maiores seria em demasia longo: o methodo especial da divisão, como o da multiplicação, tem por fim abreviar os calculos.

32. A divisão offerece tres casos analogos aos da multiplicação.

1.º *caso*. Divisor simples, não se contendo mais de 9 vezes no dividendo, isto é, quociente tambem simples. O dividendo neste caso nunca póde exceder a 89.

2.º caso. Dividendo qualquer numero composto, divisor simples.

3.º caso. Dividendo e divisor compostos.

33. *Primeiro caso.* Sendo simples o divisor, devendo sel-o tambem o quociente, e sendo o dividendo o producto dos dous, cada exemplo deste caso corresponde a um artigo da taboada de multiplicar, que não é mais do que a lista dos productos dos numeros simplices. Quem tem de cór a taboada, facilmente descobre qual o numero que multiplicando o divisor reproduz o dividendo; esse é o quociente. Dividir 24 por 6: o numero que multiplicando 6 produz 24 é 4; eis o quociente. Mas a expressão usual é:

Em 24 quantas vezes ha 6? Ha 4.

Em 38 quantas vezes ha 7? Ha 5 com o resto 3.

Deve o estudante exercitar-se nestas divisões elementares antes de passar ao 2.º e ao 3.º casos. E não será trabalho perdido formular a sua *taboada de dividir*.

34. *Advertencia.* Cumpre notar, que confrontando o divisor com o dividendo *sempre se póde determinar previamente de quantos algarismos constará o quociente.* Multiplicando o divisor por 10, 100, 1000,..... e examinando quaes são os dous productos, entre os quaes se acha o dividendo, reconhece-se que o quociente deve achar-se entre os dous multiplicadores respectivos, ficando assim de-

terminadas as suas mais altas unidades, e portanto o numero dos seus algarismos.

Seja exemplo 3576 a dividir por 8. Formados os productos 80, 800, 8000, 80000,..... vê-se que o dividendo 3576 acha-se entre 800 e 8000; pelo que o quociente será entre 100 e 1000; portanto terá trez algarismos.

E' este outro exercicio preliminar necessario para facilitar a divisão, em qualquer dos casos.

35. *Segundo caso.* Regra para dividir um numero composto por um simples. *Colloca-se o divisor á direita do dividendo, separados por um traço; sublinha-se o divisor; toma-se no dividendo á esquerda uma parte que contenha o divisor*, isto é, não menor que elle; *essa parte constitue o 1.º dividendo parcial. Divide-se este pelo divisor e tem-se o 1.º algarismo do quociente. Multiplica-se o divisor pelo algarismo achado; subtrahe-se o producto do 1.º dividendo parcial; a direita do resto se escreve o seguinte algarismo do dividendo principal; forma-se assim o 2.º dividendo parcial, com o qual se procede do mesmo modo. Continua-se até chegar ao ultimo algarismo do dividendo.*

Se o ultimo resto é *0*, a divisão se diz exacta, isto é, o dividendo contem o divisor certo numero de vezes *exactamente.*

Se o ultimo resto não é *0*, o quociente não é completo, isto é, o dividendo contem o divisor o numero de vezes achado, e contem mais um resto. Este é necessariamente menor que o divisor. Ver-se-ha depois a significação deste resto e o meio de completar o quociente.

Exemplos: 1.º	3573	9	2.º	677	4
	27	397		4	169
	87			27	
	81			24	
	63			37	
	63			36	
	0			1	

36. *Demonstração*. Analysemos o 1.º exemplo. Pelo methodo exposto em n. 34 verifica-se que as mais altas unidades do quociente devem ser centenas, pelas quaes multiplicado o divisor dará producto de centenas. Este producto pois só póde achar-se comprehendido nas 35 centenas do dividendo. Seja pois 35 centenas o 1.º dividendo parcial, que dividido por 9 descobre as 3 centenas do quociente.

Facil é a verificação.

A sobra 8 centenas deve provir de reserva das dezenas, e a ellas reunidas formão 87 dezenas, nas quaes se deve conter o producto do divisor pelas dezenas do quociente. Por isso fazemos de 87 dezenas 2.º dividendo parcial, que dividido por 9 dá para o quociente 9 dezenas.

O mesmo raciocinio se applica ao 3º dividendo parcial 63, do qual resultão as 7 unidades do quociente.

Concluida a operação, torna-se claro que temos subtrahido do dividendo o producto do divisor por todo o quociente; e sendo o resto *0*, a divisão está completa (a).

O mesmo raciocinio se applicaria ao 2º exemplo, que offerece o resto 1 menor que o divisor 4. Este resto indica que o dividendo contem mais do que 169 vezes o divisor 4, mas não chega a contel-o 170 vezes. O quociente exacto deve pois achar-se entre 169 e 170: será portanto 169 e uma fracção, que depois se mostrará como se avalia. Em todo o caso o processo exposto determina *a parte inteira do quociente*.

37. *Terceiro caso*. A regra precedente é applicavel, palavra por palavra, ao caso de serem o dividendo e o divisor numeros compostos. Accresce apenas este embaraço: nas divisões parciais, sendo ainda compostos dividendo e divisor, não é tão facil como no segundo caso, achar mentalmente o algarismo do quociente. Procede-se então por tentativas, tomando sómente o 1º algarismo do divisor e as unidades da mesma ordem no dividendo parcial, e verificando, se multiplicado o divisor pelo quo-

---

(a) Esta demonstração, para ser bem comprehendida precisa de desenvolvimentos e explicações que devem ser dadas por cada professor. A exposição oral, accommodando-se á intelligencia de cada um, e acompanhando o progresso do estudante, consegue mais do que longas deducções ou minuciosas distincções escriptas.

ciente assim achado póde ser subtrahido o producto do dividendo parcial.

38. A analyse de um exemplo tornará mais claros estes preceitos

395918	765
3825	517
1341	
765	
5768	
5355	
413	

Multiplicando o divisor por 10, 100, 1000, ... verifica-se (n. 34) que o quociente deve ter 3 algarismos. Ora, multiplicado o divisor pelas centenas do quociente deve produzir centenas, contidas nas 3959 centenas do dividendo. Estas pois formão o 1º dividendo parcial. A analyse prosegue exactamente como no 2º caso: falta sómente expor o modo de dividir mentalmente 3959 por 765. Em ambos se despresa os dous ultimos algarismos como se fossem *zeros* e divide-se 39 por 7 sendo o quociente 5, resultado que depende de verificação. Esta se faz multiplicando o divisor 765 por 5, e observando que o producto 3825 póde ser subtrahido do dividendo parcial 3959.

A mesma analyse se applica as seguintes divisões parciais: na 3ª dividindo 57 por 7 obtem-se 8; mas como 8 vezes 765 ou 6120 não se póde subtrahir do dividendo parcial 5768, vê-se que o quociente não póde ser 8; e então experimenta-se 7 que satisfaz.

39. Podem executar-se simultaneamente a multiplicação e a subtracção depois de cada divisão parcial. Para isso ajunta-se mentalmente a cada algarismo do dividendo parcial o numero de dezenas que se faz necessario para ser possivel a subtracção, e compensa-se o accrescimo ajuntando outras tantas unidades ao producto do divisor pelo seguinte algarismo do quociente. O exemplo precedente se reduzirá a isto

```
395918 | 765
  1341   517
   5768
    413
```

40. Quando acontece que um dividendo parcial seja menor que o divisor, escreve-se no quociente *0* e á direita do dividendo parcial o seguinte algarismo do dividendo primitivo, para formar novo dividendo parcial e proseguir com a operação.

Exemplo:

```
1384489 | 457
   1348   3029
    4349
     236
```

Ajuntando o algarismo 4 ao 1º resto 13 forma-se o 2º dividendo parcial 134 que não contém o divisor.

Applicando a este caso a mesma analyse dos exemplos precedentes, reconhece-se logo que o quociente não tem centenas, o que se exprime com o zero. Donde se segue que as 134 centenas do dividendo parcial só podião provir de reservas do producto das dezenas; por isso lhe reunimos as 8 dezenas do dividendo principal para formar o 3º dividendo parcial 1348.

O resto 236 menor que o divisor mostra que a parte inteira do quociente é 3029. Completal-o pela divisão do resto depende de noções das fracções, objecto do capitulo seguinte.

§ 7.º—PROVAS DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

41. Vistas as definições e regras destas duas operações, torna-se evidente que cada uma dellas póde servir de prova á outra, reciprocamente.

Dividindo o producto por um dos factores, o quociente deve ser exactamente o outro factor.

Multiplicando o divisor pelo quociente e ajuntando ao producto o resto, quando o ha, deve rereproduzir-se o dividendo.

§ 8.º—APPLICAÇÕES

42. Em todas as regras expostas temos tratado os numeros como abstractos, isto é, sem attenção á especie de unidades que representão. Entretanto nas applicações teremos de sommar, subtrahir,

multiplicar e dividir numeros concretos. Para que não cause embaraço a especie de cada um, cumpre attender aos seguintes preceitos:

1.º Na addição e na subtracção os numeros dados e o pedido devem ser todos da mesma especie.

Na addição a somma, na subtracção o numero maior ou minuendo, é um todo de que os outros numeros são partes: ora é axioma que as partes e o todo não podem ser de naturezas diversas.

2.º Nas applicações da multiplicação as mais das vezes os factores são de especies diversas: mas visto que a operação sempre se reduz a repetir um numero tantas vezes quantas são as unidades de outro, o producto deve ser da especie do 1º, isto é, do multiplicando; e o multiplicador tem de figurar na operação como numero abstracto, marcando sómente as vezes que o outro tem de ser repetido.

3.º Na divisão podem dar-se dous casos, serem o dividendo e o divisor da mesma ou de differentes especies.

Pois que o dividendo é o producto do divisor pelo quociente, póde estabelecer-se esta distincção:

Ou são dados o producto e o multiplicando, e pede-se o multiplicador.

Ou são dados o producto e o multiplicador, e pede-se o multiplicando.

O 1º destes dous casos é o do dividendo e divisor da mesma especie, e bem se harmonisa com a definição—*procurar quantas vezes um contem o outro;*

o quociente, que exprime esse numero de vezes, é o multiplicador e na operação é numero abstracto, embora no problema proposto fosse concreto.

O 2º caso, dado o producto e o multiplicador, parece corresponder a uma noção diversa da divisão, ainda que a operação numerica seja a mesma.

Se o quociente é o multiplicando, o objecto da divisão é *achar o numero que se contem no dividendo tantas vezes quantas são as unidades do divisor*. Isto significa *repartir o dividendo em partes iguaes*: o quociente é uma das partes, da especie do todo.

Sendo pois dividendo e divisor de especies diversas, deve inferir-se que o divisor é o multiplicador e como tal abstracto, e que o quociente deve ser da especie do dividendo.

43. Resumindo podemos estabelecer estas regras geraes:

Na *addição* as parcellas devem ser da mesma especie, e á mesma pertence a somma.

Na *subtracção* os dous numeros dados e o pedido devem ser da mesma especie.

Na *multiplicação* o producto é sempre da especie do multiplicando, o multiplicador funcciona na operação como numero abstracto.

Na *divisão* ha dous casos

Se o dividendo e o divisor são da mesma especie, o quociente é abstracto: exprime quantas vezes um contem o outro.

Se o dividendo e o divisor são de diversas especies, o quociente deve ser da especie do dividendo. Exprime uma parte delle; e o divisor, representando em quantas partes se divide o dividendo, intervem na operação como numero abstracto (multiplicador).

Veremos exemplos destas duas accepções da divisão: e depois se verá que todas as reflexões precedentes tem tanta applicação ás operações sobre inteiros, como sobre fracções de qualquer fórma ou sistema.

Convirá ir applicando os preceitos expostos a cada um dos seguintes problemas:

1º PROBLEMA: ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

44. Possuo em dinheiro 230$500; devem-me, uma pessoa 119$080, outra 327$250, e uma 3ª 85$490; devo a dous credores 185$745 e 399$070: cobrando e pagando, quanto me restará?

Possúo		230$500
Arrecado		119$080
	+	327$250
	+	85$490
Total		762$320
Pago.	185$745	
+	399$070	584$815
Resta-me		177$505

2° PROBLEMA : MULTIPLICAÇÃO

45. Comprei 27 metros de uma fazenda a 870 réis; 19 de outra a 750; de outra 59 a 1$280 réis: quanto devo?

A 1ª custa 27 vezes 870 rs. ou	23$490
A 2ª custa 19 vezes 750 rs. ou	14$250
A 3ª custa 59 vezes 1$280 rs. ou	75$520
A quantia pedida é a somma dos 3 prod. .	113$260

3° PROBLEMA : DIVISÃO

46. Uma peça de fazenda comprada a 1.280 rs. o metro custou 26$880 rs.; quantos metros tinha?

E' claro que quantas vezes o custo 26.880 rs. contiver o preço do metro 1.280 rs. tantos metros tem a peça. O quociente 21 figura na operação como abstracto, exprimindo as vezes que 26.880 contem 1.280, embora na applicação passe a exprimir metros.

Temos aqui dividendo e divisor da mesma especie, quociente abstracto (n. 42): caso que corresponde á 1ª noção da divisão.

4° PROBLEMA : DIVISÃO

47. Comprei 21 metros de fazenda por 26.880: quanto me custou cada metro?

Repartido o custo 26.880 em tantas partes (21) quantos são os metros, cada parte é o custo de um metro. Occorre aqui a 2ª noção da divisão: repartir um numero em partes iguais. O quociente é da especie do dividendo como parte delle; e o divisor designa o numero das partes em que se divide, sendo assim abstracto.

5º PROBLEMA

48. Um vendilhão comprou 39 canadas de um vinho a 1.580; de outro 87 canadas a 850; de um 3º 217 canadas a 560 rs.: misturou todos e quer saber em quanto lhe fica cada canada da mistura.

A quantidade total é $39 + 87 + 217 = 343$ canadas. O custo se acha multiplicando cada preço pelo numero de canadas correspondente e sommando os productos. Este custo total dividido por 343 dará o custo de uma canada da mistura.

O alumno applicado não deixará de fazer estes calculos e outros similhantes.

CAPITULO II

FRACÇÕES ORDINARIAS

§ 1.º PRELIMINARES E NUMERAÇÃO

49. Fracção propriamente dita é o numero menor que 1, isto é, a relação entre a unidade e uma quantidade menor que ella.

Se a quantidade não contem ao menos uma vez a unidade, divide-se esta em partes iguaes e procura-se quantas dessas partes cabem na quantidade.

Assim a representação de uma fracção depende de dous numeros inteiros, um que mostre em quantas partes foi dividida a unidade, outro quautas dellas se contem na quantidade que a fracção representa.

50. O 1º numero se chama *denominador*, porque *dá o nome* ás partes da unidade. Se esta se divide em duas partes, tomão ellas o nome de *meios*; se em tres, o de *terços*; em quatro, *quartos*; e assim por diante, *quintos*, *sextos*, *setimos*, *oitavos*, *nonos*, *decimos*. De 11 em diante o nome das partes compõe-se do numero dellas com a terminação *avos*, *onzeavos*, *dozeavos*, *trezeavos*, etc. Exceptua-se os numeros 100, 1000, etc., dos quaes se derivão os nomes *centesimos*, *millesimos*, etc.

O 2º numero se chama *numerador*, porque *numera* ou conta as partes contidas na quantidade que a fracção representa.

51. Escreve-se uma fracção collocando o numerador em cima e o denominador em baixo de uma risca.

Lê-se o numerador e em seguida o nome derivado do denominador. Assim a fracção $\frac{5}{7}$ lê-se *cinco septimos*, $\frac{9}{17}$ *nove dezeseteavos*.

52. Das convenções precedentes que constituem a *numeração das fracções*, deduzem-se os seguintes corollarios :

1.º Não variando o denominador, multiplicar ou dividir o numerador por qualquer numero é multiplicar ou dividir a fracção pelo mesmo numero. Porque sendo constante o denominador, a grandeza das partes não muda ; e dobrar ou triplicar o numerador é dobrar ou triplicar o numero das partes que formão a fracção : assim como dividir o numerador por 2, 3, etc. é reduzir á metade, terça parte, etc. o numero de partes que formão a fracção.

2.º Não variando o numerador, multiplicar o denominador por qualquer numero é dividir por elle a fracção ; dividir o denominador é multiplicar a fracção.

Multiplicar o denominador por 2, 3, etc. é reduzir cada parte da unidade á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc. do que erão ; e pois que o numero de partes não se altera, a fracção fica reduzida, como cada uma das suas partes, a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. do que era.

Dividir o denominador por exemplo por 5 é fazer cada parte da unidade 5 vezes maior ; e conservando o mesmo numero de partes, a fracção fica multiplicada.

3.° *Multiplicar ou dividir ambos os termos por um mesmo numero não altera o valor da fracção.*

E' consequencia do 1° e 2° corollarios. Multiplicar por 3 o numerador é triplicar a fracção ; mas multiplicar por 3 o denominador é reduzil-a à terça parte, o que a faz tornar ao valor primitivo.

Assim $\frac{3}{4}$ é equivalente á $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$, etc.

53. *Numero fraccionario ou mixto* é o numero inteiro acompanhado de fracção, como $5\,\frac{3}{7}$.

Pode-se dar a este numero a fórma de uma fracção: contendo cada unidade sete setimos, as 5 unidades do numero correspondem a 5 vezes 7 ou 35 setimos, que com os 3 prefazem 38 setimos, ou $\frac{38}{7}$.

REGRA para converter um numero mixto em fracção. *Multiplica-se o inteiro pelo denominador, somma-se ao producto o numerador, da-se á somma o mesmo denominador.*

Estas fracções se chamão *improprias* por que representão numeros maiores que a unidade; conhece-se que a fracção é impropria, quando o numerador é maior que o denominador.

Nas fracções proprias o denominador é maior.

54. O numero inteiro tambem se póde reduzir a fórma de fracção de dous modos.

Se se deseja um denominador determinado *multiplica-se por elle o inteiro, e o producto* é o numerador.

E' claro que, por exemplo, o numero 7 equivale a $\frac{14}{2}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{49}{7}$, $\frac{77}{11}$ etc.

Não se exigindo denominador certo, o inteiro póde ser numerador, com o denominador 1. E' claro que 7 ou $\frac{7}{1}$, 5 ou $\frac{5}{1}$ são expressões equivalentes.

55. Dada uma fracção impropria pode-se tambem extrahir as unidades inteiras nella contidas.

REGRA. *Divide-se o numerador pelo denominador; o quociente mostra os inteiros; o resto, quando o ha, é o numerador de uma fracção propria que se ajunta aos inteiros com o mesmo denominador.*

§ 2.º REDUCÇÃO AO MESMO DENOMINADOR

56. As fracções que têm o mesmo denominador se chamão fracções *da mesma especie:* esta condição é exigida para se poderem praticar sobre ellas algumas operações.

REGRA. *Reduzem-se duas fracções á mesma especie, multiplicando ambos os termos de cada uma pelo denominador da outra.*

Assim $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{7}$ equivalem a $\frac{21}{35}$ e $\frac{20}{35}$.

Cada uma das fracções não muda de valor, pois multiplica-se ambos os seos termos por um mesmo numero. E o denominador se faz o mesmo em ambas, porque em ambas é o producto dos denominadores primitivos.

57. Sendo tres ou mais fracções, reduzem-se á mesma especie pela seguinte

Regra. *Multiplica-se ambos os termos de cada uma pelo producto dos denominadores de todas as outras.*

$$\frac{5}{6}, \frac{7}{11}, \frac{2}{5}, \frac{9}{13}, \frac{3}{7}$$

reduzem-se por esse modo a

$$\frac{25025}{30030}, \frac{19110}{30030}, \frac{12012}{30030}, \frac{20790}{30030}, \frac{12870}{30030}$$

O denominador de cada uma das novas fracções é sempre o producto de todos os denominadores primitivos, e será o mesmo qualquer que seja a ordem da multiplicação. E' facto observado, que *mudar a ordem dos factores não altera o producto* (a)

58. Ha um caso, em que se póde obter o denominador commum em numeros menores do que pela regra geral: é quando o maior dos denominadores, ou algum de seos multiplos (dobro, triplo, quadruplo etc.) é divisivel por todos os outros denominadores. Em geral, todo o numero divisivel por todos os denominadores póde ser denominador commum das fracções a que elles pertencem.

(a) Demonstra-se este principio; mas parecendo-me conveniente prescindir das demonstrações theoricas não indispensaveis neste resumo, limitei-me a citar o *facto arithmetico* que todos observão e verificão.

Neste caso, descoberto o denominador commum (o maior dos propostos ou um de seos multiplos) *divide-se por todos os denominadores e multiplica-se ambos os termos de cada fracção pelo quociente respectivo.*

Sirvão de exemplo as fracções

$$\frac{3}{15}, \frac{7}{10}, \frac{1}{6}, \frac{11}{12}, \frac{13}{20}$$

O maior denominador 20 não é divisivel por todos os outros, mas o seo triplo 60 o é. Divide-se pois 60 por cada um dos denominadores e por cada quociente se multiplica ambos os termos da fracção respectiva. Dispõe-se assim o calculo:

Fracções dadas.	$\frac{3}{15}, \frac{7}{10}, \frac{1}{6}, \frac{11}{12}, \frac{13}{20}$
60 dividido por cada denominador .	4 6 10 5 3
Resultado	$\frac{12}{60}, \frac{42}{60}, \frac{10}{60}, \frac{55}{60}, \frac{39}{60}$

Seguindo a regra geral, o denominador commum seria 216000, que é o producto dos denominadores primitivos.

§ 3.º SIMPLIFICAÇÃO DE FRACÇÕES

59. Começamos por definir alguns termos de uso frequente nesta parte da arithmetica.

Numero par é o divisivel por 2: os não divisiveis chamão-se *impares.*

Multiplo de um numero é aquelle que o contém vezes exactas.

Submultiplo é o que se contém no outro exactamente.

Divisor, factor, parte aliquota exprimem o mesmo que *submultiplo:* são synonymos em arithmetica.

Numero primo é o que só tem por divisor a si proprio ou a unidade.

Primos entre si são os numeros que não têm divisor commum, se não a unidade que é divisor de todo o numero.

60. Toda a fracção, cujos termos são divisiveis por um mesmo numero, póde por este meio ser simplificada, isto é, redusida a menores termos sem alteração do seu valor (n. 52, 3.º)

Daqui vem que para simplificar uma fracção é necessario examinar se o numerador e o denominador têm algum divisor commum. Ora o meio geral de examinar se um numero é divisivel por outro é effectuar a divisão, a ver se não fica resto. Por excepção, alguns divisores se reconhecem pela simples inspecção dos numeros, como consta dos principios seguintes.

61. *O numero que termina em 0 é divisivel por 10, por 5 e por 2.* Porque um tal numero consta de dezenas exactas, e pois é *multiplo de 10*, e conseguintemente tambem de 5 e de 2.

62. *O numero que termina em algarismo par é divisivel por 2.* Porque excluindo o algarismo das unidades, o restante compõ-se de dezenas exactas,

numero divisivel por 2; se pois o algarismo das unidades for par, isto é, divisivel por 2, tambem o será todo o numero.

63. *O numero que termina em 5 é divisivel por 5.* Por uma razão identica á que se refere ao divisor 2.

N. B.—Omittimos as regras da divisibilidade pelos numeros 3, 9, 11, por exigirem as demonstrações maior esforço de intelligencia.

64. Regra para simplicar uma fracção. *Examina-se, se ambos os seos termos são divisiveis successivamente pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11.... e dividem-se por cada divisor que lhes fôr commum.*

Não se tenta a divisão por 4, 6, e mais numeros não *primos*, porque é inutil; o numero não divisivel por 2 não o póde ser por 4, 6, 8 etc.; o que não é divisivel por 3 não o será por 9, e assim por diante. Sirva de exemplo a fracção $\frac{378}{504}$.

Divisor 2. Pois que o numerador e denominador terminão ambos em algarismo par, são divisiveis por 2 (n. 62) e a fracção se reduz a $\frac{189}{252}$: o numerador desta não é divisivel por 2.

Divisor 3. Experimentando as divisões de ambos os termos da ultima fracção por 3, ve-se que são exactas; e então a fracção $\frac{189}{252}$ se reduz á $\frac{63}{84}$.

Esta ultima pela mesma razão e do mesmo modo se reduz a $\frac{21}{28}$. Nesta o denominador não é divisivel por 3.

Divisor 5. Não são divisiveis.

Divisor 7. São divisiveis ambos os termos e a fracção $\frac{21}{28}$ fica reduzida á $\frac{3}{4}$ que evidentemente não póde ser mais simplificada.

A fracção reduzida aos menores termos, por que póde ser representada, chama-se *irreduzivel*.

§ 4.º ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

65. Estas operações applicadas a numeros fraccionarios ou fracções têm o mesmo objecto e fim, que em relação aos numeros inteiros.

Sommar é reunir em um só numero todas as partes que compõe outros numeros.

Subtrahir é tirar um numero de outro maior.

66. Regra para sommar fracções. *Se têm o mesmo denominador, sommão-se os numeradores e á somma da-se o denominador commum. Se o não têm, reduzem-se previamente a tel-o* (n. 57).

67. Regra para subtrahir uma fracção de outra. *Se são da mesma especie, tira-se o menor numerador do maior, e da-se á differença o denominador commum. Se o não são, reduzem-se como para a addição.*

68. Se entre os numeros dados ha inteiros e fracções, reduzem-se os primeiros a fracções (n. 53 e 54) e praticão-se as regras precedentes.

Exemplos:

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$\frac{9}{11}-\frac{3}{11}=\frac{6}{11}$$

$$7\frac{2}{5}+11\frac{3}{7}=\frac{37}{5}+\frac{80}{7}=\frac{259}{35}+\frac{400}{35}=\frac{659}{35}=18\frac{29}{35}$$

$$23\frac{7}{13}-11\frac{2}{7}=\frac{306}{13}-\frac{79}{7}=\frac{2142}{91}-\frac{1027}{91}=\frac{1115}{91}=12\frac{23}{91}$$

§ 5.º MULTIPLICAÇÃO

69. A definição generica desta operação é a seguinte:

Multiplicar um numero por outro é formar um terceiro numero derivado do primeiro pelo mesmo modo, porque o segundo se deriva da unidade.

Para os numeros inteiros a definição foi dada em termos diversos: *repetir o primeiro tantas vezes quantas são as unidades do segundo.*

A differença entre as duas definições não é substancial. A do presente § exprime a noção generica da multiplicação: a do 1.º capitulo se refere a um caso particular, que era o de que se tratava, o dos numeros inteiros. Applicada a estes a definição generica, coincide com a que foi dada no 1º capitulo.

Seja por exemplo a multiplicação de 11 por 9. Segundo a definição generica, assim como o multiplicador 9 se deriva da unidade, assim deve o producto derivar-se do multiplicando 11. Mas 9 deriva-se da unidade, *repetindo-a 9 vezes*; logo o producto se derivará do numero 11, *repetindo-o 9 vezes.*

Dest'arte a noção particularisada resulta sem esforço da applicação aos numeros inteiros da idéa geral da multiplicação.

O essencial é que a derivação da unidade que fórma o multiplicador, seja identica com a derivação do *multiplicando* que deve formar o producto. Esta identidade das duas derivações é o que constitue o caracter e a essencia da multiplicação.

Se porém a derivação não consiste em *repetir certo numero de vezes*, mas é diverssa, por exemplo *tomar tal ou tal parte*, nada impede que seja a *mesma derivação*, da unidade para o multiplicador, do multiplicando para o producto.

Multiplicar 13 por 7. O multiplicador 7 deriva-se da unidade, *repetindo-a sete vezes.* O producto se deriva do multiplicando 13, *repetindo-o sete vezes.*

Multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{7}$. O multiplicador $\frac{2}{7}$ deriva-se da unidade, *tomando della duas setimas partes*: o producto se derivará do multiplicando $\frac{3}{4}$, *tomando delle duas setimas partes.*

Um exemplo de uso pratico da multiplicação tornará mais claras estas noções.

Compra-se quantidade de fazenda a 670 rs. cada metro e pede-se o custo.

E' claro que 670 rs. é um multiplicando, multiplicador a quantidade de covados comprada; o producto será o custo pedido.

Exemplos :

7 metros custarão 7 vezes 670 rs.

$\frac{1}{2}$ metros custarão $\frac{1}{2}$ de 670 rs.

$\frac{3}{5}$ metros custarão $\frac{3}{5}$ de 670 rs.

70. A multiplicação das fracções offerece tres casos, a saber:

1.° Multiplicação de uma fracção por um inteiro. *Multiplica-se o numerador pelo inteiro e conserva-se o denominador*. E' consequencia do n. 52, 1°.

Exemplo :

$$\frac{7}{13} \times 7 = \frac{49}{13} = 3\frac{10}{13}.$$

71. 2.° Multiplicação de um inteiro por uma fracção. *A mesma regra precedente.*

Exemplo :

$$5 \times \frac{7}{11} = \frac{35}{11} = 3\frac{2}{11}$$

Porque segundo a definição, sendo o multiplicador $\frac{7}{11}$ da unidade, o producto deve ser $\frac{7}{11}$ do multiplicando 5 : ora, a undecima parte de 5 é $\frac{5}{11}$ que repetido 7 vezes produz $\frac{35}{11} = 3\frac{2}{11}$. Este é pois o producto.

72. 3.° Multiplicação de fracção por fracção. *Multiplicão-se respectivamente os numeradores e os denominadores.*

Exemplo:

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{13} = \frac{15}{104}$$

Demonstração. Sendo o multiplicador $\frac{3}{13}$ da unidade, o producto deve ser $\frac{3}{13}$ do multiplicando $\frac{5}{8}$. Ora a 13ª parte de $\frac{5}{8}$ é $\frac{5}{104}$, e esta fracção repetida tres vezes produz $\frac{15}{104}$, o que demonstra a regra.

73. Havendo inteiros acompanhados de fracções para multiplicar, reduz-se cada um dos factores á fórma de uma fracção e applica-se a regra.

Exemplo:

$$7\frac{3}{5} \times 5\frac{2}{9} = \frac{38}{5} \times \frac{47}{9} = \frac{1786}{45} = 39\frac{31}{45}$$

§ 6.º DIVISÃO

74. Mostramos tratando da divisão dos numeros inteiros, que o objecto da operação é sempre: *dado um producto e um dos factores achar o outro.*

Tendo pois generalisado a noção da multiplicação podemos adoptar tambem como definição generica da divisão a seguinte:

Operação pela qual, dado um producto e um de dous factores, se determina o outro.

Definição manifestamente applicavel a todas as especies de numeros.

Distinguem-se na pratica desta operação os mesmos tres casos que na multiplicação.

75. 1.° caso: dividir uma fracção por um inteiro.

Regra. *Multiplica-se o denominador pelo inteiro e conserva-se o numerador.*

Exemplo:

$$\frac{6}{7} : 5 = \frac{6}{35}$$

Demonstração. Segundo a definição, $\frac{6}{7}$ deve ser igual ao producto do numero pedido ou quociente pelo divisor 5. E pois que multiplicar um numero por 5 é repetil-o 5 vezes, segue-se que $\frac{6}{7}$ representa 5 vezes o quociente pedido. Logo este quociente é igual a quinta parte de $\frac{6}{7}$: e em virtude do principio estabelecido (n. 52, 2°) esta quinta parte de $\frac{6}{7}$ é igual a $\frac{6}{35}$.

76. 2° caso: dividir um inteiro por uma fracção.

Regra. *Multiplica-se o inteiro pela fracção invertida.*

Exemplo:

$$5 : \frac{6}{7} = \frac{35}{6} = 5\ \frac{5}{6}$$

Demonstração. Considerando o divisor $\frac{6}{7}$ como multiplicador e o quociente pedido como multiplicando, o producto dos dous segundo a definição deve ser igual ao dividendo 5.

Mas recordemos que o producto deve derivar-se do multiplicando exactamente como o multiplicador se deriva da unidade. No caso presente o multiplicador $\frac{6}{7}$ representa *seis setimas partes da unidade:* logo o producto ou o dividendo 5 equivale a *seis setimas partes do quociente* desconhecido, que é o multiplicando.

Sendo pois 5 igual a seis setimas partes do quociente, a sexta parte de 5 ou $\frac{5}{6}$ deve representar a setima parte do quociente.

Esta setima parte repetida sete vezes fórma o quociente: e visto que para repetir $\frac{5}{6}$ sete vezes, multiplica-se o numerador por 7 (n. 52, 1°) segue-se que o quociente é $\frac{35}{6}$ como se pretendia demonstrar.

77. 3° caso: dividir uma fracção por outra.

Regra. *Multiplica-se a fracção dividendo pela fracção divisor invertida.*

Exemplo:

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{5} = \frac{35}{24} = 1\,\frac{11}{24}$$

Demonstração. O raciocinio é identico ao do 2° caso.

Sendo o dividendo $\frac{7}{8}$ igual ao producto do quociente pedido por $\frac{3}{5}$, nota-se que

O multiplicador $\frac{3}{5}$ representa *tres quintas partes da unidade.*

O producto ou dividendo $\frac{7}{8}$ é equivalente *a tres quintas partes do quociente* desconhecido.

Logo a terça parte do dividendo $\frac{7}{8}$ é igual á quinta parte do quociente.

A terça parte de $\frac{7}{8}$ é $\frac{7}{24}$; e sendo esta fracção igual á quinta parte do quociente, repetindo-a 5 vezes formaremos o mesmo quociente. Ora 5 vezes $\frac{7}{24} = \frac{35}{24}$

N. B. E' manifesto que o raciocinio empregado em qualquer dos tres casos, embora se referisse a numeros especiaes, teria applicação a quaesquer outros numeros. As regras pois ficarão demonstradas.

Cabe a estas demonstrações a nota ao n. 36 pag. 28.

78. Da divisão de fracções depende o seguinte

PROBLEMA. Um viajante andou uniformemente (isto é, sem accelerar nem retardar o passo) 60 $\frac{3}{5}$ milhas em 11 $\frac{1}{2}$ horas: quanto em cada hora?

Se conhecessemos o caminho feito em 1 hora, multiplicando-o por 11 $\frac{1}{2}$ teriamos a distancia total percorrida, 60 $\frac{3}{5}$ milhas. Logo este numero é um producto de que 11 $\frac{1}{2}$ é o multiplicador e o numero pedido é o multiplicando. Devemos pois dividir 60 $\frac{3}{5}$ por 11 $\frac{1}{2}$

$$60\,\frac{3}{5} : 11\,\frac{1}{2} = \frac{303}{5} : \frac{23}{2} = \frac{606}{115} = 5\,\frac{31}{115}$$

Andou pois o viajante em cada hora 5 milhas e $\frac{31}{115}$ da milha.

CAPITULO III

FRACÇÕES DECIMAES

§ 1.º PRELIMINARES E NUMERAÇÃO

79. As fracções decimaes, como as ordinarias, resultão da divisão da unidade primitiva em partes iguaes.

A differença é que para as fracções ordinarias a unidade se divide em *qualquer numero de partes*; para as decimaes, sómente em 10, 100, 1000, 10000....

Para facilitar a formação destas *unidades decimaes*, divide-se a unidade em dez partes, cada uma destas se subdivide em outras dez, cada uma das novas partes em dez, e assim por diante sem limitação alguma, dividindo sempre cada parte em dez outras.

Estas partes progressivamente menores na razão decupla se chamão respectivamente decimos, centesimos, millesimos, decimos-millesimos, centesimos-millesimos, millionesimos, decimos-millionesimos, etc.

Assim uma unidade equivale a 10 decimos, a 100 centesimos, a 1000 millesimos, etc. etc. E é destas divisões e subdivisões da unidade que se formão as fracções decimaes.

80. Os principios fundamentaes da numeração dos inteiros podem ser applicados á dos decimaes. Segundo elles, um algarismo escripto á direita de

outro representa unidades dez vezes menores que as desse outro: applicando esta convenção aos decimaes collocaremos á direita das unidades principaes os decimos, e em seguida centesimos, millesimos, etc.

Mas como nos numeros inteiros o ultimo algarismo da direita é o das unidades, se este deixa de ser o ultimo, preciso é assignalar-lhe o lugar para evitar equivocos, e o costume é collocar uma virgula entre as unidades e os decimos.

Assim, ampliando a convenção dos numeros inteiros, concordemos em que á direita da virgula que designa a casa das unidades o 1° algarismo exprima decimos, o 2° centesimos, o 3° millesimos, e assim por diante decimos-millesimos, centesimos-millesimos, etc. E poderemos representar por algarismos qualquer numero decimal: o zero entre elles terá os mesmos usos que entre os inteiros; 1° mostrar a falta das unidades da ordem que occupa; 2° determinar o valor local dos algarismos que lhe ficão á direita, isto é, do lado opposto ás unidades, como nos numeros inteiros.

81. Regra para ler um numero decimal. *Lê-se em separado a parte inteira, se ha, e em seguida a parte decimal como se fosse outro inteiro, ajuntando-lhe a denominação das unidades do ultimó algarismo.*

37,546 lê-se 37 unidades 546 millesimos; 209,1019 209 unidades 1019 decimos-millesimos.

Pudera ler-se os algarismos um por um, por exemplo, no 1° numero 5 decimos, 4 centesimos e 6 millesimos ; mas reduzindo tudo a millesimos, serão 546 millesimos, indicação mais resumida.

82. Regra para escrever um numero decimal dictado. *Escripta a parte inteira e collocada a virgula, escreve-se a direita della a parte decimal como se fosse outro inteiro, mas collocada de modo que o ultimo algarismo represente as unidades decimaes mencionadas no numero proposto.*

Exemplo: Tres unidades, sete mil e oito millionesimos. Devendo os millionesimos occupar o 6° algarismo decimal, prehenche-se os que faltão com zeros, e o numero dado se escreverá 3,007008.

N. B. —Antes de proseguir deve o alumno exercitar-se em lêr e escrever decimaes.

83. Regra para converter um decimal em fracção ordinaria. *Do mesmo numero, supprimida a virgula, se faz numerador; o denominador é 1 seguido de tantos zeros quantos erão os algarismos decimaes.*

Exemplos :

$$3{,}72 = 3\frac{72}{100} \text{ ou } \frac{372}{100}$$

$$0{,}009 = \frac{9}{1000}$$

$$7{,}0305 = 7\frac{305}{10000} \text{ ou } \frac{70305}{10000}$$

Ver-se-ha depois, como se converte uma fracção ordinaria em decimal.

84. Em um numero decimal, mudar a virgula 1, 2, 3... casas para a direita faz o numero 10, 100, 1000... vezes maior ; menor na mesma proporção, se a mudança for para a esquerda.

Seja 348,0561 o numero dado.
Será 348056,1 mil vezes maior.
3,480561 cem vezes menor.

Prova-se, confrontando os valores que representa cada algarismo em cada um destes numeros.

85. *Zeros á direita de um numero decimal,* assim como á esquerda de um numero inteiro, *não lhe alterão o valor.*

3,5 ou 3,50 ou 3,500 ou 3,5000

representão o mesmo numero. Com effeito, em todos elles 3 representa unidades e 5 representa decimos.

§ 2.º ADDIÇÃO

86. A regra é a mesma dos numeros inteiros. Para que se correspondão as unidades da mesma ordem, basta collocar as virgulas em columna.

Exemplo :

305,723	Parcellas.
7,05	
19,3672	
0,7	
332,8402	Somma.

Evidentemente esta somma contem todas as unidades e partes da unidade, que compõe cada uma das parcellas.

§ 3.º SUBTRACÇÃO

87. Regra.—*Faz-se que tenhão o minuendo e o subtrahendo igual numero de algarismos decimaes, ajuntando zeros ao que tiver menos; subtrahe-se como os numeros inteiros.*

Exemplos:

Subtrahir 17,528 de 24,5 ou 11,06 de 145,2871.

```
 24,500      145,2871
 17,528       11,0600
 ------      --------
  6,972      134,2271
```

§ 4.º MULTIPLICAÇÃO

88. Regra.—*Prescinde-se da virgula e multiplicão-se os numeros como inteiros; separão-se tantas casas de disima quantas tinhão os dous factores.*

Exemplos:

```
   21,7         0,037
    3,58        0,0063
  ------      ---------
   1736           111
  1085            222
  651         ---------
  ------      0,0002331
  77,686
```

Demonstração.—No 1º exemplo os factores podem representar-se assim $\frac{217}{10}$ e $\frac{358}{100}$; ora

$$\frac{217}{10} \times \frac{358}{100} = \frac{217 \times 358}{1000} = \frac{77686}{1000} = 77,686$$

No segundo exemplo temos semelhantemente

$$\frac{37}{1000} \times \frac{63}{10000} = \frac{37 \times 63}{10000000} = \frac{2331}{10000000} = 0,0002331$$

§ 5.º DIVISÃO

89. Regra.—*Faz-se que tenhão o dividendo e o divisor igual numero de algarismos decimaes; supprimida a virgula, opera-se sobre os numeros inteiros.*

Exemplo:

Dividir 27,5 por 0,0017

O dividendo equivale a 27,5000

```
275000 | 17
105      16176
  30
  130
   110
     8
```

Dem.—Reduzindo ambos os numeros a fracções ordinarias, temos:

$$\frac{275}{10} : \frac{17}{10000} = \frac{2750000}{170} = \frac{275000}{17} = 16176\ \frac{8}{17}$$

90. Podemos actualmente completar os quocientes das divisões não exactas, investigando a significação dos restos, que no cap. 1º ficou por determinar (ns. 36 e 40).

No exemplo ultimo, sendo o resultado da divisão das fracções propostas a fracção impropria $\frac{275000}{17}$, applicando a esta regra do n. 55, obtivemos o numero fraccionario $16176\frac{8}{17}$

Mas aquella fracção $\frac{275000}{17}$ é igual ao quociente de 275000 dividido por 17, e 8 é o resto da divisão. Logo em geral *o resto da divisão é o numerador de uma fracção propria, tendo o divisor por denominador, a qual junta ao quociente inteiro o completa.*

91. *A priori* se podia concluir o mesmo. O resto 8 da ultima divisão não é mais do que uma parte do dividendo, que se tem de dividir por 17: ora, visto que 1 dividido por 17 dá $\frac{1}{17}$, 8 dividido por 17 produzirá $\frac{8}{17}$.

92. Daqui nasce outro modo de considerar as fracções ordinarias, que conduz ao processo para reduzil-as a decimaes. *O numerador póde ser considerado como dividendo, o denominador divisor, exprimindo o quociente o valor da fracção.*

A fracção $\frac{5}{7}$ exprime *cinco setimas partes de 1,* 5 dividido por 7 quer dizer *uma setima parte de 5.*

Mas as duas expressões são equivalentes, porque *uma setima parte de* 5 póde ser tomada, não do n. 5 englobadamente, mas de cada uma das 5 unidades que o compõem e será igual a *cinco setimas partes de 1*.

93. Logo para converter uma fracção ordinaria em decimal, *divide-se o numerador pelo denominador, convertendo os restos successivos em decimos, centesimos, millesimos, etc.*

Seja a fracção $\frac{5}{7}$ que equivale a 5 dividido por 7. Pois que 5 unidades não contem a 7 não terá o quociente unidades; mas sendo 5 equivalente a 50 decimos este numero dividido por 7 dará os decimos do quociente; o resto dos decimos se converterá em centesimos, o dos centesimos em millesimos e assim por diante.

Eis o processo:

(unidades)....	5	7
(decimos).....	50	0,71428
(centesimos)	10	
(millesimos)	30	
etc.	20	
	60	
	4	

94. Neste exemplo a divisão não se exgota, o que significa que a fracção $\frac{5}{7}$ não póde exprimir-se exactamente em decimaes. O resultado obtido 0,71428 se diz approximado até os centesimos millesimos, porque os algarismos seguintes dos quaes

prescendimos, não chegão a formar um centesimo-millesimo. Este desfalque será tanto menor, e por isso a approximação tanto maior, quanto mais algarismos decimaes se calcularem ; o que não tem limite.

Se a divisão se exgota como em $\frac{3}{8} = 0,375$, a fracção fica representada em fórma decimal, conservando exactamente o seu valor.

Pela composição do denominador sabe-se determinar, quaes fracções se podem exprimir exactamente em decimaes, quaes não. Mas este exame depende de extenso conhecimento dos principios da divisibilidade dos numeros, cuja exposição desenvolvida não cabe neste compendio.

CAPITULO IV

PESOS E MEDIDAS
NUMEROS COMPLEXOS
SYSTEMA METRICO

§ 1.° PESOS E MEDIDAS

95. Chama-se *pesos e medidas o systema de unidades e suas divisões admittidas pelo uso para avaliação e permuta das cousas materiaes uteis ao homem.*

Estas unidades ou medidas apresentão nos diversos paizes grande falta de uniformidade; mas em toda a parte se admittira o costume de dar ás divisões e subdivisões de cada unidade nomes distinctos. E a reunião em um só numero de duas ou mais destas divisões é o que fórma os numeros complexos, de que depois fallaremos.

96. As *medidas* mais necessarias nas relações da vida são as *de comprimento, de superficie, de capacidade, de peso, de tempo e de moeda.* As que até agora tem estado em uso no Brazil são as seguintes:

Medidas de comprimento. Para extensões moderadas a *braça* dividida em *10 palmos*, tendo cada palmo *8 pollegadas.* Para distancias e caminhos a legoa de sesmaria que é de 3000 braças; as vezes a de 20 ao grão, que tem cerca de 2.523 braças.

Medidas de superficie. Geralmente se emprega um quadrado cujos lados sejão iguaes á unidade linear, palmo quadrado, braça quadrada, legoa quadrada. O uso tem mais admittido para medir terras de cultura a unidade *alqueire*, equivalente por convenção a um quadrado de 100 braças de lado, ou 10.000 braças quadradas.

Medidas de capacidade. Para seccos o moio que tem 60 alqueires, dividido o alqueire em 4 quartas.

Para liquidos o almude de 12 canadas, tendo a canada 4 quartilhos.

Medidas de peso. Arroba de 32 libras, tendo a libra 16 onças, a onça 8 oitavas, a oitava 72 grãos. Para os grandes pesos emprega-se o quintal de 4 arrobas e a tonellada de 54.

Medidas de tempo. Dia de 24 horas, hora de 60 minutos, minuto de 60 segundos. Uso universal no mundo civilisado.

Unidades de moeda. No Brazil e Portugal emprega-se unidade de tão pequeno valor (*o real*) que ainda nas transacções minimas nunca se faz preciso recorrer a fracções. A França emprega o franco dividido em centesimos, que muito facilitão os calculos. A Inglaterra conserva a sua antiga moeda, libra esterlina dividida em 20 schellings, constando o schelling de 12 pence. Cada nação tem seu systema de moedas, sem nenhuma uniformidade.

Esta diversidade de medidas e de divisões difficulta todas as transacções e calculos, inconveniente que se removeria adoptando universalmente os mesmos padrões, e o systema decimal.

§ 2.° NUMEROS COMPLEXOS

97. Da-se este nome ao *numero composto de partes, cada uma exprimindo as unidades diversas que resultão da divisão e subdivisão da unidade principal*. Os numeros que se referem a uma só unidade se dizem *incomplexos*.

37 arrobas, 28 legoas, 200 braças, 47 horas são numeros incomplexos; são complexos os seguintes apontados para exemplo:

$7.^{b}$ $5.^{p}$ $6.^{p}$ — Sete braças 5 palmos e 6 pollegadas.

$5.^{alm}$ $9.^{c}$ 3^{q} — Cinco almudes 9 canadas e 3 quartilhos

$11.^{d}$ $13.^{h}$ $37.^{m}$ $40.^{s}$ — 11 dias 13 horas 37 minutos e 40 segundos.

98. Os calculos dos numeros complexos, conservando-lhes essa fórma, são longos e sem utilidade pratica. E a medida que se for generalisando o systema metrico, no qual todos os numeros são decimaes, os calculos de complexos se tornarão mais e mais obsoletos. Pelo que julgamos satisfazer a todas as necessidades, expondo as regras para converter qualquer numero complexo em numero fraccionario ou decimal, e para voltar de qualquer destas duas fórmas á dos complexos.

99. E' muitas vezes necessario *reduzir um numero complexo á unidades da infima classe*, isto é, da menor sub-divisão nelle contida. Isto se obtem

por simplices multiplicações, como no exemplo seguinte:

Seja o numero 11.^{b} 7.^{p} 5.^{p} Tendo a braça 10 palmos, as 11 braças equivalem a 110 palmos, que com os 7.^{p} prefazem 117.^{p} Tendo o palmo 8 pollegadas, os 117.^{p} teraõ 117 vezes 8, ou 936 pollegadas, que com as 5 sommão 941 ^{p}.

Bem entendido este exemplo, mostra claramente o modo de proceder em qualquer outro caso.

100. Regra para converter um complexo em numero fraccionario ou decimal. *Reduzem-se à infima classe as divisões da unidade principal e divide-se o numero achado pelo numero de unidades dessa infima classe, que compõem uma unidade principal.*

Seja exemplo o numero 19 arr. 23 lib. 13 onç. 7 oit.

Eis o calculo:

19 arr. 23 lib. 13 onç. 7 oit.	1 arroba
16	—
—	32 libras.
138	16
23	—
13	192
—	32
381 onças	—
8	512 onças
—	8
3048	—
7	4096 oitavas
—	
3055 oitavas	

O complexo é igual a $19 \frac{3055}{4096}$ arr. ou, convertendo a fracção ordinaria em decimal, 19,745849 proximamente.

A analyse do processo encerra sua demonstração.

101. **Regra** para converter um numero fraccionario em complexo *Divide-se o numerador da fracção pelo denominador, convertendo os restos successivos em unidades das classes immediatas.*

Seja o n. $23 \frac{17}{29}$ braças.

braças	17	29
	10	$5^{p}\ 6^{p}\ \frac{26}{29}$
palmos	170	
	25	
	8	
pollegadas	200	
	26	

$$\text{O numero } 23 \frac{17}{29} \text{ braças} = 23^{b}\ 5^{P}\ 6^{p}\ \frac{26}{29}$$

Funda-se o processo em que $\frac{17}{29}$ da braça é equivalente a 17 braças á dividir por 29 (n. 92) e 17 braças = 170 palmos. O mesmo se diz do resto dos palmos 25, que se converte em 200 pollegadas.

102. **Regra** para converter um decimal em numero complexo. *A parte decimal de qualquer classe de unidades se converte na classe seguinte por uma simples multiplicação.*

Um exemplo bastará para esclarecer o processo, e seja o mesmo numero 19,745849 arr. que no exemplo do n. 100 resultou de uma conversão opposta á presente. Procuremos o complexo de que proveio aquelle decimal.

arrobas	19,745849
	32
	1491698
	2237547
libras	23,867168
	16
	5203008
	867168
onças	13,874688
	8
oitavas	6,997504

O numero dado 19,745849 $= 19^{\text{arr.}}\ 23^{\text{lb.}}\ 13^{\text{onç.}}\ 6^{\text{oit.}},9975$

A pequena differença, menos de 0,0025 de oitava, entre este numero e do exemplo anterior procede de que a divisão do n. 100 não era exacta, e o decimal 19, 745849 foi apenas approximado até os millionesimos.

Sendo pois facil converter um complexo em fraccionario ou em decimal e reciprocamente, todos os calculos dependentes de numeros complexos não soffrerão embaraço.

Cumpre porém fazer votos pela vulgarisação do systema metrico decimal.

§ 3.º SYSTEMA METRICO DECIMAL

103. O novo systema de *pesos e medidas* mandado adoptar por uma lei, e que pouco a pouco se vai introduzindo em nossos usos, chama-se *systema metrico* porque tem por base o *metro*, unidade linear empregada em França e igual á decima-millionesima parte da distancia do equador ao polo do Norte, distancia medida por astronomos francezes. E é *systema decimal*, porque não admitte divisão ou subdivisão que não seja na razão decupla.

Neste systema para formar a nomenclatura das *dezenas*, *centenas*, *milhares*, *dezenas de milhares* de qualquer das unidades, adapta-se ao nome respectivo os prefixos *deca*, *hecto*, *kilo*, *myria* derivados das palavras gregas que significão 10, 100, 1000, 10000. E para os *decimos*, *centesimos*, *millesimos*, empregão-se os prefixos de origem latina *deci*, *centi*, *milli*. Mas nem todos estes multiplos e submultiplos são usados na pratica. Eis os admittidos.

104. *Medidas lineares :*

Myriametro	=	10000	metros
Kilometro	=	1000	»
Hectometro	=	100	»
Decametro	=	10	»
Metro	=	1	»
Decimetro	=	0,1	»
Centimetro	=	0,01	»
Millimetro	=	0,001	»

As duas primeiras são medidas itinerarias.

O metro é igual a $\frac{10}{11}$ da vara ou $\frac{5}{11}$ da braça. A braça $= \frac{11}{5} = 2{,}2$ metros; a vara $= \frac{11}{10} = 1{,}1$ metros.

105. *Medidas de superficie*

Hectaro	=	100	*aros*
aro	=	1	»
Centiaro	=	0,01	»

O *aro* é um quadrado que tem de lado 10 metros; é pois area igual a 100 metros quadrados, que correspondem a 20,66 braças quadradas. O hectaro igual a 100 aros contem 2066 braças quadradas. O centiaro é igual a *1 metro quadrado.*

Uma braça quadrada equivale a 4,84 metros quadrados ou centiaros.

106. *Medidas de capacidade* ou volume:

Hectolitro	=	100	litros
Decalitro	=	10	»
Litro	=	1	»
Decilitro	=	0,1	»
Centilitro	=	0,01	»

O litro, que é o volume de um decimetro cubico (a) equivale a $1\frac{1}{2}$ quartilhos mui proximamente (1,5026). O quartilho é igual a 0,6655 litros.

Para medidas maiores, principalmente de madeira e lenha, emprega-se o *stereo* que é o metro cubico, ou cubo de arestas de um metro (a).

(a) Chama-se cubo uma figura como um dado de jogar: *metro cubico*, quando as arestas são todas iguais a 1 metro; *decimetro cubico*, quando cada aresta = 1 decimetro.

107. *Medidas de peso:*

Myriagrammo	=	10000	grammos
Kilogrammo	=	1000	»
Hectogrammo	=	100	»
Decagrammo	=	10	»
Grammo	=	1	»
Decigrammo	=	0,1	»
Centigrammo	=	0,01	»
Milligrammo	=	0,001	»

Um grammo é quasi exactamente 20 grãos do antigo peso ($\overset{g}{20},0823$). Um grão antigo é quasi $\frac{1}{20}$ ou 0,05 do grammo (mui proximamente 0,049794).

O kilogrammo equivale a 2,179 libras, ou 2 libras e quasi 3 onças. A arroba tem 14685 grammos ou 14,685 kilogrammos.

1.000 kilogrammos fazem uma tonelada metrica e valem por 2.179 libras, ou 68 arr. 3 lb.

108. Todos os numeros que representão estas medidas são verdadeiros decimaes e como taes se calculão. Por exemplo 6752,38 metros póde ler-se 6752 metros 38 centesimos, ou 6 myriametros, 7 kilometros, 5 decametros, 2 metros, 3 decimetros e 8 centimetros.

807,67 grammos exprime 807 gr. 67 centesimos, ou 8 hectogrammos, 7 grammos, 6 decigrammos e 7 centigrammos.

109. No systema metrico a reducção de unidades de qualquer ordem para as de ordens inferiores dis-

pensa as multiplicações exigidas pelo processo (n. 99) e se obtem por simples mudança da virgula para a direita, o que equivale a multiplicar por 10, 100, 1000, etc.

Assim os numeros seguintes são equivalentes

7,5326	kilometros
75,326	hectometros
753,26	decametros
7532,6	metros
75326	decimetros

e assim por diante.

E' claro que tendo de passar das ordens inferiores para as superiores, tudo se reduz a mudar a virgula para a esquerda.

Comprehende-se isto observando que 1 kilometro é igual á 10 hectometros, 1 hectometro igual á 10 decametros, 1 decametro à 10 metros, etc. E assim nas outras especies de unidades metricas.

110. Esete systema que se trata de introduzir na pratica, exige ao menos no periodo da transição o conhecimento das relações de grandeza entre as antigas e as novas unidades. Nos numeros anteriores temos indicado as principaes dessas relações: conhecidas ellas, será facil converter qualquer numero expresso em medidas antigas nas modernas, e vice-versa: então uma transacção iniciada no dominio de um systema poderá ser liquidada com o outro.

Demos exemplos dessas conversões.

1.° *Representar em metros a extensão linear 13,57 braças.*

Sendo uma braça igual a 2,2 metros, por este se multiplica o numero dado e forma-se 29,854 metros.

2.° *Um terreno mede 1253 braças quadradas e quer-se represental-o por aros*, isto é, unidades compostas de cem metros quadrados.

Uma braça quadrada é igual a 4,84 metros quadrados: multiplicado por este o numero dado, forma 6064,52 metros quadrados ou 60,6452 *aros*.

3.° *Uma sesmaria de terras* (1500 braças de frente com 1500 de fundos) *ou 2250000 braças quadradas quantos hectaros contem?*

2250000 × 4,84 = 10890000 metros quadrados = 108900 *aros* = 1089 *hectaros*.

4.° *Uma pipa tem 180 canadas, ou 720 quartilhos; quantos litros?*

Equivalendo o quartilho a 0,6655 de um litro, multiplicado este numero por 720 mostra que uma pipa mede 479,16 litros.

5.° *Determinar em unidades metricas o valor da oitava, da onça, da libra e da arroba.*

Sendo um grão do antigo peso = 0,049794 do grammo, basta multiplicar este numero por 72, por 8, por 16 e por 32 e teremos

1 oitava	=	3,585	grammos
1 onça	=	28,681	»
1 libra	=	458,901	»
1 arroba	=	14684,832	»

ou mui proximamente 14,685 kilogrammos.

N. B. E' de notar que a libra do Brazil (459 grammos) não differe muito de metade de 1 kilogrammo (500 grammos). A libra ingleza, ainda em uso, é mui pouco menor que a nossa. A antiga libra franceza, um tanto maior, quasi iguala a meio kilogrammo: tem ella cerca de 490 grammos.

Daqui veio que no commercio miudo em França taxão os objectos que se vendem a peso pelo valor de *meio kilo* (abreviação de kilogrammo), que sendo quasi igual á antiga libra, conserva os preços a que o povo estava habituado.

Poder-se-hia adoptar no Brazil pratica semelhante, mas para guardar as relações deveria o preço do meio kilo ser igual ao da libra, com augmento de 10 °/₀.

As noções que precedem, sendo convenientemente desenvolvidas pelos professores, bastão para communicar aos alumnos idéa clara do que é o *systema metrico decimal de pesos e medidas*. Nas applicações usuaes poderão sempre dispensar as multiplicações de que damos exemplos, effectuando as conversões de medidas de um systema para outro por meio de taboas que para esse fim frequentemente se publicão.

A inserção dessas taboas, assim como o estudo da filiação theorica de todas as medidas ao metro linear, parecerão-nos fóra do programma deste compendio.

CAPITULO V

RAZÕES E PROPORÇÕES E SEUS USOS

§ 1.º RAZÕES E PROPORÇÕES

111. O quociente da divisão de um numero por outro da mesma especie, tambem se chama *razão* ou relação entre elles.

Indica-se separando os numeros por dous pontos, de sorte que 7:3 exprime o quociente de 7 dividido por 3 ou a razão de 7 para 3.

O primeiro termo da razão se chama *antecedente* o segundo *consequente.*

Devendo ser da mesma especie os dous termos de uma razão, a mesma razão (quociente) é numero abstracto (n. 43): exprime *quantas vezes* o antecedente contem o consequente, ou o quociente da divisão de um pelo outro.

112. Sendo iguaes duas razões, diz-se que os 4 termos *formão proporção* ou *estão em proporção.* Assim, exprimindo o n. abstracto 3 a razão de 15:5 e ao mesmo tempo a de 12:4, os quatro numeros formão proporção que se escreve 15:5::12:4, e le-se 15 para 5 assim como 12 para 4.

A especie dos dous primeiros pode ser diversa da dos outros dous: mas uma razão bem como a outra igual é sempre numero abstracto, e chama-se a *razão commum* da proporção. Pode ser 15 legoas:5 legoas :: 12 horas:4 horas; a *razão commum* é o numero abstracto 3.

113. A propriedade fundamental e caracteristica da proporção é que *o producto dos extremos é igual ao producto dos meios*.

Seja a proporção 7:3 : : 14 :6

Segundo a definição $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ e reduzindo ao mesmo denominador $\frac{7 \times 6}{18} = \frac{14 \times 3}{18}$: ora, sendo iguaes estas fraccções e tendo o mesmo denominador, os numeradores devem ser iguaes, logo $7 \times 6 = 14 \times 3$.

114. A propriedade precedente se diz caracteristica, porque pertencendo sómente a 4 numeros em proporção a determinão e caracterisão. Em geral, *se o producto de dous numeros é igual ao producto de outros dous, os quatro formão proporção*, collocando os dous factores de um producto nos extremos, os do outro nos meios.

Exemplo: sendo $3 \times 8 = 6 \times 4$, dá-se a proporção 3:4: :6:8.

Dem. Sendo $3 \times 8 = 6 \times 4$ e dividindo ambos os productos por 8×4, temos

$$\frac{3 \times 8}{8 \times 4} = \frac{6 \times 4}{8 \times 4},$$

ou simplificando ambas as fracções,

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \text{ isto é, } 3:4::6:8$$

Destes principios se derivão as consequencias seguintes :

115. 1.ª Pode-se mudar a ordem dos termos sem pertubar a proporção, com tanto que não deixe de ser o producto dos extremos igual ao dos meios. Eis as principaes mutações:

Alternar uma proporção é trocar os meios.

Inverter é mudar os meios para extremos e os extremos para meios.

Transpor é mudar o logar das razões.

Da proporção 5 : 7 : : 15 : 21 resulta,

alternando	5 : 15 : : 7 : 21
invertendo	7 : 5 : : 21 : 15
transpondo	15 : 21 : : 5 : 7

116. 2.ª Não se perturba a proporção, multiplicando pelo mesmo numero o 1.° e o 2.° termos, ou o 3.° e 4.° ou o 1.° e 3.° ou o 2.° e 4.° isto é, um extremo e um meio. Porque isto equivale a multiplicar os dous productos de extremos e de meios por um mesmo numero, o que conserva a igualdade delles e portanto a proporção.

117. 3.° Conhecidos tres termos de uma proporção pode-se calcular o que falta. *Se é um extremo, divide-se o producto dos meios pelo extremo conhecido ; se é um meio, divide-se o producto dos extremos pelo meio conhecido.*

Sejão os termos conhecidos por sua ordem 7, 11, 5 ; e seja x o 4.° desconhecido ; será

$$7 : 11 : : 5 : x = \frac{55}{7} = 7 \frac{6}{7}$$

118. Em toda a proporção, *a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Seja a proporção $3 : 4 :: 6 : 8$; provaremos que deve ser

$$3 + 6 : 4 + 8 :: 3 : 4, \text{ ou } :: 6 : 8$$

Dem. Da proporção dada se deduz alternando-a, $3 : 6 :: 4 : 8$, e desta $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ Ajuntando 1 a cada uma destas duas fracções, teremos

$$1 \frac{3}{6} = 1 \frac{4}{8}$$

ou reduzindo os inteiros a fracções

$\frac{6+3}{6} = \frac{8+4}{8}$, donde a proporção $6+3 : 6 :: 8+4 : 8$ ou alternando esta ultima, $6 + 3 : 8 + 4 :: 6 : 8$.

119. Em qualquer serie de rasões iguaes, *a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Seja a serie $3 : 6 :: 1 : 2 :: 5 : 10 :: 4 : 8 :: 2 : 4 :: 7 : 14$,

Sendo iguaes todas estas razões, duas quaesquer dellas formão proporção, por exemplo $3 : 6 :: 1 : 2$; e applicando a esta a propriedade precedente (118) temos

$$3 + 1 : 6 + 2 :: 1 : 2$$

ou substituindo á razão $1 : 2$ a sua igual $5 : 10$,

$$3 + 1 : 6 + 2 :: 5 : 10$$

Applicando a esta a mesma prosperidade (118)

$$3+1+5:6+2+10::5:10$$

ou $3+1+5:6+2+10::4:8$

Donde $3+1+5+4:6+2+10+8::4:8$

Continuando a deducção, estende-se a propriedade a qualquer numero de razões iguaes.

120. *Multiplicando ordenadamente os termos de duas ou mais proporções, os quatro productos tambem formão proporção.*

Sejão as tres proporções

$$\left.\begin{array}{r} 6:3::4:2 \\ 9:12::3:4 \\ 8:4::4:2 \end{array}\right\} \text{das quaes conclue} \left\{\begin{array}{l} \frac{6}{3}=\frac{4}{2} \\ \frac{9}{12}=\frac{3}{4} \\ \frac{8}{4}=\frac{4}{2} \end{array}\right.$$

Multiplicando entre si estas fracções, temos a igualdade

$$\frac{6\times 9\times 8}{3\times 12\times 4}=\frac{4\times 3\times 4}{2\times 4\times 2}$$

que equivale á proporção

$$6\times 9\times 8:3\times 12\times 4::4\times 3\times 4:2\times 4\times 2,$$

e esta demonstra a propriedade enunciada.

§ 2.º REGRA DE TRES SIMPLES

121. *Dá-se este nome á solução do problema em que são dados 3 numeros e pede-se um, estando os quatro em proporção.*

Devendo ser da mesma especie os termos de cada uma das duas razões que formão a proporção, é claro que entre os 3 numeros dados haverá sempre dous da mesma especie, e que o 3° deve ser da especie do numero pedido.

Os dous numeros dados da mesma especie chamão-se *termos principaes*; o 3° e o numero pedido são *relativos*. As condições de cada problema explicão as relações entre cada um delles e os principaes, respectivamente.

122. A resolução destes problemas depende de conhecer-se em que ordem se deve collocar os tres numeros dados e o pedido para que formem proporção; ordenada esta, calcula-se o termo desconhecido pela regra do n. 117. Assim a unica difficuldade nas questões de regra de tres simples consiste em ordenar a proporção.

Mas analysando as condições do problema e confrontando os termos principaes com os seus relativos, sempre se consegue descobrir se o numero pedido deve ser maior ou menor do que o dado da mesma especie. E então será facil ordenar a proporção; eis a ordem:

Maior : *menor* (dos principaes) : : *maior* : *menor* (dos relativos). Ou:

Menor : *maior* (dos principaes) : : *menor* : *maior* (dos relativos)

A discussão dos seguintes exemplos tornará mais claros os principios expostos e os demonstrará.

123. Primeiro exemplo. *Tendo uma peça de 23 metros de fazenda custado 50.600, outra com 37 metros da mesma fazenda quanto custará?*

São dados 3 numeros, 23 metros, 50.600 réis, 37 metros; e pede-se um 4º numero, o custo da peça de 37 metros.

Os quatro numeros são proporcionaes. Sendo a mesma fazenda, é manifesto que uma peça dupla custará o dobro; tripla, o triplo; meia peça, metade da quantia: em geral a *mesma razão existe* entre os comprimentos das peças e as quantias respectivas.

Os termos principaes são 23 metros, 37 metros. Os relativos são 50.600 réis e o custo pedido, sendo o 1º relativo á 23 metros, o 2º a 37 metros.

E pois que *a maior peça deve custar mais*, o numero pedido será maior do que 50.600. Chamando-o x, teremos a proporção

$$23 : 37 :: 50.600 : x.$$

menor : *maior* :: *menor* : *maior*

(dos principaes) (dos relativos)

Conclue-se $x = \frac{50600 \times 37}{23} = 81400$ réis.

124. Segundo exemplo. *Executado certo trabalho por 47 jornaleiros em 13 dias, querendo-se fazer trabalho igual em 17 dias, quantos jornaleiros são necessarios?*

Numeros dados—47 jornaleiros, 14 dias, 17 dias.

Numero pedido—o dos jornaleiros que farão a obra em 17 dias.

Que são em proporção, se reconhece facilmente.

Termos principaes 13 dias, 17 dias.

Relativo ao 1° 47 jornaleiros, relativo ao 2° o numero pedido. Este tem de ser menor do que 47, porque sendo o trabalho igual, *quanto mais tempo, menos braços são precisos*. Assim a proporção é

$$17 : 13 :: 47 : x = \frac{13 \times 47}{17} = \frac{611}{17} = 35 \frac{16}{17}$$

(*maior* : *menor* :: *maior* : *menor*)

O numero pedido é quasi 36 jornaleiros.

125. Analysando e confrontando estes dous exemplos, acha-se entre elles uma differença notavel. No 1° *crescendo um dos principaes cresce o seu relativo: no 2° pelo contrario crescendo um dos principaes diminue o seu relativo*. Daqui veio classificar-se estes problemas e semelhantes em *regra de tres directa e regra de tres inversa*. Observando as proporções respectivas, nota-se que na *directa* um dos principaes e o seu relativo occupam os antecedentes, outro com o seu os consequentes; na *inversa*, um dos principaes e o seu relativo occupão os extremos, outro com o seu os meios.

Póde-se pois estabelecer regras diversas para armar a proporção em cada um dos dous casos.

Mas a distincção é inutil, pois a regra do n. 122 tem applicação a todos os casos. Tudo se reduz a indagar dos dados da questão, se o numero pedido deve ser maior ou menor que o conhecido da mesma especie, e seguir sempre a formula

Maior : *menor*, dos principais : : *maior* : *menor*, dos relativos. Ou indifferentemente,

Menor : *maior*, dos principais : : *menor* : *maior*, dos relativos.

N. B. Convirá, antes de passar ao § seguinte, multiplicar exemplos de *regras de tres simplices*.

§ 3.º REGRA DE TRES COMPOSTA

126. Da-se este nome aos problemas que dependem de mais de uma proporção combinadas, isto é, comprehendem mais de uma *regra de tres simplices*. Um exemplo bastará para indicar o modo de resolver taes questões.

Se 32 jornaleiros precisarão de 15 dias, trabalhando 10 horas por dia, para fazer 618 metros de um vallo; quantos jornaleiros serão precisos para em 17 dias, trabalhando 7 horas por dia, fazerem 594 metros de trabalho semelhante?

Manifestamente o numero de jornaleiros pedido depende de tres circumstancias, que todas varião nos dous casos figurados; 1.ª numero de dias; 2.ª numero de horas diarias de trabalho; 3.ª quantidade de serviço para fazer-se.

Se não variassem a 2.ª e a 3.ª circumstancias, o problema ficaria reduzido a uma regra de tres simples, que seria : *quantos jornaleiros farão em 17 dias o mesmo que fizerão 32 em 15 dias ?*

Termos principaes, 15 dias, 17 dias,

Relativo do 1.º 32 jornaleiros ; *relativo do 2.º* o numero pedido, que chamaremos x.

Para a mesma quantidade de serviço, *quanto mais dias menos jornaleiros são precisos* ; logo x deve ser menor do que 22. Pelo que a proporção será 17 : 15 : : 32 : x

Façamos agora variar as horas diarias do trabalho e indaguemos: se *x jornaleiros fazem certo serviço a 10 horas por dia, quantos farão o mesmo, trabalhando só 7 horas ?*

Segunda regra de trez simples.

Termos principaes 10h., 7h.

Relativo ao primeiro x, que se póde suppor conhecido, pois que póde ser calculado pela primeira proporção : *relativo ao segundo* o numero pedido que chamaremos x'.

Menos horas de serviço por dia exige mais jornaleiros para o mesmo resultado. Por isso x' deve ser maior do que x : a proporção é

7 : 10 : : x : x'

e exprimirá x' o numero de jornaleiros que em 17 dias a 7 horas por dia farão serviço igual ao dos primeiros 32, isto é, 618 metros de obra.

Attendamos agora a 3.ª circumstancia : o trabalho pedido não é 618 metros, mas 594, e daqui provem esta 3.ª regra de trez simples.

Emquanto x' jornaleiros fazem 618 metros, quantos são precisos para executar 594 metros?

Termos principaes 618 metros, 596 metros.

Relativo do primeiro x' que se póde suppor conhecido: *relativo do segundo* o numero pedido: chamemol-o x''.

Menos trabalho pede menos braços: portanto x'' deve ser menor que x', e será a proporção

$$618 : 594 :: x' : x''$$

Reunindo agora as trez proporções

$$\begin{aligned} 17 : 15 &:: 32 : x \\ 7 : 10 &:: x : x' \\ 618 : 594 &:: x' : x'' \end{aligned}$$

multiplicando ordenadamente os termos de todas (n.º 120) x e x' desapparecem, mediante simplificações, e resta

$$17 \times 7 \times 618 : 15 \times 10 \times 594 :: 32 : x'' = 38 \frac{56604}{73542},$$

em numeros redondos 39 jornaleiros.

A fracção significa que ao trabalho de 38 jornaleiros se deve ajuntar uma parte $\left(\frac{56604}{73542}\right)$ do trabalho de um para completar exactamente a obra pedida.

127. Não reduziremos a regras geraes o processo da regra de tres composta. Em cada caso cumpre analysar os dados do problema, e destinguir as diversas circumstancias de que depende a razão entre o numero pedido e o dado da mesma especie. Cada

circumstancia dará origem a uma regra de tres simples, e multiplicando ordenadamente as proporções ter-se-ha sempre o resultado.

Para maior facilidade convirá ordenar cada proporção *de maior para menor*, ou *de menor para maior*, de modo que o numero a calcular em cada uma dellas occupe sempre o 4.º termo, o que dá logar ás simplificações finaes. Nas seguintes applicações se veraõ outros exemplos de regras de tres compostas.

§ 4.º QUESTÕES DE JUROS

128. Juro de uma quantia é o beneficio que alguem paga ao dono della, para usufruil-a: a quantia emprestada toma o nome de *principal*.

No contracto do emprestimo estipula-se o juro, determinando quanto se pagará por cada 100 unidades de moeda em cada unidade de tempo; e essa contribuição se chama *taxa de juro*. De ordinario *taxa-se por anno*.

Nas questões de juros os elementos essenciaes que entrão em calculo são quatro: 1.º *principal emprestado*; 2.º *tempo que dura o emprestimo*; 3.º *taxa de juro*; 4.º *juro vencido no tempo do emprestimo*.

Os problemas de juros têm por fim determinar uma dessas quantidades, o que sempre se consegue por meio de uma regra de tres simples ou composta, como se verá nos exemplos seguintes:

129. Primeiro exemplo. *Quando vence em um anno o pricnipal 647$200 pela taxa 7 °/₀* isto é, 7 por 100.

Por outras palavras: *se 100 vence 7, 647$200 quanto vencerá no mesmo tempo?*

Termos principaes 100 e 647$200.

Relativo do 1.° 7 : do 2.° o juro pedido x.

Mais principal vence mais juro: portanto x deve ser maior do que 7. Logo

$$100 : 647\$200 : : 7 : x = 45\$304$$

Regra pratica para calcular o juro vencido em um anno. *Multiplica-se o principal pela taxa e divide-se por 100.* Assim

$$\begin{array}{r} 647\$200 \\ 7 \\ \hline 45\$304(00 \end{array}$$

130. Segundo exemplo. *Tendo o principal 647$200 vencido em um anno 45304, qual foi a taxa?*

Em outros termos: *Se 647$200 produzio 45304; 100 quanto produziria no mesmo tempo?* (um anno).

Uma analyse semelhante ás precedentes conduz á proporção 647200 : 100 : : 45304 : x = 7

Regra pratica para calcular a taxa. *Multiplica-se o juro annual por 100 e divide-se o producto pelo principal.*

131. Terceiro exemplo. *Qual é o principal que a razão de 7 °/ₒ produz o juro annual* de 45.304?

Equivale a questão á seguinte: *Sendo 7 o juro do principal 100, o juro 45.304 a que principal corresponde?*

Termos principaes juro 7, e juro 45.304.

Relativo do primeiro o principal 100: *relativo do segundo* o principal desconhecido, que produzio o juro 45.304. Chamemol-o x.

Mais juro, mais principal: por tanto x ha de ser maior do que 100. A proporção em consequencia é

$$7 : 45.304 :: 100 : x = 647\$200.$$

REGRA PRATICA para calcular o principal. *Multiplica-se o juro annual por 100, e divide-se pela taxa.*

N. B. Nos tres exemplos precedentes o tempo foi sempre a unidade: varia porém nos seguintes.

132. Quarto exemplo. *Emprestou-se a 11 de Abril de 1872 a quantia de 857\$360 a 9 °/ₒ ao anno, e quer-se calcular o juro vencido até 20 de Setembro do mesmo anno.*

De uma data á outra se passão 162 dias.

Calcula-se em primeiro lugar o juro vencido em um anno (n. 129)

$$\begin{array}{r} 857.360 \\ 9 \\ \hline 77.162(40 \end{array}$$

Correspondendo este juro a 365 dias, para calcular o juro vencido em 162 dias teremos a proporção 365:162 : : 77.162 : x = 31.247.

Regra pratica para achar o juro correspondente a qualquer fracção do anno. *Multiplica-se o juro de um anno pelo numero de dias proposto, e divide-se o producto por 365.*

133. O caso precedente é de regra de tres composta, dependente de duas simplices: pode-se dar á solução a forma do typo (n. 126).

São duas as circumstancias, taxa de juro e tempo: prescindindo da segunda, teriamos

$$100 : 857.360 : : 9 : x \text{ (juro de um anno)}$$

A variação do tempo dá origem á 2.ª proporção

$$365 : 162 : : x : x'$$

e multiplicando as duas ordenadamente

$$36500 : 857360 \times 162 : : 9 : x' = 34247,$$

como acima. Entretanto a forma dada ao calculo no n. 133 melhor contribue para gravar na memoria o processo a seguir em casos analogos.

134. Quinto exemplo. *Determinar o juro de 857.360 a 9 %, vencido em 5 annos e 153 dias.*

Póde resolver-se como no n. 133, sendo a razão dos tempos na seguinte $1:5\frac{153}{365}$. Mas é mais com-modo e usual calcular o juro de um anno, o de 5 annos, o de 153 dias, e sommar. Eis o calculo:

principal	857.360
	9
juro vencido em um anno	77.162(40
	5
» » *em 5 annos*	385.810
» » *em 153 dias* (n. 133)$\frac{77.162 \times 153}{365}$	=32.345
» » *nos 5 annos e 153 dias* .	418.155

135. Sexto exemplo. *Produzindo o emprestimo de rs. 857.360 o juro de rs. 418.155 em 5 annos e 153 dias, qual foi a taxa?*

Primeiro acharemos o juro vencido em 1 anno pela proporção

$$5\,\frac{153}{365}:1::418.155:X=77.162$$

Sendo este o juro annual de rs. 857.360, o de 100, isto é, a taxa se achará pela proporção

$$857.360:100::77.162:X=9$$

136. *Advertencia.* Um processo inteiramente semelhante ao dos calculos de juros resolve todas as questões de *porcentagens*, como as *commissões*, *corretagens*, *agios*, *contribuições ad valorem*, e todos os outros casos em que se precisa calcular de *qualquer quantia uma parte determinada na razão de tantos por cento*: é o que se chama *porcentagem*.

Uma commissão ou corretagem de 3 °/₀ da importancia de uma transacção,

Um agio de 11 °/₀ da moeda papel sobre o ouro,

Um imposto sobre mercadorias de 30 °/₀ do valor,

Estas expressões significão simplesmente 3 por 100, 11 por 100, 30 por 100 das quantias respectivas.

E todas se calculão pela regra do n. 129.

§ 5.° QUESTOES DE DESCONTOS

137. Chama-se desconto *o abatimento no valor de um titulo de divida pagavel no fim de certo praso, e que se deseja realisar antes do vencimento.*

Admitta-se para primeiro exemplo, que a antecipação seja de um anno exacto, e a taxa do juro 7 °/₀ ; seja o titulo a vencer de rs. 5.470$000.

Descontar esse titulo é receber por elle uma quantia á vista ; e quem a adianta terá de ser embolsado de principal e juros na data do vencimento.

Assim a quantia adiantada hoje deve ser tal, que sommada com o juro vencido em um anno, produza o valor do titulo á pagar no vencimento ; essa quantia adiantada toma o nome de *valor actual* do titulo.

Sendo o juro annual 7 °/₀, claro é que 100 representa o *valor actual* de uma letra de 107 pagavel no fim de um anno : o que se pede é o valor actual da letra de rs. 5.470$000.

Questão de regra de tres simples em que *os termos principaes* são 107, 5470000; relativo do primeiro 100, valor actual da letra de 107; relativo do 2º o numero pedido, valor actual da de 5470000.

Uma analyse como a dos ns. 122 e seguintes conduz á proporção

$$107 : 5470000 :: 100 : x = 5112150$$

138. Se em logar do *valor actual*, quizessemos determinar o *desconto* ou abatimento a fazer, a proporção seria esta

$107 : 5470000 :: 7 : x =$	537850 desconto,
que abatido do valor do titulo	5470000
deixa para *valor actual*	5112150,

como acima.

139. No exemplo ultimo fez-se o desconto por um anno exacto, o que poucas vezes tem logar na pratica. Mas, qualquer que seja o tempo, o artificio consiste em sommar a 100 o juro de 100 por esse tempo para formar a importancia de um titulo imaginario ao mesmo praso, cujo valor actual seja 100. Esse titulo imaginario, comparado com o da questão, a reduz a uma regra de tres simples.

140. Seja segundo exemplo uma letra de réis 625.000 a vencer a 31 de Julho de 1874: *quer-se descontal-a a 6 °/₀* no dia 20 de Maio de 1872, isto é, 2 annos e 72 dias antes do vencimento.

Pois que 100 vence 6 em um anno, em $2\frac{72}{365}$ annos vencerá $6 \times 2\frac{72}{365} = 6 \times \frac{802}{365} = \frac{4812}{365}$. Logo, uma letra da importancia $100 + \frac{4812}{365}$ ao praso supra tem por valor actual 100: donde se conclue

$$100 + \frac{4812}{365} : 625.000 :: 100 : x = 552.200$$

valor actual da letra de réis 625.000 a vencer daqui a 2 annos e 72 dias.

Para calcular o desconto, a proporção seria

$$100 + \frac{4812}{365} : 625.000 :: \frac{4812}{365} : x = 72.800$$

que abatido da importancia do titulo 625.000

deixa o valor actual 552.200,

como acima.

141. O que precede é a verdadeira theoria do desconto: applicando-a, conserva-se e respeita-se a taxa de juro convencionada. Não é porém o que de ordinario se pratica no commercio: calculão o juro da importancia do titulo, como se a adiantassem integralmente, e descontão esse juro.

Assim, no 1.º exemplo, calcularião o juro de 5.470$000 por um anno

Titulo a descontar	5.470.000
	7
Desconto	382.900(00
	5.470.000
Valor actual. . .	5.087.100

em logar de 5.112.150, que achamos pelo 1.° methodo.

O desconto, como se pratica no commercio, é sempre mais oneroso ao portador do titulo, e tanto mais quanto maior é o praso.

No 2.° exemplo, o calculo seria

Titulo a descontar . . . 625.000
6
---
6 °/₀ em um anno. . . . 37.500(00
2

» *em dous annos*. . . 75.000
» *em 72 dias* $\frac{37500\times 72}{365}=$ 7.397

» *em 2 annos e 72 dias* 82.397 desconto que
abatido da importancia . 625.000
---
deixa o valor actual. . . 542.603

em logar de 552.200 obtido pela verdadeira theoria do desconto.

142. Chamão alguns ao processo exposto (n. 137 a 140) *desconto por dentro*, e a regra do commercio *desconto por fóra*. Este ultimo é geralmente seguido, ou por ser mais rapido o calculo, ou porque favorece o capital elevando virtualmente a taxa do juro: é naturalmente o capitalista quem dá a lei nestas transacções.

Entretanto fundando-se no assentimento geral, o costume assume o caracter de uma convenção.

O calculo do *desconto por fóra* não differe do calculo de juros, como acabamos de ver nos dous exemplos resolvidos por um e outro methodo.

§ 6.º QUESTÕES DE CAMBIOS

143. *Chama-se cambio entre duas praças a differença dos valores da moeda corrente em uma e outra.*

Se em ambas circula moeda real (ouro ou prata do mesmo titulo) a variação do cambio é insignificante, porque não póde ir além da despeza e commissões a que é sujeito o negocio do banco. Conhecido o valor intrinseco de uma libra esterlina, valerá em qualquer paiz igual peso de ouro na moeda corrente, salvas as commissões.

São porém ás vezes consideraveis as variações, quando em uma das praças como no Rio de Janeiro circula moeda papel, cujo valor oscilla segundo as circumstancias e o credito do paiz.

144. Estabelecida a *taxa do cambio*, isto é, a relação entre os valores do meio circulante em uma e outra praça, a conversão de uma quantia depende de uma simples regra de tres. Os seguintes exemplos relativos ao cambio entre a nossa praça e tres das principaes da Europa, mostrão como se deve proceder em qualquer outro caso.

145. *Cambio entre o Rio de Janeiro e Londres.*

Costuma taxar-se, determinando quanto vale em dinheiro esterlino a quantia fixa 1.000 rèis.

Cambio de 27 significa que 1.000 réis de papel equivalem a 27 *pence*, dinheiro inglez. E a conversão de qualquer quantia se fará pela proporção

1.000 : quantia em papel : : 27 : x

O 4.º termo exprimirá *pence* esterlinos, dos quaes dividindo por 12 se extrahirão os shellings, e destes as libras dividindo por 20.

146. Se é dada a quantia em libras esterlinas a proporção será

27 : quantia esterlina : : 1000 : x

Reduzida a *quantia esterlina* a *pence*, o 4.º termo exprimirá o equivalente em papel.

147. *Cambio entre o Rio de Janeiro e Paris.* Para esta praça o estilo é taxar quanto vale em nosso papel a quantia fixa *um franco:* a reducção é facilima.

Qualquer numero de francos multiplicado pela taxa dà o equivalente em papel: qualquer quantia em papel dividida pela taxa dà o numero de francos correspondente.

148. *Cambio entre Rio de Janeiro e Lisboa.* Sendo identico o systema, e tendo as unidades monetarias a mesma denominação, o cambio, que exprime a differença entre a moeda de prata de Por-

tugal e a de papel do Brazil, tem o caracter de agio de moeda, e taxa-se por uma porcentagem, cujo calculo já conhecemos.

Cambio 210 significa que 210 rs. do Rio valem 100 rs. de Lisboa, e então

210 : quantia em papel : : 100 : quantia equivalente em Lisboa.

Por esta proporção se faz qualquer das duas reducções de uma para outra praça.

N. B. Bem comprehendidas estas noções e calculos elementares dos cambios, as pessoas que se dedicarem á vida commercial facilmente as desenvolverão, depois de conhecerem os estylos e regras da sua profissão: neste compendio nos limitamos aos conhecimentos que podem ser uteis a todas as classes da sociedade.

§ 7.º QUESTÕES DE SOCIEDADE OU COMPANHIA

149. Todas as operações deste genero se filião á um *problema geral*, que alem desta tem varias outras applicações. E' seu objecto *dividir um numero dado em partes proporcionaes a outros tantos numeros tambem dados*.

Sirva de exemplo o numero 847 que se quer dividir em tres partes proporcionaes a 5, 7, 11.

Esta proporcionalidade significa que a mesma razão existe entre 5 e a 1ª parte do numero, entre 7 e a 2ª parte, entre 11 e a 3ª parte: teremos pois esta serie de razões iguaes, que exprime a condição do problema

$$5 : 1^a \text{ parte} :: 7 : 2^a \text{ parte} :: 11 : 3^a \text{ p.}$$

Applicando o principio demonstrado (n. 119) será

$$5 + 7 + 11 : 847 :: 5 : 1^a \text{ parte} = \frac{847 \times 5}{5+7+11}$$

$$\text{ou} \quad » \quad : » :: 7 : 2^a \quad » \quad = \frac{847 \times 7}{5+7+11}$$

$$\text{ou} \quad » \quad : » :: 11 : 3^a \quad » \quad = \frac{847 \times 11}{5+7+11}$$

Examinando as operações indicadas, reconhece-se que ellas se reduzem a dividir 847 por 23, e multiplicar o quociente successivamente por 5, por 7, por 11.

Ora $\frac{847}{23} = 36,826$; e portanto

1.ª parte	=	184,130
2.ª »	=	257,782
3.ª »	=	405,086
Somma		846,998

que devia ser igual ao numero dado 847: a pequena differença 0,002 procede de não ser completo e exacto o quociente de 847 por 23.

Regra pratica. *Divide-se o numero dado pela somma dos numeros proporcionaes tambem dados, e por cada um destes se multiplica o quociente.*

150. Chama-se *regra de companhia* ou *de sociedade* a operação, pela qual se reparte o lucro ou

perda de qualquer negocio entre os socios que nelle empregarão capitaes: o capital de cada um dos socios toma o nome de *entrada.*

Se as entradas são iguaes e se empregão pelo mesmo tempo, evidentemente o lucro ou perda deve repartir-se com igualdade, o que se faz pela divisão. O caso é diverso se as entradas differem, ou se estão empregadas por tempos desiguaes.

E' de estilo, e parece racional, que:

1.º *Sendo iguaes os tempos, as partes de cada um no lucro ou perda sejão proporcionaes ás entradas respectivas.*

2.º *Sendo iguaes as entradas, as quotas sejão proporcionaes aos tempos.*

Donde se póde concluir que em geral

3.º *Sendo tudo variavel, as quotas de lucro ou perda serão proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos.*

Assim a repartição do lucro ou perda sempre se reduz á uma applicação do problema geral: *dividir um numero dado em partes proporcionaes a* OUTROS TANTOS *numeros tambem dados.*

E o calculo segue a regra precedente (n. 149).

151. Seja 1.º exemplo o seguinte:

Associarão-se quatro pessoas para um negocio, entrando o 1º com rs. 1.500.000, o 2º com rs. 2.250.000, o 3º com rs. 1.800.000 e o 4º com rs. 3.450.000: lucrarão rs. 2.724.370 que tratão de repartir entre si.

Suppõe-se o tempo de emprego de fundos o mesmo para todos, e o lucro inteiramente liquido, estando já deduzidas despezas, commissão de gerencia, etc. Este lucro pois tem de ser dividido na proporção das entradas.

Eis o calculo:

Somma das 4 entradas 9.000.000

2.724.370 ÷ 9.000.000 = 0,302708

multiplicando este quociente por cada uma das entradas, temos:

1ª quota	= 0,302708	×	1.500.000	=	454.062
2ª »	= 0,302708	×	2.250.000	=	681.093
3ª »	= 0,302708	×	1.800.000	=	544.874
4ª »	= 0,302708	×	3.450.000	=	1.044.342
			Total a dividir	. . . .	2.724.371

A operação deste exemplo, em que os tempos são iguaes, toma o nome de *regra de companhia simples*. Seria o mesmo se as entradas fossem iguaes, e se repartisse o lucro na razão simples dos tempos.

Regra de companhia composta é aquella em que differem as entradas e os tempos, como no seguinte:

152. 2º exemplo. *Dous socios começarão uma especulação entrando o 1º com 7, o 2º com 5 contos de rèis; onze mezes depois admittirão 3º socio com 4 contos: e passados mais quinze mezes um 4º com 8 contos de rèis. No fim de tres annos liquidarão um prejuizo de rs. 5.209.200, que terão de ratear entre si.*

Sendo todas as entradas em numeros redondos, podemos tomar por unidade monetaria 1 conto de réis, e tomemos por unidade de tempo um mez.

Procuremos quanto tempo esteve empregada cada uma das entradas; vê-se das condições postas que

O 1° socio teve em gyro	7	por	36	mezes
2° » »	»	5	»	36	»
3° » »	»	4	»	25	»
4° » »	»	8	»	10	»

Logo (150, 3°) as quotas de prejuizo devem ser proporcionaes aos quatro productos $36 \times 7 = 252$, $5 \times 36 = 180$, $4 \times 25 = 100$, e $8 \times 10 = 80$.

Póde-se pois applicar a regra (149).

$$252 + 180 + 100 + 80 = 612$$
$$5.209.200 \div 612 = 8511,7647$$

Logo

1ª quota	8511,7647 × 252	=	2.144.965
2ª »	8511,7647 × 180	=	1.532.118
2ª »	8511,7647 × 100	=	851.176
4ª »	8511,7647 × 80	=	680.941
Perda total	. . . .		5.209.200

153. *Observação.* A multiplicação das entradas pelos tempos equivale a reduzir para todos a sociedade a uma unidade de tempo, um mez no exemplo precedente, ficando assim o caso convertido em uma regra de companhia simples.

Com effeito, o emprego de 7 contos por 36 mezes manifestamente equivale ao de 36 vezes 7 ou 252 por um mèz.

Ao 2º socio 5 contos por 36 mezes devem dar o mesmo resultado que 36 vezes 5, ou 180 contos por um mez.

Semelhantemente 4 contos por 25 mezes, e 8 por 10 mezes devem produzir o mesmo que 100 e 80 em um mez.

Dest'arte o problema proposto se póde reduzir ao seguinte, cuja solução ha de ser identica.

Os capitaes ou entradas 252, 180, 100, 80 associados por um mez derão o prejuizo de rs. 5.209.200 para ratear entre os quatro socios. Segue o calculo já feito.

154. As applicações da arithmetica ás questões industriaes e commerciaes offerecem muitas variantes e processos com diversos fins e denominações, como sejam a regra conjuncta, as de garantia, de rebates, de cambio indirecto, de recambios; as reducções de medidas, conversão de moedas, etc.

Não entramos nesses desenvolvimentos pelas razões apresentadas no prefacio deste opusculo; mas cremos que as doutrinas expostas são sufficientes para dirigir quem bem as comprehender, no estudo de quaesquer processos praticos, dependentes da sciencia dos numeros.

FIM