OPUSCULOS DE ARITHMETICA UNIVERSAL

EM OS QUAES SE COMPREHENDEM TODAS AS VERDADES UTEIS QUE ATEAGORA SE TEM DESCOBERTO NESTA SCIENCIA.

POR JOAÕ PEDRO FERREIRA CANGALHAS.

TOMO PRIMEIRO.

LISBOA NA OFFICINA DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS ANNO M.DCC.LXXXXIIII.

Com licença da Real Mesa da Commissaõ Geral sobre o Exame, e Censura dos Livros. (F.P.C.)

Foi taixado este Opusculo em papel a setecentos e vinte reis: Mesa 27 de Fevereiro de 1794.

Com tres Rubricas.

ADVERTENCIA.

Os numeros marginaes comprehendidos em parentheses indicaõ Lemmas.

Os numeros encerrados em parentheses, que estaõ dentro dos discursos, saõ os numeros marginaes, em que se achaõ as proposiçoens, que servem de premissas aos mesmos discursos.

Abreviaturas.	*Significaçoens.*
B.	Bezout.
Ar.	Arithmetica.
Al.	Algebra.
art.	Artigo.
hyp.	Hypothese.
sup.	Supposiçaõ, que he oppósta á these.
O Q. S. D.	O que se demostra.
O Q. S. P.	O que se pede.

OPUSCULO I.

THEORIA PRELIMINAR DOS NUMEROS INTEIROS.

Dos numeros inteiros em quanto pares, e impares.

(1) A SOMMA de dous, ou mais numeros, he divisivel exactamente por qualquer commum divisor exacto dos ditos numeros.

(2) A differença entre dous numeros desiguaes, he divisivel exactamente por qualquer commum divisor exacto dos ditos numeros.

(3) Logo a differença entre dous numeros desiguaes, nunca póde ser menor, que o maior commum divisor exacto dos ditos numeros.

(4) Se hum numero he divisor exacto de huma quantidade, e inexacto de outra, o dito numero he divisor inexacto da somma das ditas duas quantidades.

(5) Se hum numero he divisor exacto he huma quantidade, e inexacto de outra, o dito numero he divisor inexacto da differença entre as ditas quantidades.

6 Hum numero inteiro denomina-se *par* ou *impar*, conforme he, ou naõ divisivel exactamente por 2.

7 Segue-se, que „ o menor de todos os numeros impares he a unidade, e o menor de todos os numeros „ pares he 2. „

8 Segue-se dos art. 6, e 1, que „ a somma de nu-
„ meros pares he numero par. „

9 Segue-se dos art. 6, e 2, que „ a differença en-
„ tre numeros pares desiguaes he numero par. „

10 Segue-se dos art. 6, e 4, que „ a somma de par
„ com impar he impar. „

11 Segue-se dos art. 6, e 5, que „ a differença entre
„ par, e impar he impar. „

12 Sejaõ numeros pares a, e b; logo $a+1$, e $b+1$ saõ impares (10); mas $(a+1)+(b+1)=a+b+2$; logo (8) „ a somma de dous numeros impares he nu-
„ mero par. „

13 E porque $(a+1)-(b+1)=a-b$; logo (9)
„ a differença entre dous numeros impares desiguaes he
„ numero par. „

14 Segue-se dos art. 12, e 8, que „ a somma de hum
„ numero par de numeros impares he numero par. „

15 Segue-se dos art. 14, e 10, que „ a somma de
„ hum numero impar de numeros impares he numero im-
„ par. „

16 Da idéa da multiplicaçaõ, e do art. 8, se segue que „ o producto de par por par, ou de par por impar
„ ſempre he numero par. „

17 Logo „ nenhum numero impar póde ser multiplo
„ de numero par. „

18 Da idéa da multiplicaçaõ, e do art. 15, se segue que „ o producto de impar por impar sempre he impar. „

19 Logo ,, nenhum numero par póde ser o producto ,, de impar por impar. ,,

20 Segue-ſe dos art. 18, e 19, que ,, hum numero ,, impar ou he multiplo de impar, ou naõ he multiplo ,, de numero inteiro superior á unidade. ,,

21 Segue-se dos art. 18, e 17, que ,, se hum nume- ,, ro impar he multiplo de numero inteiro, os ſubmul- ,, tiplos do dito impar saõ numeros impares. ,,

22 Segue-se dos art. 16, e 18, que ,, os diversos mul- ,, tiplos impares de hum numero impar, saõ os diver- ,, sos productos, que resultaõ do dito impar, multiplica- ,, do separadamente por todos os numeros impares. ,,

23 Segue-se, que ,, todos os multiplos impares de hum ,, numero impar, sendo menores que o quadrado do dito ,, impar, saõ os productos, que resultaõ do mesmo im- ,, par, multiplicado separadamente por todos os numeros ,, impares, que lhes saõ inferiores. ,,

24 Logo ,, os multiplos impares de hum numero im- ,, par, que forem menores que o quadrado do dito im- ,, par, saõ comprehendidos na classe dos impares, que ,, saõ multiplos de impares, inferiores ao sobredito im- ,, par. ,,

25 Todo o numero impar, ou he o producto de im- par por impar, ou naõ he multiplo de numero inteiro (20); se he producto de impar por impar, eſtes facto- res ou saõ iguaes entre si, ou desiguaes entre si: pe- lo que ,, se hum numero impar naõ he quadrado de ,, impar, nem multiplo de impar, menor que a sua raiz

„ quadrada, o sobredito impar naõ he multiplo de nu-
„ mero inteiro superior á unidade.„

26 Da idéa da divisaõ, e dos art. 16, e 18, se segue, que „ se hum dividendo he numero par, e assim „ tambem o divisor, o quociente póde ser par ou impar; „ porém se o divisor he impar, entaõ o quociente he „ par, ou a divisaõ he inexacta.„

27 Deduz-se tambem, que „ se hum dividendo he numero impar, e assim tambem o divisor, o quociente „ he numero impar, ou a divisaõ he inexacta; porém se „ o divisor he par, entaõ a divisaõ he inexacta.„

28 Da idéa da potencia, e dos art. 16, e 18, se segue, que „ huma potencia inteira de numero inteiro, he „ numero par ou impar, conforme a raiz he numero par „ ou impar.„

29 Logo „ se a raiz de hum numero inteiro he numero inteiro, a dita raiz he numero par ou impar, „ conforme a potencia he numero par ou impar.„

30 Dos art. 7, e 13 se segue, que „ a serie ascendente de todos os numeros impares, he huma progressaõ arithmetica divergente, da qual o primeiro termo „ he a unidade, e a differença he 2.„

31 Suppondo agora, que u representa hum termo da dita serie, e que n expressa o *lugar* do dito termo; (ou o numero dos termos, que ha desde o primeiro athe u inclusivamente) temos $u = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ (B.Ar. art. 232): logo „ hum termo qualquer da serie dos numeros impares, he hum numero de huma unidade me-

„ nos, que o duplo do lugar do dito termo. „

32 Pois que $u = 2n - 1$; logo $n = \frac{u+1}{2}$; e por tanto „ o lugar de hum termo qualquer da serie dos „ numeros impares, he a semi-somma do dito termo „ com a unidade. „

33 Temos $u = 2n - 1$ (32); logo $(1 + 2n - 1) \times \frac{n}{2}$, ou n^2 he a somma da serie dos numeros impares (B. Al. art. 232): e por tanto „ a somma da serie „ natural dos numeros impares he o quadrado do nu- „ mero dos seus termos. „

34 Suppondo que a he hum numero inteiro qualquer, he $2a$ huma expressaõ geral de todos os numeros pares (16); logo $2a + 1$ he huma expressaõ geral de todos os numeros impares superiores á unidade (10): suppondo agora que n representa hum numero impar qualquer, he $n(2a + 1)$ huma expressaõ geral de todos os multiplos impares do impar n (22); logo $\frac{n(2a+1)+1}{2}$, ou $\frac{n+1}{2} + na$ he a expressaõ geral dos lugares de todos os multiplos impares do impar n na serie natural dos numeros impares (32). Suppondo agora $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, etc.

$$\text{he}\begin{cases}\frac{n+1}{2}+\ n \text{ o lugar de } (2\times1+1)\,n \text{ ou de } 3n\\ \frac{n+1}{2}+2n \qquad (2\times2+1)\,n \qquad 5n\\ \frac{n+1}{2}+3n \qquad (2\times3+1)\,n \qquad 7n\\ \frac{n+1}{2}+4n \qquad (2\times4+1)\,n \qquad 9n\\ \frac{n+1}{2}+5n \qquad (2\times5+1)\,n \qquad 11n\\ \text{etc.}\end{cases}$$

Pelo que ,, os termos da serie natural dos numeros ,, impares depois de n tomados de n em n termos, saõ ,, todos os multiplos impares de n. ,,

35 Segue-se que ,, se os numeros impares n, n', n'' ,, saõ taes, que collocados na serie dos numeros impares, ha de n a n' o mesmo numero de termos, ,, que ha de n' a n''; e he n' multiplô de n: tambem ,, n'' he multiplo de n. ,,

36 ,, Se a serie dos numeros impares for escrita em ,, columnas verticaes de hum numero n de termos cada ,, huma; r o lugar do impar a, na columna do lugar ,, m; $r+r'$ o lugar de hum multiplo de a na columna ,, do lugar $m+m'$: digo que o termo do lugar $r+2r'$,, da columna do lugar $m+2m'$, he multiplo de a. ,,

Dem. O termo do lugar r da columna do lugar m, he o termo do lugar $(m-1)\,n+r$ da serie dos numeros impares; o termo do lugar $r+r'$ da columna do lugar $m+m'$, he o termo do lugar $(m+m'-1)\,n+r$

$+r'$ da dita serie; e o termo do lugar $r+2r'$ da columna do lugar $m+2m'$ he o termo do lugar $(m+2m'-1)n+r+2r'$ da sobredita serie; e porque $((m+2m'-1)n+r+2r')-((m+m'-1)n+r+r')=((m+m'-1)n+r+r')-((m-1)n+r)=m'n+r'$; logo (35) o termo do lugar $r+2r'$ da columna do lugar $m+2m'$ he multiplo do termo do lugar r, da columna do lugar m. O Q. S. D.

37 Os tres precedentes art. servem para descobrir com facilidade os multiplos impares dos numeros impares: eis-aqui algumas applicaçoens.

Seja a serie dos numeros impares escrita em columnas de 50 termos cada huma; logo segundo o art. 32, o primeiro termo da segunda columna deve ser $2\times51-1=101$; o primeiro termo da terceira deve ser $2\times101-1=201$; o primeiro da quarta deve ser $2\times(50\times3+1)-1=301$; e por tanto, cada termo de huma columna excede ao seu correspondente da columna immediata para a esquerda em 100; esta propriedade contribue para escrever a serie com brevidade, e exacçaõ.

A expressaõ geral dos lugares dos multiplos de 3, comprehendidos na serie dos numeros impares, he $\frac{3+1}{2}+3n$ (34); logo $\frac{3+1}{2}+3\times17$, ou 53, he o lugar de hum multiplo de 3 na serie: e porque a primeira columna he de 50 termos; logo $53-50$ ou 3, he o lugar de hum multiplo de 3 na segunda columna: e pois que o impar 3 he o segundo termo da primeira columna; logo

(36) o quarto termo da terceira columna, o quinto da quarta, o sexto da quinta; e assim por diante, saõ multiplos de 3: logo (34) o termo quinto da primeira columna, sexto da segunda, septimo da terceira, e assim por diante, saõ multiplos de 3. Nada he pois mais facil, que descobrir os multiplos de 3 na serie dos numeros impares, sendo esta escrita em columnas de 50 termos cada huma.

A expressaõ geral dos lugares de todos os multiplos de 5, he $\frac{5+1}{2}+5n$ (34); sendo pois $n=10$, he $\frac{5+1}{2}+5\times10$, ou 53, o lugar de hum multiplo de 5 na serie dos numeros impares: e porque a primeira columna he de 50 termos; logo $53-50$ ou 3 he o lugar de hum multiplo de 5 na segunda columna; mas 3 he o lugar de 5 na primeira columna; logo (36) os multiplos de 5 saõ colocados em columnas horisontaes: logo (34) as columnas horisontaes 3.ª, 8.ª, 13.ª, 18.ª, etc. saõ formadas pelos numeros impares, que tem por divisor exacto o numero 5.

Discorrendo de semelhante modo se concluirá, que os termos 3.° da 2.ª columna, 2.° da 3.ª, 1.° da 4.ª saõ multiplos de 7; assim tambem, 11.° da 1.ª, 10.° da 2.ª, 9.° da 3.ª, e 8.° da 4.ª, etc. saõ multiplos de 7. He pois taõ facil descobrir os numeros impares, que saõ multiplos de 7, como os que saõ multiplos de 3.

Discorrendo ainda da mesma sorte se achará, que os termos 6.° da 1.ª columna, 5.° da 3.ª, 4.° da 5.ª, e 3.° da

7.ª

7.ª, etc. saõ divisiveis exactamente por 11; e que os termos 17.º da 1.ª, 16.º da 3.ª, 15.º da 5.ª, e 14.º da 7.ª etc., saõ tambem multiplos de 11: e que saõ tambem multiplos de 11 os termos 11.º da 2.ª, 10.º da 4.ª, 9.º da 6.ª etc.: e por tanto he mui facil descobrir os multiplos de 11.

Finalmente, por meio dos principios, de que nos temos valido para a investigaçaõ dos multiplos impares de 3, 5, 7, e 11, se descobriráõ methodos espeditos para achar os multiplos impares de outros quaesquer numeros impares.

38 Segue-se dos art. 7, e 9 que,, os productos, que ,, resultaõ dos termos da serie dos numeros naturaes mul- ,, tiplicados por 2, constituem a serie ascendente de to- ,, dos os numeros pares.,,

39 E porque os termos 1.º, 3.º, 5.º, etc. da serie dos numeros naturaes constituem a serie dos numeros impares; logo ,, os termos 1.º, 3.º, 5.º, 7.º, etc. da serie diver- ,, gente de todos os numeros pares, sendo divididos por ,, 2, os quocientes, que resultaõ constituem a ſerie dos ,, numeros impares.,,

40 E porque os termos 2.º, 4.º, 6.º, 8.º, etc. da serie dos numeros naturaes constituem a serie dos numeros pares; logo ,, os termos 2.º, 4.º, 6.º, 8.º, &c., da serie diver- ,, gente de todos os numeros pares, sendo divididos por ,, 2, os quocientes constituem a ſerie dos numeros pares.,,

41 Hum numero par denomina-se *parmenteimpar*, ou *parmentepar*, conforme he numero impar ou par, o

quociente, que delle resulta sendo dividido por 2.

42 Finalmente, suppondo que a representa cifra, ou qualquer numero inteiro, he $2a+1$ a expressaõ geral de todos os numeros impares (16, e 10); logo $2(2a+1)$ representa qualquer numero parmenteimpar, e $2^n(2a+1)$ representa qualquer numero parmentepar.

Dos numeros inteiros em quanto primeiros entre si.

(43) SEJA $\frac{bd}{a}=d'$; logo $bd=ad'$; logo $d:a=d':b$ (B. Ar. art. 180); suppondo agora $d<a$, he $d'<b$; e por tanto, ſe $d<a$, he $\frac{bd}{a}<b$.

(44) Seja $a:b=a':b'$, e $a'=an+d$; logo $a:b=(an+d):b'$, logo $b'=(an+d)b:a$ (B.Ar.art.179.), ou $b'=bn+\frac{bd}{a}$: suppondo agora $d<a$, he $\frac{bd}{a}<b$ (43); e por tanto, ſe $a:b=a':b'$, $a'=an+d$, e $d<a$; temos $b'=bn+d'$, em que he $d'<b$.

Advertencia. Damos o nome de *razaõ numerica* á razaõ, cujos termos ſaõ numeros inteiros: e damos o nome de *razaõ irreduzivel* á razaõ numerica, que naõ se póde expressar por menores termos em numeros inteiros.

(45) Se $a:b=a':b'$, $a:b$, e $a':b'$ saõ numericas, $a'>a$, e $a:b$ irreduzivel: digo que a', e b' saõ respectivamente equimultiplos de a, e b.

Dem. Pois que $a' > a$ (hyp.); logo a' he multiplo de a, ou $a' = a\,n + d$, em que n, e d, saõ numeros inteiros, e $d < a$. Se a' he multiplo de a, os numeros a', e b' saõ equimultiplos respectivamente de a, e b; pois que $a : b = a' : b'$ (hyp.): logo para provar que a', e b' saõ equimultiplos respectivamente de a, e b, basta provar que naõ póde ser $a' = a\,n + d$. O Q. S. D.

Se he possivel que seja $a' = a\,n + d$, temos $b' = b\,n + d'$, em que $d' < b$ (44): por ser $a' = a\,n + d$, e $b' = b\,n + d'$ (sup.), e $a : b = a' : b'$ (hyp.), temos $a : b = (a\,n + d) : (b\,n + d')$; e porque $a : b = a\,n : b\,n$ (B.Ar.art. 170); logo $(a\,n + d) : (b\,n + d') = a\,n : b\,n$; logo (B.Ar. art. 185) $(a\,n + d - a\,n) : (b\,n + d' - b\,n) = a\,n : b\,n$; mas $a\,n + d - a\,n = d$, e $b\,n + d' - b\,n = d'$; logo $d : d' = a\,n : b\,n$; e porque $a : b = a\,n : b\,n$ (B. Ar. art. 170); logo $d : d' = a : b$; mas d, e d' saõ numeros inteiros, e respectivamente menores que a, e b (sup.); logo $a : b$ naõ he irreduzivel; mas esta consequencia destróe a hyp.; logo naõ póde ser $a' = a\,n + d$. O Q. S. D.

(46) Segue-se que se $a : b = a' : b'$, $a : b$, e $a' : b'$ saõ numericas, e he $a : b$ irreduzivel, he a divisor exacto de a', e b de b'.

Advertencia. Por *medida* ou *divisor* de hum numero inteiro entende-se hum numero inteiro maior que a unidade, e divisor exacto do outro numero inteiro.

47 Dous ou mais numeros inteiros denominaõ-se *compóstos entre si*, ou *primeiros entre si*, conforme tem, ou naõ divisor commum. Quando se diz que hum numero

he *primeiro* com outro, entende-se que os ditos numeros saõ primeiros entre si.

48 Segue-se que „ se dous numeros saõ primeiros en-„ tre si, e maiores que a unidade, naõ póde ser hum „ divisor do outro. „

49 Segue-se dos art. 45, e 47 que „ os termos de hu-„ ma razaõ numerica, que naõ he irreduzivel, saõ com-„ póstos entre si. „

50 „ Se $a:b$ he irreduzivel: digo que a, e b saõ pri-„ meiros entre si. „

Dem. Se a, e b naõ saõ primeiros entre si, seja d divisor de a, e b, e seja $a:d=m$, e $b:d=n$; logo $a:b=m:n$ (B. Ar. art. 170); mas m, e n saõ numeros inteiros, e respectivamente menores que a, e b (sup.); logo $a:b$ naõ he irreduzivel; mas esta consequencia destróe a hyp.; logo a, e b saõ primeiros entre si. O Q. S. D.

51 „ Se os termos de huma razaõ saõ primeiros en-„ si: digo que a dita razaõ he irreduzivel. „

Dem. Se a razaõ naõ he irreduzivel, os seus termos saõ compóstos entre si (49); mas esta consequencia destróe a hyp.; logo se os termos de huma razaõ, etc. O Q. S. D.

52 Segue-se dos art. 50, e 51, que „ o mesmo he di-„ zer, que huma razaõ he irreduzivel, que dizer, que os „ seus termos saõ primeiros entre si: e dizer que dous nu-„ meros saõ primeiros entre si, he o mesmo que dizer, „ que a razaõ entre os ditos numeros he irreduzivel. „

(53) Se o primeiro termo de huma serie, he divisor exacto do segundo, o segundo do terceiro, o terceiro do

quarto, e assim por diante: digo que o primeiro termo, he divisor exacto de cada hum dos outros termos.

54 „Se $a:b$ he irreduzivel, e he c diviſor de a: di„go que $b:c$ he irreduzivel.„

Dem. Se $b:c$ naõ he irreduzivel, seja d divisor de c, e b; e porque c he divisor de a (hyp.); logo d he divisor de a, e b, o que destróe a hyp.; e por tanto, $b:c$ he irreduzivel. O Q. S. D.

55 „Se $a:c$, e $b:c$ saõ irreduziveis: digo que $ab:c$ „ he irreduzivel.„

Dem. Se $ab:c$ naõ he irreduzivel, seja d divisor de ab, e c, e seja $ab:d=m$; logo m he numero inteiro, e $ab=dm$; logo $a:d=m:b$ (B. Ar. art. 180): he $a:c$ irreduzivel (hyp.), e d divisor de c (sup.); logo $a:d$ he irreduzivel (54); e porque temos achado $a:d=m:b$; logo d he divisor de b (46); mas d he divisor de c (sup.); logo d he divisor de b, e c; mas esta consequencia deſtróe a hyp.; logo $ab:c$ he irreduzivel. O Q. S. D.

56 Segue-se que „ se os termos de huma serie saõ „ primeiros com hum certo numero, este numero he pri„ meiro com o producto de quaesquer termos da dita se„ rie.„

57 Logo „ se cada termo de huma serie he primeiro „ com cada termo de outra, tambem o producto de quaes„ quer termos de huma serie, he primeiro com o pro„ ducto de quaesquer termos da outra.„

58 Segue-se do art. 56, que „ se dous numeros saõ

„ primeiros entre si, tambem qualquer delles he primei-
„ ro com qualquer potencia inteira do outro.„

59 Segue-se do art. 57, que „ se dous numeros saõ „ primeiros entre si, tambem qualquer potencia inteira „ de hum, he primeiro com qualquer potencia inteira „ do outro.„

60 Segue-se dos art. 58, e 56, que „ se os termos, „ de huma serie saõ primeiros com hum certo numero „ tambem qualquer potencia inteira do dito numero, he „ hum numero primeiro com o producto de quaesquer „ termos da dita serie.„

61 Segue-se tambem dos art. 58, e 56, que „ se os „ termos de huma serie saõ primeiros com hum certo nu- „ mero, tambem este numero he primeiro com o produ- „ cto de quaesquer potencias inteiras dos termos da di- „ ta serie.„

62 Segue-se dos art. 61, e 58, que „ se os termos „ de huma serie saõ primeiros com hum certo numero „ tambem qualquer potencia inteira deste numero, he hum „ numero primeiro com o producto de potencias inteiras „ de quaesquer termos da dita serie.„

63 Segue-se dos art. 61, e 56, que „ se cada termo „ de huma serie he primeiro com cada termo de outra, „ tambem o producto de quaesquer termos de huma serie, „ he primeiro com o producto de potencias inteiras de „ quaesquer termos da outra serie.„

64 Segue-se dos art. 62, e 56, que „ se cada termo „ de huma serie he primeiro com cada termo de outra, „ tambem hum producto de potencias inteiras de quaes-

,, quer termos de huma das series , he primeiro com o
,, producto de potencias inteiras de quaesquer termos da
,, outra serie . ,,

65 Dos art. 59 , e 48 se segue , que ,, se dous numeros saõ primeiros entre si , e maiores que a unidade , ,, nenhuma potencia inteira de hum he medida de potencia inteira do outro . ,,

Finalmente , combinando cada hum dos art. 55 , 56 , 57 , 58 , 60 , 61 , 62 , 63 , e 64 com o art. 48 , se inferem outras tantas propriedades semelhantes á precedente.

Dos numeros inteiros em quanto primos , e compóstos em si .

66 HUM numero inteiro denomina-se *composto* ; ou *primo* , conforme tem , ou naõ divisor .

67 Segue-se dos art. 66 , e 6 , que ,, todo o numero ,, primo , excepto o primo 2 , he numero impar , e que ,, todo o numero par , excepto 2 , he numero composto . ,,

68 Segue-se do art. 66 , que ,, todo o numero composto he o producto de dous , ou mais numeros primos , ,, e que tem por divisor algum numero primo superior ,, á unidade . ,,

69 Segue-se dos art. 66 , e 20 , que ,, todo o numero ,, impar , que naõ he multiplo de impar , he numero ,, primo . ,,

70 Segue-se dos art. 66 , e 25 , que ,, todo o numero

„ impar, que naõ he quadrado de impar, nem multiplo „ de impar menor que a sua raiz quadrada, he numero „ primo. „

71 Suppondo que n representa hum numero inteiro qualquer, que a he numero composto, e que $b = o$, ou numero inteiro menor que a, he $an + b$ huma expressaõ geral de todos os numeros inteiros, que naõ saõ menores que a. Se $b = o$, o numero, que compete á fórma $an + b$ he composto. Se d he divisor de a, e b, e he $a : d = a'$, e $b : d = b'$, temos $a = a'd$, e $b = b'd$; logo $an + b = d(a'n + b')$; e por tanto, o numero, que compete á fórma $an + b$, he composto, se a, e b saõ compóstos entre si. Se d' he medida de n, e b, e he $n : d' = n'$, e $b : d' = c$, temos $n = d'n'$, e $b = cd'$; logo $an + b = d'(an' + c)$; e por tanto, o numero, que compete á fórma $an + b$, em que $a : b$ he irreduzivel, póde ser composto. De tudo se conclue, que „ todo o numero, que „ compete á fórma $an + b$, em que a he numero com- „ posto, $b = o$, ou em que a, e b saõ compóstos entre „ si, he numero composto; e se $a : b$ he irreduzivel, „ ainda naõ se póde affirmar, que he primo, o numero, „ que compete á fórma $an + b$, sem embargo de que „ todo o numero primo superior a a, compete neces- „ sariamente á fórma $an + b$, em que $a : b$ he irredu- „ zivel. „

Pelo que, todo o numero, que compete a qualquer das fórmas $6n$, $6n + 2$, $6n + 3$, $6n + 4$, he composto; e todo o numero primo, compete a huma das fórmas

$6n$

$6n+1$, e $6n+5$; mas nem todos os numeros, que competem a qualquer destas fórmas saõ primos.

72 Suppondo que se póde assignar o maior de todos os numeros primos, seja este representado por n, e seja n, n', n'', n''', etc. a serie convergente de todos os numeros primos athe terminar em 2; logo $n.n'.n''.n'''$. etc. $+ 1$ deve ser numero composto; logo $n.n'.n''.n'''$. etc. $+ 1$ deve ter por divisor algum dos factores de $n.n'.n''$. etc. (68); mas $n.n'.n''.n'''$. etc. $+ 1$ naõ he multiplo de nenhum daquelles factores; logo $n.n'.n''.n'''$. etc. $+ 1$ he numero primo; e por tanto, „ naõ se póde assignar numero primo, que seja o „ maior possivel, e o numero dos numeros primos he „ inassignavel. „

73 Pois que os productos, que resultaõ de hum numero primo multiplicado pelos diversos numeros inteiros, saõ numeros compóstos; logo „ o numero dos „ numeros compóstos he inassignavel, ainda relativa- „ mente ao numero dos numeros primos. „

74 Segue-se dos art. 66, e 48, que „ se hum nu- „ mero primo naõ he divisor de hum numero inteiro, „ o dito numero primo he primeiro com o dito nu- „ mero inteiro. „

75 Logo „ os numeros primos desiguaes saõ pri- „ meiros entre si. „

76 Segue-se dos art. 75, 55, e 56, que „ o pro- „ ducto de dous ou mais numeros primos, he pri- „ meiro com qualquer outro numero primo. „

77 Segue-se dos art. 75, e 57, que „ o producto „ de numeros primos, he primeiro com o producto de „ outros numeros primos. „

78 Segue-se dos art. 75, e 58, que „ hum numero „ primo he primeiro com qualquer potencia inteira de „ outro numero primo. „

79 Segue-se dos art. 75, e 59, que „ huma potencia inteira de hum numero primo, he hum numero „ primeiro com qualquer potencia inteira de outro numero primo. „

80 Segue-se dos art. 75, e 60, que „ o producto „ de dous ou mais numeros primos, he numero primeiro com qualquer potencia inteira de outro qualquer numero primo. „

81 Segue-se dos art. 75, e 61, que „ o producto „ de potencias inteiras de dous ou mais numeros primos, he hum numero primeiro com qualquer outro „ numero primo. „

82 Segue-se dos art. 75, e 62, que „ o producto „ de potencias inteiras de dous ou mais numeros primos, he numero primeiro com qualquer potencia inteira de outro numero primo. „

83 Segue-se dos art. 75, e 63, que „ o producto „ de potencias inteiras de dous ou mais numeros primos, he numero primeiro com o producto de outros „ quaesquer numeros primos. „

84 Segue-se dos art. 75, e 64, que „ o producto „ de potencias inteiras de numeros primos, he numero

„ primeiro com o producto de quaesquer potencias in-
„ teiras de outros quaesquer numeros primos. „

85 Segue-se dos art. 76, e 48, que „ o producto „ de numeros primos naõ tem por divisor nenhum „ outro numero primo. „

(86) Se hum numero naõ he divisor exacto de outro, este numero naõ he divisivel exactamente por nenhum multiplo daquelle.

87 Segue-se dos art. 85, e 86, que „ o producto „ de dous ou mais numeros primos, naõ tem por divisor nenhum multiplo de outro numero primo. „

88 Segue-se, que „ dous numeros saõ desiguaes en- „ tre si, quando algum numero primo he divisor de „ hum delles, e naõ he do outro. „

89 Sejaõ numeros inteiros a, b, c, m, e n, e seja c numero primo, sem que elle seja divisor de a, nem de b; logo bc^n naõ he medida de a (86): temos $a : bc^n = (a \times c^m) : (bc^n \times c^m)$ (B. Ar. art. 88); mas $bc^n \times c^m = bc^{m+n}$ (B. Al. art. 20); logo $(ac^m) : (bc^{m+n}) = a : bc^n$; e porque bc^n naõ he medida de a; logo bc^{m+n} naõ he medida de ac^m: e por tanto „ se „ hum numero primo he mais vezes factor em hum „ numero composto, que em outro composto, este nu- „ mero composto naõ tem por medida o outro com- „ posto. „

90 Logo „ dous numeros compóstos saõ desiguaes „ entre si, quando algum numero primo he mais vezes „ factor em hum, que no outro composto. „

91 Segue-se dos art. 88, e 90, que „ dous nume-
„ ros compóstos naõ saõ iguaes entre si, se naõ quan-
„ do existem juntas estas circumstancias : que sejaõ
„ tantos os diversos numeros primos factores de hum,
„ como os diversos do outro : que os diversos nume-
„ ros primos factores de hum, sejaõ respectivamente
„ iguaes aos diversos numeros primos factores do ou-
„ tro composto : e que se huma certa potencia inteira
„ de hum numero primo for divisor de hum com-
„ posto, esta mesma potencia deve ser divisor do ou-
„ tro composto. „

92 Pelo que „ se o producto de alguns numeros pri-
„ mos for igual a hum numero composto, este nume-
„ ro composto só tem por factores primos, ou por di-
„ visores primos, aquelles mesmos numeros primos, que
„ se multiplicaraõ entre si. „

93 „ Methodo para achar os numeros primos, os
„ compóstos impares, e o menor factor, ou divisor pri-
„ mo de cada hum dos ditos compóstos. „

Escreva-se a serie dos numeros impares em colum-nas verticaes de 50 termos cada huma, e á direita de cada columna deve haver outra em branco, para se as-sentarem os factores, ou divisores primos : ás columnas em branco chamaremos *columnas dos factores*.

Busquem-se depois todos os multiplos de 3, pelo methodo dado no art. 37, e escreva-se 3 á direita dos seus multiplos, e á medida que elles se forem desco-brindo. Os numeros 5, e 7, por serem medios entre 3, e 3^2, ou 9, saõ numeros primos.

Busquem-se depois por meio do art. 37 todos os multiplos de 5, que he o primo immediato superior a 3, de que se tem achado os multiplos: escreva-se na columna dos factores o numero 5, á direita dos seus multiplos, e á medida que elles se descobrirem. Como já conhecemos todos os multiplos de 3, e os de 5, podemos affirmar (70) que os numeros 7, 11, 13, 17, 19, e 23 saõ primos; pois que estes numeros saõ medios entre 5, e 5×5, e nenhum delles he multiplo de 3.

Busquem-se depois por meio do art. 37 todos os multiplos de 7, que he o primo immediato a 5, de que já se buscaraõ os multiplos, e escreva-se 7 nas columnas dos factores á direita de cada hum dos seus multiplos, e á medida que elles se acharem. Agora já conhecemos (70) que os numeros 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, e 47 saõ numeros primos; pois que além de serem medios entre 7, e 7×7, nenhum delles he multiplo de impar menor que 7.

Pois que o nosso fim he descobrir o menor factor primo de cada hum dos numeros compóstos, naõ devemos escrever á direita de hum numero composto nenhum submultiplo, depois de se ter já assentado outro.

Em attençaõ ao art. 24, devemos principiar a indagaçaõ dos multiplos de hum numero primo, pelo quadrado do dito primo.

Continuando, finalmente, a operaçaõ de buscar todos os multiplos de hum numero primo immediato superior áquelle, de que se tenha acabado de buscar os seus multiplos, principiando a indagaçaõ dos multiplos pelo quadrado do primo, que se contemplar, e escrevendo nas columnas dos factores o dito primo á direita dos seus multiplos, á excepçaõ dos que forem multiplos de primo inferior ao dito contemplado, se ficaráõ conhecendo os numeros primos, os compóstos impares, e se conhecerá o menor factor primo de cada hum dos ditos compóstos.

A razaõ deste methodo consiste nos art. 37, 70, e 24, que no mesmo methodo ficaõ citados.

94 „ Methodo para achar as expressões dos nu-
„ meros compóstos impares em factores primos, depois
„ de se conhecer o menor factor primo de cada nu-
„ mero composto. „

Divida-se cada numero composto pelo seu menor factor primo, principiando a operaçaõ pelo menor numero composto, e passando depois ao composto immediato superior; e assim por diante. Se o quociente for numero primo, indique-se o producto do divisor pelo quociente, e se terá a expressaõ, que se busca: se o quociente for numero composto, se terá já a expressaõ do dito quociente em factores primos; pois que consideramos os numeros compóstos tomados consecutivamente desde o menor, e na sua serie ascendente; e por isso naõ ha mais do que aggregar o divisor á expressaõ do quociente, em qualidade de factor: por exemplo, se o numero composto he 15, de que o menor factor he 3, temos $15:3=5$; e porque 5 he numero primo; logo 3.5 he a expressaõ de 15 em factores primos: se o numero composto he 45, de que o menor factor primo he 3, temos $45 : 3 = 15$; e porque $15 = 3.5$; logo $45 = 3^2.5$, ou $3^2.5$ he a expressaõ de 45 em factores primos.

95 ,, Methodo para achar as expressões dos nu-
,, meros compóstos pares, ou dos numeros pares supe-
,, riores á 2, em factores primos, tendo-se as taboadas
,, dos numeros primos, e as das expressões dos com-
,, póstos impares em factores primos.,,

Segundo o art. 39, aggregando aos termos da serie dos numeros impares o numero 2 em qualidade de factor, e sendo os impares compóstos expressados em factores primos, tem-se as expressões dos numeros parmenteimpares em factores primos; por exemplo, assim como $3, 5, 7, 3^2, 11, 13, 3.5, 17, 19, 3.7, 23, 5^2, 3^3$, etc. he a serie dos numeros impares, sendo os compóstos expressados em factores primos, igualmente he $2.3, 2.5, 2.7, 2.3^2, 2.11, 2.13, 2.3.5, 2.17, 2.19, 2.3.7, 2.23, 2.5^2, 2.3^3$, etc. os numeros parmenteimpares expressados em factores primos, ou os termos 3.°, 5.°, 7.°, 9.°, etc. da serie dos numeros pares.

Segundo o art. 40, para se haverem as expressões dos numeros parmentepares em factores primos, ou dos termos 2.°, 4.°, 6.°, 8.°, etc. da serie dos numeros pares, naõ ha mais do que aggregar o numero 2 em qualidade de factor, ás expressões dos numeros pares, tomados consecutivamente desde 2 na sua ordem natural ascendente.

Dos numeros inteiros em quanto divisores.

(96) No actual systema de numeraçaõ fórma-se constantemente de cada dez unidades iguaes entre si, huma nova unidade; e por isso $1, 10, 10\times 10, (10\times 10)\times 10$, etc., ou $10^0, 10^1, 10^2, 10^3$, etc. he a serie das unidades do actual systema de numeraçaõ, (que se denomina *systema decimal*) tomadas consecutivamente desde a primitiva; logo suppondo que $m = 0$, ou numero inteiro, temos que 10^m he huma expressaõ geral, ou fórmula de qualquer unidade do dito systema.

Pois que no mesmo systema, se toma cada unidade desde huma athe nove vezes, para se haverem as diversas casas dos numeros inteiros; segue-se, que representando por A, aquellas vezes, ou o valor absóluto do algarismo, temos $A\times 10^m$ por expressaõ geral de todas as casas de hum numero inteiro, sendo $m + 1$ o numero cardinal, que corresponde ao ordinal, que expressa o lugar da casa; por exemplo, se $m+1=1$, he $A\times 10^m$ a expressaõ da casa das unidades, ou da primeira casa da direita; se $m+1=2$, he $A\times 10^m$ a expressaõ da segunda casa, ou casa das dezenas: finalmente, $A\times 10^m$ he expressaõ de casa impar, ou par, conforme m he numero par, ou impar.

97 Segue-se dos art. 96, e 53, que „ a unidade de

„ huma

,, huma casa he divisor de qualquer das casas para a ,, esquerda.,,

98 Segue-se dos art. 97, e 1, que ,, a unidade de ,, huma casa he divisor da totalidade de todas as ,, casas, que ha desde a primeira da esquerda athe á ,, dita casa inclusivamente.,,

99 Segue-se dos art. 98, e 53, que ,, se hum nu- ,, mero he divisor da unidade de huma casa, o dito ,, numero he divisor da totalidade de todas as casas, ,, que ha desde a primeira da esquerda athe á dita ,, casa inclusivamente.,,

100 Segue-se dos art. 99, e 1, que ,, se hum numero ,, he divisor da unidade de huma casa de hum numero ,, inteiro, e da totalidade das casas, que estaõ á direita ,, da dita casa, ou esta totalidade he nada, este nume- ,, ro inteiro he divisivel exactamente pelo outro nume- ,, ro.,,

101 Segue-se dos art. 99, e 4, que ,, se hum nu- ,, ro he divisor da unidade de huma casa de hum nu- ,, mero inteiro, e naõ he divisor da totalidade das ca- ,, sas, que estaõ á esquerda da dita casa, este numero ,, inteiro naõ he divisivel exactamente pelo outro nu- ,, mero.,,

102 He $10=2\times5$; logo $10^m=2^m\times5^m$ (B. Al. art. 123); logo $\frac{10^m}{2^m}=5^m$; logo 2^m he divisor da unidade da casa do lugar $m+1$; logo segundo os art. 100, e 101 temos, que ,, hum numero inteiro he, ou naõ di-

,, visivel exactamente por 2^m, confórme a totalidade ,, de hum numero m de casas contadas da primeira ,, da direita, he ou naõ divisivel exactamente por 2^m.,,

Logo ,, hum numero inteiro naõ he divisivel exa- ,, ctamente por 2, senaõ quando o algarismo da casa ,, das unidades he 0, ou algarismo par.,,

Segue-se tambem, que ,, hum numero inteiro naõ he ,, divisivel exactamente por 2^2, ou 4, senaõ quando a ,, totalidade da primeira, e segunda casa da direita he ,, nada, ou divisivel exactamente por 4.,,

Segue-se igualmente, que ,, hum numero inteiro naõ ,, he divisivel exactamente por 2^3, ou 8, senaõ quando ,, a totalidade da 1.ª, 2.ª, e 3.ª casa da direita he na- ,, da, ou divisivel exactamente por 8.,,

103 Discorrendo como no art. precedente se conclue, que ,, hum numero inteiro naõ he divisivel exacta- ,, mente por 5^m, senaõ quando a totalidade de hum ,, numero m de casas contadas da primeira da direita, ,, he nada, ou divisivel exactamente por 5^m.,,

Logo ,, hum numero inteiro naõ he divisivel exa- ,, ctamente por 5, senaõ quando o algarismo da casa ,, das unidades he 0, ou 5.,,

Segue-se tambem, que ,, hum numero inteiro naõ he ,, divisivel exactamente por 5^2, ou 25, senaõ quando a ,, totalidade da 1.ª, e 2.ª casa da direita he nada, ou ,, divisivel exactamente por 25.,,

Segue-se naõ menos, que ,, hum numero inteiro ,, naõ he divisivel exactamente por 5^3, ou 125, senaõ

,, quando a totalidade da 1.ª, 2.ª, e 3.ª casas da direi-
,, ta he nada, ou divisivel exactamente por 125.,,

(104) He $(a+b)^m = a\left(a^{m-1} + m.a^{m-2}b + \frac{m(m-1)}{2} \times a^{m-3}b^2 + \text{etc.}\right) + b^m$ (B. Al. art. 149); se a, b, e m saõ numeros inteiros, he $\left(a^{m-1} + m.a^{m-2}b + \text{etc.}\right)$ numero inteiro; logo $(a+b)^m$ compete á fórma $an + b^m$, em que n he numero inteiro; logo sendo A numero inteiro, a quantidade $A(a+b)^m$ compete á fórma $an + Ab^m$.

105 He $10 = 3 \times 3 + 1$; logo $A \times 10^m = A(3 \times 3 + 1)^m$; logo $A \times 10^m = (3.3)n + A \times 1^m$ (104); e porque $1^m = 1$, e $(3.3)n = 3 \times 3n$; logo $A \times 10^m$ compete á fórma $3n + A$; e por tanto, huma casa qualquer de hum numero inteiro, he hum multiplo de 3, e mais o valor absoluto do seu algarismo; logo segundo os art. 1, e 4 ,, hum numero inteiro naõ he divisi-
,, vel exactamante por 3, senaõ quando a somma dos
,, valores absolutos dos seus algarismos he divisivel
,, exactamente por 3.,,

106 Discorrendo como no art. precedente se conclue, que ,, hum numero inteiro naõ he divisivel exa-
,, ctamente por 9, senaõ quando a somma dos valores
,, absolutos dos seus algarismos he divisivel exactamen-
,, te por 9.,,

107 He $10 = 11 - 1$; logo $A \times 10^m = A(11-1)^m$; logo (104) he $A \times 10^m = 11n + A(-1)^m$; e porque $(-1)^m$ he $+1$, ou -1 conforme m he numero par,

ou impar (B.Al. art. 24) ; logo $A \times 10^m$ compete á fórma $11n + A$, ou á fórma $11n - A$ conforme m he par, ou impar ; mas quando m he par, a casa he impar, e quando m he impar a casa he par (96) ; logo huma casa impar he hum multiplo de 11, e mais o valor absoluto do seu algarismo, e huma casa par he hum multiplo de 11, menos o valor absoluto do seu algarismo ; logo segundo os art. 1, 2, 4, 5 temos „ que „ hum numero inteiro naõ he divisivel exactamente por „ 11, senaõ quando a somma dos valores absolutos „ dos algarismos das casas impares, menos a somma „ dos valores absolutos dos das casas pares, for nada, „ ou divisivel exactamente por 11. „

108 He $10 = 7 + 3$; logo $A \times 10^m = A(7+3)^m$; logo (104) he $A \times 10 = 7n + A \times 3^m$; e porque temos

$$\begin{array}{l|l}
3^0 = +1 & 3^3 = (7+2) \times 3 = 7 \times 4 - 1 \\
3^1 = +3 & 4^4 = (7 \times 4 - 1) \times 3 = 7 \times 12 - 3 \\
3^2 = 7 + 2 & 3^5 = (7 \times 12 - 3) \times 3 = 7 \times 35 - 2
\end{array}$$

$$3^6 = (7 \times 35 - 2) \times 3 = 7 \times 104 + 1$$

etc.

$$\text{Logo} \begin{cases}
A \times 10^0 \text{ compete á fórma} & A \\
A \times 10^1 & 7n + 3A \\
A \times 10^2 & 7n + 2A \\
A \times 10^3 & 7n - A \\
A \times 10^4 & 7n - 3A \\
A \times 10^5 & 7n - 2A \\
A \times 10^6 & 7n + A \\
\text{etc.} &
\end{cases}$$

Logo segundo os art. 1, 2, 4, e 5 para se conhecer se hum numero inteiro he, ou naõ divisivel exactamente por 7, deve-se practicar a seguinte operaçaõ.

1.° Divida-se o numero proposto da direita para a esquerda em classes ternarias: 2.° multipliquem-se os valores absolutos dos algarismos 1.°, 2.°, e 3.° de cada classe respectivamente pelos numeros 1, 3, e 2: 3.° sommem-se todos os productos, tomando positivamente os das classes impares, e negativamente os das classes pares, entaõ se o resultado for nada, ou divisivel exactamente por 7, o numero proposto he divisivel exactamente por 7; porém se o dito resultado naõ for divisivel exactamente por 7, o sobredito numero proposto naõ he divisivel exactamente por 7.

109 Discorrendo como no art. precedente se conclue, que para se conhecer se hum numero inteiro proposto he, ou naõ divisivel exactamente por 13, devese practicar a ſeguinte operaçaõ.

1.° Divida-se o numero proposto da direita para a esquerda em classes ternarias: 2.° multipliquem-se os valores absolutos dos algarismos 1.°, 2.°, e 3.° de cada classe, respectivamente pelos numeros 1, 10, e 9: 3.° sommem-se todos estes productos, tomando-se positivamente os das classes impares, e negativamente os das classes pares; entaõ se o resultado for nada, ou divisivel exactamente por 13, o numero proposto he divisivel exactamente por 13; porém se o dito resultado naõ for divisivel exactamente por 13, o sobredito numero naõ tem por divisor o numero 13.

110 Segue-se dos art. 85, 87, e 89 que „ hum numero inteiro naõ tem por divisores senaõ os numeros „ primos seus factores, e os productos de dous, ou „ mais daquelles mesmos numeros primos, naõ sendo „ nenhum delles mais vezes factor em nenhum dos productos, que no sobredito numero inteiro. „

111 Logo „ os divisores de dous, ou mais numeros inteiros propóstos, naõ saõ senaõ os numeros primos factores communs dos ditos numeros propóstos, „ e os productos de dous, ou mais daquelles mesmos „ numeros primos, naõ sendo nenhum delles mais vezes factor em nenhum dos productos, que em qualquer dos sobreditos numeros propóstos. „

112 Logo „ o maior commum divisor de dous, ou „ mais numeros propóstos, he o producto de todos os „ numeros primos factores communs dos ditos numeros „ propóstos, naõ sendo nenhum daquelles numeros primos mais vezes factor no dito producto, que em „ qualquer dos sobreditos numeros propóstos, e que „ nenhum dos ditos prímos seja menos vezes factor no „ dito producto que no numero proposto, em que o „ mesmo primo for menos vezes factor. „

113 Pelo que „ o mair commum divisor de dous, ou „ mais numeros he divisivel exactamente por qualquer „ outro commum divisor dos mesmos numeros. „

114 Segue-se tambem, que „ se d he o maior divisor de a, e b, e he $a:r$ irredusivel; he d o maior „ divisor de a, e br. „

115 Segue-se naõ menos, que „ se d he o maior „ divisor de a, e b, se $a:r$ he irreduzivel, e se r he „ divisor de b; he d o maior divisor de a, e $\frac{b}{r}$. „

116 „ Se d he o maior divisor de a, e b, e he $\frac{a}{d}$ „ $= a'$, e $\frac{b}{d} = b'$: digo que $a':b'$ he irredusivel. „

Dem. Se $a':b'$ naõ he irreduzivel; seja $d' > 1$ divisor de a', e b', e seja $\frac{a'}{d'} = p$, e $\frac{b'}{d'} = q$; logo $a' = d'p$, e $b' = d'q$; logo $\frac{a}{d} = d'p$, e $\frac{b}{d} = d'q$; e por tanto, $a = dd'p$, e $b = dd'q$; logo $\frac{a}{dd'} = p$, e $\frac{b}{dd'} = q$; logo dd' he divisor de a, e b; mas d, he o maior divisor de a, e b (hyp.); logo dd' he divisor de d (113); mas esta consequencia he hum absurdo por ser $d' > 1$ (sup.); logo $a':b'$ he irreduzivel. O Q. S. D.

117 „ Se $\frac{a}{d} = a'$, $\frac{b}{d} = b'$, e he $a':b'$ irreduzivel: „ digo que d, he o maior divisor de a, e b. „

Dem. Se d naõ he o maior divisor de a, e b, deve ser dn o dito divisor, sendo $n > 1$, e numero inteiro (113); seja pois $\frac{a}{dn} = p$, e $\frac{b}{dn} = q$; logo $p:q$ he irreduzivel (116); por ser $\frac{a}{d} = a'$, e $\frac{b}{d} = b'$, he $a:b = a':b'$; e por ser $\frac{a}{dn} = p$, e $\frac{b}{dn} = q$, he $a:b = p:q$ (B. Ar. art. 180); logo $a':b' = p:q$; e porque $a':b'$ he irreduzivel (hyp.), e tambem $p:q$ he irreduzivel; logo $a' = p$, e $b' = q$; mas $\frac{a}{d} = a'$, e $\frac{a}{dn} = p$; logo $d = dn$; mas esta consequencia he hum absurdo, por ser $n > 1$; logo d he o maior divisor de a, e b. O Q. S. D.

118 „ Se d he divisor de a, e b, e he d' o maior „ divisor de $\frac{a}{d}$, e $\frac{b}{d}$: digo que dd' he o maior di- „ visor de a, e b. „

Dem. Seja $\frac{a}{d} = p$, e $\frac{b}{d} = q$; logo $a = dp$, e $b = dq$; seja $\frac{p}{d'} = p'$, e $\frac{q}{d'} = q'$; logo $p' : q'$ he irreduzivel (116); segue-se tambem que $p = d'p'$, e $q = d'q'$; e pois que $a = dp$, e $b = dq$; logo $a = dd'p'$, e $b = dd'q'$; logo $\frac{a}{dd'} = p'$, e $\frac{b}{dd'} = q'$; mas he $p' : q'$ irreduzivel; logo (117) he dd' o maior divisor de a, e b. O Q. S. D.

(119) O divisor de huma divisaõ inexacta, he medida do dividendo menos o resto da divisaõ.

120 „ Methodo para achar o maior divisor de dous „ numeros. „

Sejaõ os dous numeros a, e b, e seja $a > b$.

1.º Divida-se a por b, e seja a' o resto da divisaõ; logo he b medida de $a - a'$ (119).

2.º Divida-se b pelo resto a', e seja b' o resto da divisaõ; logo he a' medida de $b - b'$ (119).

3º. Divida-se o primeiro resto a' pelo segundo b', e supponhamos que a divisaõ he exacta: digo que b', divisor da ultima divisaõ, e exacta, he o maior divisor de a, e b. Se b' naõ he divisor exacto, deve-se continuar a dividir cada divisor pelo seu respectivo

resto,

resto, athe se chegar a huma divisaõ exacta, entaõ o divisor desta, he o maior divisor, que se busca.

Exemplo. Seja proposto achar o maior divisor de 665, e 385.

Operaçaõ.

$$665 : 385 = 1$$
$$385 : 280 = 1$$
$$280 : 105 = 2$$
$$105 : 70 = 1$$
$$70 : 35 = 2$$

Respósta. O maior divisor de 665, e 385 he 35.

Dem. Deve-se provar que b' he divisor de a, e b, e que he o maior divisor.

He b' medida de a' (hyp.), e a' medida de $b - b'$ (2.°); logo b' he medida de $b - b'$ (53); logo b' he medida de b (1); mas b he medida de $a - a'$ (1.°); logo b' he medida de $a - a'$ (53); mas b' he medida de a' (hyp.); logo b' he medida de a (1); mas já provamos que b' he medida de b; logo b' he divisor de a, e b.

Se b' naõ he o maior divisor de a, e b, seja $b' + m$ o dito divisor: por ser $b' + m$ divisor de b (sup.), e b de $a - a'$ (1.°), he $b' + m$ divisor de $a - a'$ (53); mas $b' + m$ he divisor de a (sup.); logo $b' + m$ he divisor de a' (2); e porque a' he divisor de $b - b'$ (2.°); logo $b' + m$ he divisor de $b - b'$ (53); mas $b' + m$ he divisor de b (sup.); logo deve ser

$b'+m$ divisor de b' (2); mas esta consequencia he hum absurdo; logo b' he o maior divisor de a, e b. O Q. S. D.

121 A operaçaõ de achar o maior divisor de dous numeros, póde-se abreviar em muitos casos por meio dos art. 74, 115, e 118 sobre o commum divisor de dous numeros, e por meio dos art. 102, 103, 105, 106, 107, 108, e 109 sobre os numeros inteiros, que tem por divisor algum dos numeros 2^m, 5^m, 3, 9, 11, 7, e 13. Eis-aqui alguns exemplos.

Exemplo 1.° Seja proposto achar o maior divisor de 160375, e 76000.

1.° Segundo o art. 103 o numero 125 he divisor dos numeros 160375, e 76000, e temos 160375 : 125 = 1283, e 76000 : 125 = 608.

2°. Segundo os art. 102, e 74 he 2 : 1283 irreduzivel; logo 2^m : 1283 he irreduzivel (58); e porque 608 : 2^3 = 76, e 76 : 2^2 = 19; logo segundo o art. 115, o maior divisor de 608, e 1283 he o mesmo, que o de 19, e 1283; e porque 19 he numero primo, e naõ he divisor de 1283; logo 19 : 1283 he irreduzivel (74); logo 608 : 1283 he tambem irreduzivel; logo segundo o art. 118 o maior divisor dos numeros propóstos he 125 × 1, ou 125. O Q. S. P.

Exemplo. 2.° Seja proposto achar o maior divisor de 432000, e 604081,

1.° Segundo os art. 102, 103, e 74 os numeros 2, e 5 saõ primeiros com 604081; logo $2^m \times 5^n$: 604081 he irreduzivel (61); e porque $\frac{432000}{1000} = 432$, e $\frac{432}{16} = 27$; logo (115) o maior divisor de 604081, e 432000 he o de 604081, e 27.

2.° Segundo os art. 105, e 74, he $3:604081$ irreduzivel; logo (58) he $3^3:604081$ irreduzivel; e porque $27:3^3=1$; logo (115) o maior divisor de 27, e 604081 he o de 1, e 604081, ou a unidade; mas o maior divisor de 27, e 604081, he o de 604081, e 432000 (1.°); logo he 1 o maior divisor de 604081, e 432000. O Q. S. P.

122 Por meio do art. 112 pode-se achar facilmente o maior divisor de dous numeros propóstos, sendo estes expressados em factores primos: eis-aqui alguns exemplos.

Exemplo. 1.° Seja proposto achar o maior divisor de 665, e 385.

Pois que $665 = 5.7.19$, e $385 = 5.7.11$; logo 5, e 7 saõ os numero primos factores communs dos numeros propóstos, e cada hum daquelles primos he huma só vez factor em cada hum dos numeros propóstos: e por tanto (112) he 5×7, ou 35, o maior divisor dos ditos numeros propóstos.

Exemplo 2.° Seja propósto achar o maior divisor dos numeros 11475, e 4635.

Pois que $11475 = 3^3.5^2.17$, e $4635 = 3^2.5.103$; logo 3, e 5 saõ os numeros primos factores communs dos numeros propóstos, e como 5 he huma só vez factor em hum dos ditos numeros, e 3 he factor duas vezes em o numero proposto, em que o mesmo 3 he menos vezes factor; logo (112) he $3^2 \times 5$, ou 45, o maior divisor dos numeros propóstos.

N. B. Este methodo he applicavel ao descobrimento do maior divisor de tres, ou mais numeros.

123 Pois que $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = a : b$ (B. Ar. art. 170); logo segundo o art. 116 „ dividindo os dous termos de hu„ ma razaõ dada, pelo seu maior divisor, os quocien„ tes saõ numeros primeiros entre si, e a razaõ entre „ elles he igual á razaõ dada. „

124 *Questaõ*. Seja proposto achar valores de x, e z em numeros inteiros, taes que seja $665x = 385z$.

Soluçaõ. Pois que $665x = 385z$; logo temos $z : x = 665 : 385$ (B. Ar. art. 180); buscando agora huma razaõ irreduzivel igual a $665 : 385$ pelo art. precedente, temos $665 : 385 = 19 : 11$; logo $19 : 11 = z : x$: por ser irreduzivel a razaõ $19 : 11$, e por serem numeros inteiteiros z, e x (hyp.), temos segundo o art. 45, que as incognitas z, e x ou saõ respectivamente iguaes a 19, e 11, ou saõ equimultiplos respectivos de 19, e 11; e por tanto, o menor valor de z, he 19, e o menor de x, he 11; e supponde que n representa qualquer numero inteiro, temos $z = 19n$, e $x = 11n$. O Q. S. P.

125 „ Se D he o maior divisor de todos os ter„ mos da serie a, b, c, etc. de numeros inteiros, e he

„ D' o maior divisor de D, e u: digo que D' he o „ maior divisor de a, b, c, etc, e de u.„

Dem. 1°. He D o maior divisor de a, b, c, etc. (hyp.); logo D he divisivel exactamente por qualquer outro divisor de a, b, c, etc. (113); mas qualquer divisor de a, b, c, etc., e de u, he divisor de a, b, c, etc.: logo qualquer divisor de a, b, c, etc., e de u he divisor de D; logo o maior divisor de a, b, c, etc., e de u he divisor de D; mas o maior divisor de a, b, c, etc., e de u he divisor de u; logo o maior divisor de a, b, c, etc., e de u, he divisor de D, e u.

2.° He D o maior divisor de a, b, c, etc. (hyp.); logo qualquer divisor de D, e u he divisor de a, b, c, etc. (113).

3.° O maior divisor de a, b, c, etc., e de u he divisor de D, e u (1.°); mas qualquer divisor de D, e u he divisor a, b, c, etc., e de u (2.°); logo o maior divisor de D, e u he tambem o maior divisor de a, b, c, etc., e de u; mas D' he o maior divisor de D, e u (hyp.); logo D' he o maior divisor de a, b, c, etc., e de u. O Q. S. D.

126 Os art. 120, e 125 constituem juntos o methodo para achar o maior divisor de tres ou mais numeros inteiros propóstos.

Exemplo. Seja proposto achar o maior divisor de 28665, 23205, 8645, e 3003.

Operaçaõ.

I. Parte.

$28665 : 23205 = 1$

$23205 : 5460 = 4$

$5460 : 1365 = 4$

O maior divisor de 28665, e 23205 he 1365 segundo o art. 120.

II. Parte.

$8645 : 1365 = 6$

$1365 : 455 = 3$

O maior divisor de 8645, e 1365 he 455 (120); mas 1365 he o maior divisor de 28665, e 23205 (I.ª parte); logo segundo o art. 125, o maior divisor de 28665, 23205, e 8645 he 455.

III. Parte.

$3003 : 455 = 6$

$455 : 273 = 1$

$273 : 182 = 1$

$182 : 91 = 2$

O maior divisor de 3003, e 455 he 91 (120); mas 455 he o maior divisor de 28665, 23205, e 8645 (II.ª Parte); logo segundo o art. 125, he 91 o maior divisor dos numeros propóstos. O Q. S. P.

127 „ Se $a : c$ he irreduzivel, e he c medida de „ ab : digo que c he medida de b. „

Dem. Seja $ab : c = q$; logo q he numero inteiro (hyp.), e $ab = cq$; logo $a : c = q : b$ (B.Ar. art. 180);

e porque $a:c$ he irreduzivel, e além disto he $q:b$ numerica (hyp.); logo segundo o art. 46 he c divisor de b. O Q. S. D.

128 „ Se os numeros a, b, c, e d, etc. saõ primeiros entre si, e cada hum delles he divisor de N: „ digo, que N he divisivel exactamente pelo producto „ daquelles numeros a, b, c, etc. „

Dem. 1.° Pois que os numeros a, b, c, e d, etc. saõ primeiros entre si (hyp.); logo $ab:c$ he irreduzivel (55), e igualmente saõ irreduziveis as razões $abc:d$, $abcd:e$, etc. (56).

2.° Seja $\frac{N}{a} = a'$; logo a' he numero inteiro (hyp.), e $N = aa'$.

3.° Por ser b medida de N (hyp.), e $N = aa'$ (2.°); logo b he medida de aa'; mas $b:a$ he irreduzivel (hyp.); logo b he medida de a' (127).

4.° He b medida de a' (3.°); logo se $\frac{a'}{b} = b'$, he b' numero inteiro, e $a' = bb'$; mas $N = aa'$ (2.°); logo $N = abb'$; logo $\frac{N}{ab} = b'$; mas b' he numero inteiro; logo ab he divisor de N.

5.° He $N = abb'$ (4.°), e c divisor de N (hyp.); logo c he divisor de abb'; mas $ab:c$ he irreduzivel (1.°); logo segundo o art. 127 he c medida de b'.

6.° He c divisor de b' (5.°); logo se $\frac{b'}{c} = c'$, he c' numero inteiro, e $b' = cc'$; mas $N = abb'$ (4.°); logo $N = abcc'$; logo $\frac{N}{abc} = c'$; mas c' he numero inteiro; logo abc he divisor de N.

Discorrendo de semelhante módo se achará, que $abcd$, $abcde$, etc. saõ divisores de N.

129 Segue-se que „ se os termos de huma serie saõ „ primeiros entre si, e cada hum dos ditos termos he „ divisor de hum certo numero, este numero he divisi- „ vel exactamente pelo producto de quaesquer termos „ da dita serie. „

130 Segue-se dos art. 75, 128, e 129, que „ se „ hum numero he divisivel exactamente por dous, ou „ mais numeros primos desiguaes entre si, o dito nu- „ mero he divisivel exactamente pelo producto dos di- „ tos numeros primos, e por qualquer producto dos „ mesmos numeros primos, tomados dous a dous, tres „ a tres, etc., com tanto que nenhum numero primo „ seja mais vezes factor em nenhum dos productos, „ que no sobredito numero. „

131 „ Se N he numero primo, e maior que qual- „ quer dos numeros inteiros d, d', d'', etc., se a, e b saõ „ numeros inteiros, e se he, finalmente, $\frac{N\times a}{d.d'.d''.\text{etc.}} =$ „ b: digo que N he divisor de b. „

Dem. Por ser N numero primo, e maior que qualquer dos numeros inteiros d, d', d'', etc. (hyp.), he N primeiro com cada hum dos numeros d, d', d'', etc. (74); logo (56) he $N : (d.d'.d''.\text{etc.})$ irreduzivel: por ser $b = \frac{N\times a}{d.d'.d''.\text{etc.}}$, he $b\times(d.d'.d''.\text{etc.}) = N\times a$, e por tanto $a = \frac{b\,(d.d'.d''.\text{etc.})}{N}$; e pois que a he

numero

numero inteiro ; logo N he divisor de $b \times (d \times d' \times d'' \times$ etc.) ; mas he $N : (d . d' . d''$. etc.) irreduzivel ; logo (127) he N divisor de b. O Q. S. D.

132 Seja $\frac{a}{a'} = b$; logo $a = a'b$; seja $\frac{b}{b'} = c$; logo $b = b'c$; mas $a = a'b$; logo $a = a'b'c$; seja $\frac{c}{c'} = d$; logo $c = c'd$; mas $a = a'b'c$; logo $a = a'b'c'd$; e por tanto ,, dividindo-se hum numero , dividindo-se depois o ,, quociente , dividindo-se depois o quociente da 2.ª di- ,, visaõ , e assim por diante , o dito numero he o pro- ,, ducto de todos os divisores pelo ultimo quociente. ,,

133 Segue-se que ,, dividindo-se hum numero intei- ,, ro por algum dos seus divisores, dividindo-se depois ,, o quociente desta divisaõ por hum dos seus divi- ,, sores , dividindo-se depois o quociente da segunda ,, divisaõ por algum dos seus divisores , e assim por ,, diante , he o primeiro numero , que se dividio , divisi- ,, vel exactamente pelo producto de quaesquer divisores ,, das ditas divisoens . ,,

134 ,, Se hum numero naõ he divisor exacto de ,, outro , este numero naõ he divisivel exactamente por ,, nenhum multiplo daquelle . ,,

135 ,, Se hum numero naõ he divisor exacto de ,, outro , nenhum submultiplo deste numero póde ser di- ,, visivel exactamente por aquelle numero . ,,

136 ,, Methodo para achar todos os numeros pri- ,, mos , que saõ divisores de hum numero inteiro pro-

,, posto, ou para achar a expressaõ de hum numero ,, inteiro proposto em factores primos.,,

Busque-se o menor numero primo, que seja divisor do numero proposto, cujo numero primo se descobre por tentativa: descoberto que seja o dito numero primo, practique-se a divisaõ: depois practique-se sobre o quociente o mesmo, que se practicou sobre o numero proposto, e assim por diante, athe se chegar a descobrir hum quociente, que seja numero primo: entaõ todos os divisores, e o ultimo quociente saõ todos os divisores primos do numero proposto.

Advirta-se que segundo o art. 135, se hum numero primo naõ for divisor do numero proposto, ou de hum quociente, naõ se deve tomar este numero primo por divisor de quociente, que se tiver depois, mas sim outro numero primo, que seja immediato superior.

Advirta-se mais, que em attençaõ ao art. 70, se hum numero naõ tem por divisor nenhum dos numeros primos, que fôrem menores que a raiz quadrada do dito numero, e se juntamente o sobredito numero naõ for quadrado de numero inteiro, entaõ o dito numero he primo, e consequentemente naõ se deve continuar a tentativa de buscar numero primo, que seja seu divisor.

Exemplo. 1.° Seja proposto achar a expressaõ de 6468 em factores primos.

O menor numero primo he 2, e pois que 6468 he divisivel exactamente por 2^2 (102); logo 2 he factor duas vezes em 6468: practicando a divisaõ temos $6468 : 4 = 1617$. O quociente 1617 naõ tem por divisor o primo 2 (102), mas sim o primo 3 (105), e temos $1617 : 3 = 539$. Este quociente naõ tem o primo 3 por divisor (105), nem o primo 5 (103); porém o primo 7, que he immediato superior a 5, he divisor de 539 (108), e temos $539 : 7 = 77$. He $77 = 7 \times 11$; logo $6468 = 2.2.3.7.7.11 = 2.^2 3.7^2.11$. O Q. S. P.

Exemplo. 2.° Seja proposto achar a expressaõ de 220649 em factores primos.

Segundo os art. 102, 105, 103, e 108 nenhum dos numeros primos 2, 3, 5, e 7 he divisor de 220649; mas segundo o art. 107, he 11 divisor de 220649, e temos $220649 : 11 = 20059$.

O numero primo 11 naõ he divisor de 20059 (107); porém 13 he divisor de 20059 (109), e temos $20059 : 13 = 1543$.

Nenhum dos numeros primos 13, 17, 19, 23, 29, 31, e 37 he divisor de 1543; e porque $(\sqrt{1543}) < 40$, e > 39; logo segundo o art. 70, o numero 1543 he primo: e por tanto $220649 = 11 \times 13 \times 1543$. O Q. S. P.

Dem. O primeiro numero primo, que se descobre, he divisor exacto do numero proposto, o segundo he divisor exacto do primeiro quociente, o terceiro he divisor exacto do segundo quociente; e assim por diante: logo o numero proposto he divisivel exactamente por cada hum dos numeros primos descobertos (53), e segundo o art. 132, o numero proposto he o producto de todos os divisores pelo ultimo quociente; logo segundo o art. 92, o numero proposto só tem por divisores primos, aquelles mesmos primos descobertos. O Q. S. D.

137 „Methodo para achar todos os divisores compóstos de hum numero proposto, sendo este expressado em factores primos.„

Caso 1.º Se os factores primos saõ todos desiguaes entre si, deve-se proceder do modo seguinte. Multiplique-se o 1.º factor pelo 2.º: depois multipliquem-se pelo 3.º factor, os factores 1.º, e 2.º, e o producto achado: depois multipliquem-se pelo 4.º factor, os factores 1.º, 2.º, 3.º, e todos os productos, que se tiverem achado: continuando sempre assim, athe que o ultimo factor primo sirva de multiplicador, teremos todos os divisores compóstos do numero proposto, os quaes saõ todos os productos achados: por exemplo, se a, b, c, d, e e saõ numeros primos, e he $n = abcde$, os divisores compóstos de n saõ os seguintes productos.

a					
b	ab				
c	ac	bc	abc		
d	ad	bd	cd		
	abd	acd	bcd	$abcd$	
e	ae	be	ce	de	abe
	bce	ade	bce	bde	$abce$
	cde	$abde$	$acde$	$bcde$	$abcde$

Todos estes productos saõ os diversos, que resultaõ dos factores primos do numero proposto, tomados dous a dous, tres a tres, etc.; logo segundo o art. 110, aquelles productos saõ todos os divisores compóstos do numero proposto.

Caso 2°. Se entre os factores primos do numero proposto ha alguns iguaes entre si, he claro que practicando como no primeiro caso, se haverãõ productos identicos: para evitar pois esta identidade, deve-se proceder do módo seguinte.

Quando hum factor primo for diverso do immediato precedente, deve-se por aquelle multiplicar todos os diversos factores primos, que o precedem, e tambem todos os productos, que dos factores primos precedentes tiverem resultado; e havendo factores primos iguaes entre si, deve o segundo destes multiplicar o primeiro, e todos os productos resultados do mesmo primeiro; deve o 3.° multiplicar todos os productos, que resultarem do 2.°; deve o 4.° multiplicar todos os productos resultados do 3.°; e assim por diante: por exemplo, se for $n = a^2 b c^2 d$, sendo numeros primos a, b, c, e d, os seguintes productos saõ todos os divisores compóstos de n.

a						
a	a^2					
b	ab	a^2b				
c	ac	bc	a^2c	abc	a^2bc	
c	c^2	ac^2	bc^2	a^2c^2	abc^2	a^2bc^2
	ad	bd	cd	a^2d	abd	acd
d	c^2d	a^2bd	bcd	ac^2d	a^2cd	bc^2d
	$abcd$	a^2c^2d	a^2bcd	abc^2d	a^2bc^2d	

138 Quando se quizer conhecer sómente os divisores compóstos impares de hum numero proposto, que seja numero par, naõ ha mais do que buscar todos os divisores pelo methodo precedente, com a só differença de naõ contemplar o factor 2.

139 Temos visto, que para achar os divisores compóstos de hum numero proposto, de que os factores primos saõ todos desiguaes entre si, naõ ha mais do que multiplicar por cada factor primo, todos os factores primos precedentes, e todos os productos, que dos ditos factores primos precedentes tiverem resultado: pelo que, do 2.° factor primo resultaõ 2 divisores; do 3.° resultaõ $(1+2)+1$, ou 4; do 4.° resultaõ $(1+2+4)+1$, ou 8: e por tanto, o numero dos divisores primos, e compóstos de hum numero proposto, de que os divisores primos saõ todos desiguaes entre si, he a somma de huma progressaõ geometrica divergente, de que o primeiro termo he a unidade, a razaõ he 2, e o numero dos termos he o numero dos divisores primos do numero proposto: suppondo agora

que n he o numero dos divisores primos, he 2^n-1 o numero de todos os divisores do numero proposto, sem contar a unidade (B. Al. art. 234); logo contemplando a unidade por divisor „ he 2^n o numero de todos os „ divisores de hum numero proposto, de que os di-„ visores primos saõ todos desiguaes entre si, e o nu-„ mero destes he n. „

140 Temos dito (137), que hum factor primo diverso do immediato precedente, deve multiplicar todos os diversos factores primos, que o precedem, e todos os productos, que dos ditos primos precedentes tiverem resultado; e naõ menos temos dito, que havendo factores iguaes entre si, deve o 2.° destes multiplicar o 1.°, e todos os productos, que tiverem resultado do mesmo primeiro, deve o 3.° multiplicar todos os productos resultados do 2.°; e assim por diante. Pelo que se $n = a^3 b c^3 d^2$, sendo a, b, c, e d numeros primos, a operaçaõ para achar o numero de todos os divisores de n, he a seguinte.

3 Numero dos divisores produsidos por a, a, e a.
+ 1

4 Ditto por b
+ 3 Ditto por a, a, e a

7 Ditto por a, a, a, e b
+ 1

8 Ditto pelo 1.° c
× 3

24 Ditto por c, c, e c

24 Ditto por c, c, e c.
+ 7 Ditto por a, a, a, e b.

31 Ditto por a, a, a, b, c, c, e c.
+ 1

32 Ditto pelo 1.º d.
× 2

64 Ditto por d, e d.
31 Ditto por a, a, a, b, c, c, e c.

95 Ditto por a, a, a, b, c, c, c, d, e d.
+ 1

96 Total do numero dos divisores de $n = a^3 b c^3 d^2$, sendo a, b, c, e d numeros primos.

141 Quando se multiplicam entre si dous numeros inteiros, diz-se que estes dous numeros constituem *hum par de cofactores* do producto.

142 „ Methodo para achar todos os differentes pa-
„ res de cofactores de hum numero. „

Segundo a idéa de hum par de cofactores, a difficuldade que ha para achar todos os differentes pares de cofactores, consiste em descobrir o primeiro cofactores de cada par de cofactores: eis-aqui pois o methodo para achar o primeiro cofactor de cada par de cofactores.

Busque-se pelo methodo do art. 135 a expressaõ do numero proposto em factores primos, ou busque-se esta expressaõ nas minhas taboadas dos numeros expressados

expressados em factores primos, e entaõ todos os factores primos desiguaes do numero proposto, saõ primeiros cofactores do mesmo numero proposto.

Suppondo agora que n representa o numero de todos os numeros primos, cujo producto he o numero proposto, busquem-se os divisores compóstos do mesmo numero proposto por meio do art. 136, attendendo a que se n he numero impar, deve ser $\frac{n-1}{2}$ o numero dos factores primos de cada divisor composto, que se deve calcular de maior numero de factores: pois que calculando divisores compóstos de maior numero de factores, para primeiros cofactores, se encontraraõ depois para segundos cofactores, productos já calculados para primeiros. E pela mesma razaõ sendo n numero par, deve ser $\frac{n}{2}$ o numero dos numeros primos factores de cada divisor composto de maior numero de factores, e destes divisores compóstos de maior numero de factores sómente ametade delles devem ser primeiros cofactores. Para se formar idéa clara do methodo, he sufficiente dar attençaõ aos seguintes exemplos.

Exemplo 1.° Seja proposto achar todos os differentes pares de cofactores de 1050.

He $1050 = 2.3.5.5.7$; e por isso 1, 2, 3, 5, e 7 saõ primeiros cofactores.

Busquem-se agora os diversos productos destes factores primos tomados dous a dous; pois que $\frac{5-1}{2}$

$= 2$, e he 5 o numero de todos os factores primos, e entaõ os ditos productos saõ todos os primeiros cofactores, que saõ numeros compóstos.

Pois que os sobreditos productos saõ $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $5 \times 5 = 25$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 7 = 21$, e $5 \times 7 = 35$; logo he 1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 15, 25 14, 21, e 35 saõ todos os primeiros cofactores, e os segundos saõ consequentemente 1050, $\frac{1050}{2} = 525$, $\frac{1050}{3} = 350$, $\frac{1050}{5} = 210$, $\frac{1050}{7} = 150$, $\frac{1050}{6} = 175$, $\frac{1050}{10} = 105$, $\frac{1050}{15} = 70$, $\frac{1050}{25} = 42$, $\frac{1050}{14} = 75$, $\frac{1050}{21} = 50$, e $\frac{1050}{35} = 30$.

$$\text{Respósta. } 1050 = \left\{\begin{array}{l|l|l} 1 \times 1050 & 6 \times 175 & 15 \times 70 \\ 2 \times 525 & 7 \times 150 & 21 \times 50 \\ 3 \times 350 & 10 \times 105 & 25 \times 42 \\ 5 \times 210 & 14 \times 75 & 35 \times 30 \end{array}\right.$$

O Q. S. P.

Exemplo 2°. Seja proposto achar todos os differentes pares de cofactores de 110250.

He $110250 = 2.3^2.5^3.7^2$; logo 1, 2, 3, 5, e 7 saõ todos os numeros primos, que saõ primeiros cofactores de 110250.

Pois que oito he o numero de todos os numeros primos, cujo producto he 110250; logo $\frac{8}{2}$ ou 4 he o numero dos factores primos de cada divisor composto, que se deve calcular de maior numero de factores primos, para servir de primeiro cofactor: mas destes divisores compóstos de quatro factores cada hum, sómente se deve tomar para primeiros cofactores ametade delles, que vem a ser oito. Eis-aqui pois todos os primeiros cofactores, assim primos como compóstos.

1						
2						
3	2.3					
3	3.3	2.3.3				
5	2.5	3.5	2.3.5	3.3.5	2.3.3.5	
5	5.5	2.5.5	3.5.5	2.3.5.5	3.3.5.5	
5	5.5.5	2.5.5.5	3.5.5.5			
7	2.7	3.7	5.7	2.3.7	3.3.7	
	2.5.7.	5.5.7	5.5.5.7	2.3.3.7	3.5.7	2.5.5.7
7	7.7	2.7.7	3.7.7	5.7.7		

Practicando agora as multiplicaçoens indicadas, e dividindo-se depois 110250 pelos ditos primeiros cofactores, os quocientes seraõ os segundos cofactores.

143 *Applicaçaõ*. Seja proposto sendo possivel achar os valores das incognitas u, x, z, e y das equaçoens $u(x+z+y)=a$, $x(u+z+y)=b$, $z(x+u+y)=c$, e $y(x+u+z)=d$, sendo a, b, c, e d numeros inteiros.

Soluçaõ 1.° De $u(x+z+y)=a$ se tira $ux+(z+y)u=a$, e de $x(u+z+y)=b$, se deduz $ux+(z+y)x=b$; logo $(u-x)(z+y)=a-b$; logo $u-x$

$=\frac{a-b}{z+y}$; sendo pois $a>b$, he $u>x$: pelo que, quanto maior for o segundo membro de huma das equaçoens propóstas, maior he a incognita, que multiplica a somma de todas as outras incognitas na dita equaçaõ.

Advirta-se que a incognita, que multiplica a somma de todas as outras em huma equaçaõ chama-se *dominante*, e o segundo membro chama-se *correspondente*.

2.º Pois que huma correspondente he o producto da sua dominante pela somma das outras incognitas; logo segundo o que fica dito (1.º), decompondo o 2.º membro de huma equaçaõ, que naõ seja o maior, em todos os seus differentes pares de cofactores, a somma de hum dos pares de cofactores he a somma de todas as incognitas, e deste par de cofactores, o menor cofactor he a dominante correspondente, e o outro cofactor he a somma das outras incognitas.

Pelo que, decompondo cada segundo membro exceptuando o maior, em todos os differentes pares de cofactores (142), e buscando depois em cada lista dos pares de cofactores de cada segundo membro, hum par de cofactores, cuja somma seja hum mesmo numero, o menor cofactor de hum par de cofactores he o valor da dominante correspondente do segundo membro, a quem compete o dito par de cofactores: subtraindo, finalmente, a somma de todas as dominantes de todas as equaçoens, á excepçaõ da dominante da equaçaõ de maior segundo membro, da somma de hum par de cofactores, de que se haja tirado o valor de alguma dominante, o resto he necessariamente a maior dominante.

Exemplo. Seja proposto achar os valores das incognitas das equaçoens.

$u(x+z+y)=51$ $\qquad$ $z(u+x+y)=75$

$x(u+z+y)=64$ $\qquad$ $y(u+x+z)=96$

Por ser 96 o maior de todos os segundos membros, decomporemos 51, 64, e 75 em todos os seus differentes pares de cofactores (142); e practicando a operaçaõ se achará

$$51=1\times51=3\times17\ (*)$$
$$64=1\times64=2\times32=4\times16\ (*)=8\times8$$
$$75=1\times75=3\times25=5\times15\ (*)$$

Pois que $3+17=4+16=5+15$; logo $u=3$, $x=4$, e $z=5$; e porque $3+17=20=u+x+z+y$; logo temos $20-(3+4+5)=8=y$: e com effeito

$3(4+5+8)=51$ $\qquad$ $5(3+4+8)=75$

$4(3+5+8)=64$ $\qquad$ $8(3+4+5)=96$

O Q. S. P.

N. B. O par de cofactores de hum segundo membro naõ deve ser contemplado, se algum dos dous cofatores naõ for menor que o menor segundo membro.

Dos numeros inteiros em quanto multiplos.

144 „SE c he o maior divisor de a, e b: digo „que $\frac{ab}{c}$ he multiplo de a, e b.„

Dem. Seja $\frac{a}{c} = p$, e $\frac{b}{c} = q$, logo p, e q saõ numeros inteiros (hyp.), e temos $a = cp$, e $b = cq$; e por isso $ab = cpcq$; logo $\frac{ab}{c} = cpq = cp \times q = cq \times p$; mas $cp = a$, e $cq = b$; logo $\frac{ab}{c} = aq = bp$; mas q, e p saõ numeros inteiros; logo $\frac{ab}{c}$ he multiplo de a, e b. O Q. S. D.

145 „Se c he o maior divisor de a, e b: digo „que $\frac{ab}{c}$ he o menor multiplo de a, e b.„

Dem. 1.° Seja $\frac{a}{c} = p$, e $\frac{b}{c} = q$; logo $\frac{ab}{c}$ ou aq, ou bp he multiplo de a, e b (144); segue-se tambem que $a:b = p:q$ (B. Ar. art. 170); deduz-se naõ menos que $p:q$ he irreduzivel (116); e segue-se ainda que $ab = acq$.

2.° Se aq naõ he o menor multiplo de a, e b, seja $aq - d$ o dito menor multiplo, e seja $\frac{aq-d}{a} = p'$, e $\frac{aq-d}{b} = q'$; logo $aq - d = ap' = bq'$; logo $a:b = q':p'$ (B. Ar. art. 180); mas $a:b = p:q$ (1.°); logo

$p:q = q':p'$; mas $p:q$ he irreduzivel (1.°); logo deve ser $q' = np$, sendo n numero inteiro (46).

3.° He $\frac{a}{c} = p$ (1.°); logo $\frac{an}{c} = pn$; mas $np = q'$ (2.°), e tambem $\frac{aq-d}{b} = q'$; logo $\frac{an}{c} = \frac{aq-d}{b}$; logo $abn = acq - cd$ (B. Ar. art. 178); e porque $ab = acq$ (1.°); logo temos $abn = ab - cd$; mas esta consequencia he hum absurdo, por ser n numero inteiro (sup.); logo $\frac{ab}{c}$ he o menor multiplo de a, e b. O Q. S. D.

146 *Applicaçaõ*. Seja proposto achar o menor multiplo de 2125, e 975.

Operaçaõ.

I. Parte.	II. Parte.
2125 : 975 = 2	975 : 25 = 39
975 : 175 = 5	2125
175 : 100 = 1	19125
100 : 75 = 1	6375
75 : 25 = 3	82875

Respósta. O menor multiplo de 21225, e 975 he 82875.

147 Segue-se dos art. 145, e 47 que „ o menor „ multiplo de dous numeros primeiros entre si, he o „ producto dos mesmos numeros. „

148 „ Se m, e m' saõ multiplos communs de $a, b,$ „ c, d, etc., e he m o menor multiplo de $a, b, c,$ „ etc.: digo que m' he multiplo de m. „

Dem. Se m' naõ he multiplo de m, seja $m' = mp + q$, sendo p, e q numeros inteiros, e $q < m$: pois que a, b, c, etc. saõ divisores de m (hyp.); logo a, b, c, etc. saõ divisores de mp (53); e porque a, b, c, etc. saõ divisores de m' (hyp.), e he $m' = mp + q$ (sup.); logo a, b, c, etc. saõ divisores de $mp + q$; mas temos achado que a, b, c, etc. saõ divisores de mp; logo a, b, c, etc. saõ divisores de $(mp + q) - mp$ ou de q (2): e por tanto he q divisivel exactamente por a, b, c, etc.; mas $q < m$ (sup.); logo aquella consequencia destróe a hyp.: he pois, finalmente, m' multiplo de m. O Q. S. D.

149 „Se m he o menor multiplo de todos os ter-„mos de huma serie de numeros inteiros, á excepçaõ „do ultimo termo u, e he m' o menor multiplo de „todos os termos da dita serie: digo que m' he o „menor multiplo de m, e u.„

Dem. Pois que m' he o menor multiplo de todos os termos da serie (hyp.); logo m' he multiplo de todos os termos, que precedem ao ultimo; mas m he o menor multiplo de todos os termos, que precedem ao ultimo (hyp.); logo segundo o art. 148 he m' multiplo de m; e porque m' deve ser multiplo de u (hyp.); logo m' he multiplo de m, e u; mas m' deve ser o menor multiplo de todos os termos da serie; logo m' deve ser o menor multiplo de m, e u. O Q. S. D.

150 *Applicaçaõ.* Seja proposto achar o menor multiplo

tiplo commum dos numeros 6783, 3927, 5313, e 6090.

Operaçaõ.

I. Parte.

$$6783 : 3927 = 1$$
$$3927 : 2856 = 1$$
$$2856 : 1071 = 2$$
$$1071 : 714 = 1$$
$$714 : 357 = 2$$

$$3927 : 357 = 11$$

$$\begin{array}{r} 6783 \\ \hline 6783 \\ 6783 \\ \hline 74613 \end{array}$$

He $74613 = 6783 \times \frac{3927}{357}$; e porque 357 he o maior divisor de 6783, e 3927 (120); logo segundo o art. 145 he 74613 o menor multiplo de 6783, e 3927.

II. Parte.

$$74613 : 5313 = 14$$
$$\begin{array}{r} 21483 \\ \hline \end{array}$$
$$5313 : 231 = 23$$

$$\begin{array}{r} 74613 \\ \hline 223839 \\ 149226 \\ \hline 1716099 \end{array}$$

He $1716099 = 74613 \times \frac{5313}{231}$, e 231 he o maior divisor de 74613, e 5313 (120); logo segundo o art. 145 he 1716099 o menor multiplo de 74613, e 5313; e porqne 74613 he o menor multiplo de 6783, e

3927: (I.ª parte); logo segundo o art. 149 he 1716099 o menor multiplo de 6783, 3927, e 5313.

III. Parte.

$$1716099 : 6090 = 281$$
$$4980$$
$$1089$$
$$6090 : 4809 = 1$$
$$4809 : 1281 = 3$$
$$1281 : 966 = 1$$
$$966 : 315 = 3$$
$$315 : 21 = 15$$
$$105$$

$$6090 : 21 = 290$$
$$189$$

$$\begin{array}{r} 1716099 \\ \hline 154448910 \\ 3432198 \\ \hline 497668710 \end{array}$$

He $497668710 = 1716099 \times \frac{6090}{21}$, e he 21 o maior divisor de 1716099, e 6090 (120); logo segundo o art. 145 he 497668710 o menor multiplo de 1716099, e 6090; e porque 1716099 he o menor multiplo de 6783, 3927, e 5313 (II.ª parte); logo segundo o art. 149 he 497668710 o menor multiplo dos numeros propóstos. O Q. S. P.

151 Segue-se dos art. 147, 149, e 55 que „ o menor multiplo de tres ou mais numeros primeiros entre si, he o producto dos mesmos numeros. „

152 Segue-se do art. 2 que „ se cada hum dos

„ termos da serie $N-d$, $N-d'$, $N-d''$, etc. he mul-
„ tiplo do seu correspondente da serie a, a', a'', etc.,
„ e he M multiplo de cada hum dos termos da serie
„ a, a', a'', etc: tambem cada termo da serie $(N-d)$
„ $+M$, $(N-d')+M$, $(N-d'')+M$, etc., he
„ multiplo do seu correspondente da serie a, a', a'',
„ etc. „

153 Segue-se do art. 5 que „ se m naõ he multi-
„ plo de cada hum dos termos da serie a, a', a'', etc.,
„ e he cada termo da serie $N-d$, $N-d'$, $N-d''$,
„ etc. multiplo do seu correspondente da serie a, a',
„ a'', etc.: naõ póde ser cada termo da serie $(N-d)$
„ $+m$, $(N-d')+m$, $(N-d'')+m$, etc. multiplo
„ do seu correspondente da serie a, a', a'', etc. „

154 Segue-se que „ se $N=ap+d=a'p'+d'=$
„ $a''p''+d''=$ etc. sendo numeros inteiros a, a', a'',
„ etc., assim tambem p, p', p'', etc, e naõ menos d, d',
„ d'', etc., e he M multiplo de cada hum dos termos
„ da serie a, a', a'', etc.: he $N+M=aq+d=a'q'$
„ $+d'=a''q''+d''=$ etc., sendo q, q', q'', etc. numeros
„ inteiros. „

155 Segue-se dos art. 151, 152, e 147 que „ se
„ a, a', a'', etc. saõ numeros primeiros entre si, se p,
„ p', p'', etc. saõ numeros inteiros, e se he juntamente
„ $N=ap+d=a'p'+d'=a''p''+d''=$ etc., he $N+$
„ $(a.a'.a''.\text{ etc.})n=aq+d=a'q'+d'=a''q''+d''=$
„ etc., em que q, q', q'' etc, saõ numeros inteiros, e
„ tambem he n numero inteiro. „

156 Daqui se tira que „ se hum producto se mos-
„ tra ser verdadeiro pela próva dos noves, e dos on-
„ zes, o dito producto, ou he o verdadeiro, ou diffe-
„ re do verdadeiro em $9 \times 11 \times n$, sendo n numero in-
„ teiro. „

157 He $10 = 2 \times 5$; logo $10^m = (2 \times 5)^m = 2^m \times 5^m$ (B.Al. art.123); logo „ se m he numero inteiro, he 10^m „ multiplo de 2^m, e de 5^m. „

158 Pois que $10^m = 2^m \times 5^m$, e saõ primos 2, e 5; logo (85) „ nenhum numero primo diverso de 2, e 5, „ he medida de 10^m. „

159 Segue-se dos art. 158, e 134 que „ nenhuma „ potencia inteira de 10, póde ser multiplo de nume- „ ro, que tenha por divisor algum numero primo di- „ verso de 2, e 5. „

160 Pois que $10^m = 2^m \times 5^m$; logo $\frac{10^m}{2^m \times 2^n} = \frac{2^m \times 5^m}{2^m \times 2^n}$; mas $\frac{2^m \times 5^m}{2^m \times 2^n} = \frac{5^m}{2^n}$ (B. Ar. art. 89); logo temos $\frac{10^m}{2^m \times 2^n} = \frac{5^m}{2^n}$; mas $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$ (B. Al.art.20); logo $\frac{10^m}{2^{m+n}} = \frac{5^m}{2^n}$: supponndo agora que m, e n saõ numeros inteiros, naõ póde ser 2^n divisor de 5^m (65): pelo que „ huma potencia inteira de 10 naõ póde ser multiplo „ de potencia inteira de 2, sendo esta de maior ex- „ ponente. „

161 Discorrendo do mesmo módo se concluirá que „ huma potencia inteira de 10 naõ póde ser multiplo

„ de potencia inteira de 5, sendo esta de maior ex-
„ ponente.„

162 Segue-se dos art. 157, 160, e 161 que „ a me-
„ nor potencia de 10, que he multiplo de potencia de
„ 2, ou de 5, he huma potencia do mesmo gráo, que
„ a de 2, e que a de 5.„

163 Segue-se que „ 10^{m+n} he a menor potencia de
„ 10, que he multiplo de $2^{m+n}\times 5^m$, e de $2^m\times 5^{m+n}$.„

164 Seja proposto achar sendo possivel a menor potencia de 10, que seja hum multiplo de 16.

Soluçaõ. Temos $16=2^4$; logo segundo o art. 162 he 10^4, ou 10000 a potencia pedida.

165 Seja proposto achar sendo possivel a menor potencia de 10, que seja hum multiplo de 3200.

Soluçaõ. Temos $3200=2^7.5^2$; logo segundo o art. 163, he 10^7 ou 10000000 a potencia pedida.

166 Seja proposto achar sendo possivel a menor potencia de 10, que seja hum multiplo de 3500.

Soluçaõ. He $3500=2^2.5^3.7$; logo segundo o art. 159, a questaõ he impossivel.

Dos numeros inteiros em quanto potencias, e raizes, sendo os exponentes numeros inteiros positivos.

167 „ SE *a* he medida de *b*: tambem *a* he me-
„ dida de b^m.„

Esta propriedade he huma consequencia immediata da idéa da potencia, e do art. 53.

168 „ Se a he numero primo, b numero inteiro, „ e he a medida de b^m : digo que a he medida de „ b. „

Dem. He a numero primo (hyp.); logo (74) se a naõ he medida de b, he $a:b$ irreduzivel; logo $a:b^m$ he irreduzivel (58); logo naõ he a medida de b^m (74); mas esta consequencia destróe a hyp.; logo a he medida de b. O Q. S. D.

169 „ Sejaõ numeros inteiros a, e b, seja p nume- „ ro primo, e medida de a, e seja $\sqrt[m]{a}=b$: digo que „ p he medida de b. „

Dem. Seja $\frac{a}{p}=q$; logo q he numero inteiro (hyp.), e $a=pq$; logo $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{pq}$; mas $\sqrt[m]{a}=b$; (hyp.); logo $\sqrt[m]{pq}=b$; logo $pq=b^m$, logo $q=\frac{b^m}{p}$; mas q he numero inteiro; logo p he medida de b^m; mas q he numero primo (hyp.); logo segundo o art. 168 he p medida de b. O Q. S. D.

170 „ Sejaõ numeros inteiros a, e b, seja p nume- „ ro primo, e medida de b, e seja $\sqrt[m]{a}=b$: digo que „ p he medida de a. „

Dem. He $\sqrt[m]{a}=b$ (hyp.); logo $a=b^m$; por ser p medida de b (hyp.), he p medida de b^m (167); mas $b^m=a$ (hyp.); logo p he medida de a. O Q. S. D.

(171) Se hum numero naõ póde ser medido pela

unidade, nem por submultiplo algum da unidade, o dito numero naõ póde ser expressado, ou medido exactamente. Este numero chama-se *incommensuravel*, *surdo*, e tambem *irracional*.

(172) Logo todo o numero medio entre dous numeros inteiros consecutivos, que naõ he fracçaõ impropria ordinaria, he hum numero irracional.

173 „ Se a he numero inteiro maior que a unidade, e naõ he $\sqrt[m]{a}$ hum numero inteiro: digo que „ $\sqrt[m]{a}$ he numero irracional. „

Dem. Pois que $a > 1$ (hyp.); logo $(\sqrt[m]{a}) > 1$; logo $\sqrt[m]{a}$ deve ser fracçaõ impropria ordinaria, ou numero irracional (172); pois que $\sqrt[m]{a}$ naõ he numero inteiro (hyp.) : seja $\sqrt[m]{a} = \frac{p}{q}$, sendo $p : q$ irreduzivel, $q > 1$, e $p > q$; logo $a = \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$ (B. Al. art. 124) : por ser $p : q$ irreduzivel, naõ póde ser q^m medida de p^m (65); mas $\frac{p^m}{q^m} = a$; logo a naõ he numero inteiro; mas esta consequencia destróe a hyp.; logo $\sqrt[m]{a}$ naõ he fracçaõ impropria ordinaria; logo $\sqrt[m]{a}$ he hum numero irracional. O Q. S. D.

174 Segue-se dos art. 173, e 66 que „ a raiz de „ hum numero primo á excepçaõ da unidade he nu- „ mero irracional. „

175 „Se a he numero primo, e saõ numeros intei-
„ros m, e n, sendo $m > n$: digo que $\sqrt[m]{a^n}$ he numero
„ irracional.„

Dem. He a numero primo (hyp.); logo a^n he numero inteiro: se se imagina que $\sqrt[m]{a^n} = b$, sendo b numero inteiro, deve ser $b = aq$, sendo q numero inteiro (169); e por tanto $\sqrt[m]{a^n} = aq$, logo $a^n = (aq)^m$; logo $a^n = a^m \times q^m$ (B. Al. art. 123); mas esta consequencia he hum absurdo, por ser $m > n$, e q numero inteiro; logo naõ póde ser $\sqrt[m]{a^n}$ numero inteiro; logo $\sqrt[m]{a^n}$ he numero irracional (173). O Q. S. D.

176 „Se a he numero primo, se m, p, e q saõ
„numeros inteiros, e se $m > q$: digo que $\sqrt[m]{a^{mp+q}}$
„he numero irracional.„

Dem. Pois que a he numero primo, e saõ numeros inteiros m, p, e q (hyp.); logo a^{mp+q} he numero inteiro, e he a medida de a^{mp+q}: se se imagina que $\sqrt[m]{a^{mp+q}} = b$, sendo b numero inteiro, deve ser $b = a^n \times r$, sendo n, e r numeros inteiros (169); logo $a^{mp+q} = (a^n \times r)^m = a^{mn} \times r^m$ (B. Al. art. 123): suppondo agora que n he tal, que naõ possa ser a medida de r; segue-se que a^{mn} he a maior potencia de a, que he medida de $a^{mn} \times r^m$, ou de a^{mp+q}; mas mn naõ póde ser igual a $mp+q$, por ser m medida de mn, e naõ ser de $mp+q$; logo a naõ he factor em

a^{mp+q} o mesmo numero de vezes, que a he factor em $a^{mn} \times r^m$; logo (90) a equaçaõ $a^{mp+q} = a^{mn} \times r^m$ he hum absurdo; e por isso $\sqrt[m]{a^{mp+q}}$ naõ he numero inteiro; logo (173) he $\sqrt[m]{a^{mp+q}}$ numero irracional. O Q. S. D.

177 He $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{m}}$ (B. Al. art. 128); mas $\frac{mn}{m} = n$; logo $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$: pelo que, se a, m, e n saõ numeros inteiros, he $\sqrt[m]{a^{mn}}$ numero inteiro: por tanto ,, se hum numero inteiro he potencia de outro numero ,, inteiro, a raiz daquelle numero inteiro he numero in- ,, teiro, sempre que o exponente da raiz for medida do ,, exponente da potencia.,,

178 Segue-se dos art. 177, 175, e 176 que ,, a raiz ,, de huma potencia de numero primo he numero in- ,, teiro, ou numero irracional, confórme o exponente ,, da raiz he ou naõ divisor do exponente da poten- ,, cia.,,

179 ,, Se a he numero primo, se a^n he a mais al- ,, ta potencia de a, que he divisor do numero inteiro ,, b, e se m he numero inteiro, e maior que n: digo ,, que $\sqrt[m]{b}$ he numero irracional.,,

Dem. Seja $\frac{b}{a^n} = c$; logo c he numero inteiro (hyp.), e $b = a^n \times c$; e pois que a^n he a maior potencia de a, que he medida de b (hyp.); logo naõ póde ser a medida de c: se se imagina que póde ser $\sqrt[m]{b} = d$, sendo d numero inteiro, he a medida de d (169): seja pois $\frac{d}{a} = q$; logo q he numero inteiro, e $d = aq$; logo $aq = \sqrt[m]{b}$; logo $b = a^m \times q^m$; mas $b = a^n \times c$; logo $a^n \times c = a^m \times q^m$; mas $m > n$ (hyp.), e he a^n a maior potencia de a, que he medida de $a^n \times c$; logo (90), a equaçaõ $a^n \times c = a^m \times q^m$ he hum absurdo: e por isso naõ póde ser $\sqrt[m]{b}$ numero inteiro; logo (173), he $\sqrt[m]{b}$ numero irracional. O Q. S. D.

180 „ Se a he numero primo, se m, p, e q saõ „ numeros inteiros, sendo $m > q$, e se a^{mp+q} he a „ maior potencia de a, que he divisor do numero in- „ teiro b: digo que $\sqrt[m]{b}$ he numero irracional. „

Dem. Seja $b : a^{mp+q} = c$; logo c he numero inteiro (hyp.), e $b = c \times a^{mp+q}$; e pois que a^{mp+q} he a maior potencia de a, que he divisor de b (hyp.); logo naõ póde ser a medida de c: se se imagina que $\sqrt[m]{b} = d$, sendo d numero inteiro, deve ser $d = a^n \times r$, sendo r numero inteiro (169): seja n he tal, que naõ possa ser a medida de r: por ser $d = a^n \times r$, e $d = \sqrt[m]{b}$; logo $\sqrt[m]{b} = a^n \times r$; logo $b = (a^n \times r)^m$; logo $b = a^{mn} \times r^m$ (B. Al. art. 123); mas $b = a^{mp+q} \times c$; logo deve ser $a^{mp+q} \times c = a^{mn} \times r^m$; mas mn naõ he igual a $mp+q$, por quanto m he medida de mn, e naõ he de $mp+q$, e he a^{mp+q} a maior potencia de a, que he divisor de $a^{mp+q} \times c$, e he, finalmente, a^{mn} a maior potencia de a, que he divisor de $a^{mn} \times r^m$; logo (90) a equaçaõ $a^{mp+q} \times c = a^{mn} \times r^m$ he hum absurdo; logo naõ póde ser $\sqrt[m]{b}$ numero inteiro; logo (173) $\sqrt[m]{b}$ he numero irracional. O Q. S. D.

181 Pois que a raiz de hum producto he o producto das raizes dos factores (B. Al. art. 128) ; logo (178) „ a raiz de hum producto de potencias de nu-„ meros primos he numero inteiro, sempre que o ex-„ ponente da raiz for divisor de cada hum dos expo-„ nentes das potencias. „

182 Segue-se dos art. 181, 180, 179, e 173 que „ huma raiz de hum numero inteiro composto, he nu-„ mero inteiro ou irracional, confórme o exponente da „ raiz he, ou naõ divisor de cada hum dos exponen-„ tes das mais altas potencias de numeros primos, cu-„ jas potencias saõ divisores do dito numero compos-„ to. „

183 „ Se a, p, e q saõ numeros inteiros, e he a „ numero primo, sem que seja medida de q: digo que „ $\sqrt[m]{(ap+q)a}$ he numero irrracional. „

Dem. Se se imagina que he $\sqrt[m]{(ap+q)a} = b$, sendo b numero inteiro, deve ser $b = ac$, em que c he numero inteiro (169); logo $\sqrt[m]{(ap+q)a} = ac$; logo $a(ap+q) = (ac)^m = a^m \times c^m$: por ser p numero inteiro, e $q < a$ (hyp.), naõ póde ser a divisor de $ap+q$; e por isso a he huma só vez factor em $a(ap+$

q); mas a he mais de huma vez factor em $a^m \times c^m$; logo (90) a equação $(ap+q)a = a^m \times c^m$ he hum absurdo; logo $\sqrt[m]{(ap+q)a}$, ou b naõ póde ser numero inteiro; logo (173) $\sqrt[m]{(ap+q)a}$ he numero irracional. O Q. S. D.

184 Segue-se immediatamente que „ se hum numero inteiro compete á fórma $9n+3$, ou á fórma $9n+6$, o dito numero naõ tem raiz commensuravel, seja qualquer que for o exponente da raiz. „

185 „ A raiz de hum numero inteiro, que termina em cifras, he irracional, sempre que o exponente da raiz naõ for medida do numero das cifras. „

Dem. Seja m o exponente da raiz; logo $mp+q$ deve ser o numero das cifras, sendo $p=0$, ou numero inteiro, e q numero inteiro, e menor que m. Supondo agora que N representa numero inteiro, que tem algarismo significativo na casa das unidades, he $N \times 10^{mp+q}$ a expressaõ geral de todos os numeros inteiros, que saõ o objecto da nossa proposiçaõ.

He $10 = 2 \times 5$; logo $10^{mp+q} = 2^{mp+q} \times 5^{mp+q}$ (B. Al. art. 123); logo $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q} = N \times 10^{mp+q}$. Se se imagina que $\sqrt[m]{N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q}} = d$, sendo d numero inteiro, deve ter d por divisores os numeros 2, e 5 (169): supondo pois que 2^r he a maior potencia de 2, que he divisor de a, e que 5^s he a maior potencia de 5, que he divisor de a; deve ser $a = 2^r \times 5^s \times b$ sendo b numero inteiro (79, e

128) ; pelo que, temos $\sqrt[m]{N} \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q} = 2^r \times 5^s \times b$; logo $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q} = 2^{mr} \times 5^{ms} \times b^m$ (B. Al. art. 123).

O numero N, por terminar em algarismo significativo, naõ póde ser divisivel exactamente por 2, e por 5 juntamente; e por isso, ou 2^{mp+q} he a maior potencia de 2, que he divisor de $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q}$, ou 5^{mp+q} he a maior potencia de 5, que he divisor de $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q}$: os numeros mr, e ms tem por medida o numero m, e este naõ he medida de $mp+q$; logo naõ póde ser $mr = mp+q$, nem $ms = mp+q$: e por tanto, ou o numero 2 naõ he o mesmo numero de vezes factor em $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q}$ que em $2^{mr} \times 5^{ms} \times b^m$, ou o numero 5 naõ he o mesmo numero de vezes factor em $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q}$ que em $2^{mr} \times 5^{ms} \times b^m$; logo (90) a equaçaõ $N \times 2^{mp+q} \times 5^{mp+q} = 2^{mr} \times 5^{ms} \times b^m$ he hum absurdo; e por tanto naõ póde ser $\sqrt[m]{N \times 10^{mp+q}}$ hum numero inteiro; logo (173) $\sqrt[m]{N \times 10^{mp+q}}$ he numero irracional. O Q. S. D.

186 Logo „ o numero inteiro, que naõ termina em
„ numero par de cifras, he quadrado imperfeito. O
„ numero inteiro, que naõ termina em 3, 6, 9, etc. ci-
„ fras, he cubo imperfeito. „

Das series das potencias semelhantes dos termos de huma progressaõ arithmetica, cujos termos saõ numeros inteiros.

(187) DEduzindo da serie a, b, c, d, e, etc. a serie $(b-a), (c-b), (d-c), (e-d)$, etc., e desta deduzindo a serie $(c-b)-(b-a), (d-c)-(c-b), (e-d)-(d-c)$, etc.; e assim por diante, e se desta sorte se chegar a ter huma serie, cujos termos sejaõ todos iguaes entre si: dizemos que a serie primitiva a, b, c, etc. *he capaz de differenças constantes*: a primeira serie deduzida da primitiva chama-se *serie de primeiras differenças*; a deduzida da de primeiras differenças chama-se *serie de segundas differenças*, e assim por diante; finalmente, a serie de differenças, cujos termos saõ todos iguaes entre si, chama-se *serie de differenças constantes*.

(188) Achar o termo geral de qualquer serie capaz de differenças constantes.

Seja a, b, c, d, e, f, e g, etc., a serie capaz de differenças constantes; logo a serie de primeiras differenças he $(b-a), (c-b), (d-c), (e-d), (f-e), (g-f)$, etc. Logo a serie de segundas differenças he

$$(c-b)-(b-a)=c-2b+a$$
$$(d-c)-(c-b)=d-2c+b$$

$(e-d)-(d-c)=e-2d+c$

$(f-e)-(e-d)=f-2e+d$

$(g-f)-(f-e)=g-2f+e$

etc.

Logo a serie de terceiras differenças he ....

$(d-2c+b)-(c-2b+a)=d-3c+3b-a$

$(e-2d+c)-(d-2c+b)=e-3d+3c-b$

$(f-2e+d)-(e-2d+c)=f-3e+3d-c$

$(g-2f+e)-(f-2e+d)=g-3f+3e-d$

etc.

Logo a serie de quartas differenças he ....

$(e-3d+3c-b)-(d-3c+3b-a)=e-4d+6c-4b+a$

$(f-3e+3d-c)-(e-3d+3c-b)=f-4e+6d-4c+b$

$(g-3f+3e-d)-(f-3e+3d-c)=g-4f+6e-4d+c$

etc.

Suppondo agora ....

$A=b-a$

$B=c-2b+a$

$C=d-3c+3b-a$

$D=e-4d+6c-4b+a$

$E=f-5e+10d-10c+5b-a$

$F=g-6f+15e+20d-15c+5b+a$

etc.

temos as seguintes equaçoens ....

1.ª $b = A + a \ldots\ldots (A)$

2.ª $c = B + 2b - a$

3.ª $d = C + 3c - 3b + a$

4.ª $e = D + 4d - 6c + 4b - a$

5.ª $f = E + 5e - 10d + 10c - 5b + a$

6.ª $g = F + 6f - 15e + 20d - 15c + 6b - a$

Substituindo agora na 2.ª equaçaõ, em lugar de b o seu valor, tirado da equaçaõ (A), temos .....

$$(B) \ldots c = a + 2A + B$$

e por tanto, o 3°. termo da serie primitiva he a somma dos productos, que resultaõ dos numeros a, A, e B multiplicados respectivamente pelos termos do desenvolvimento de $(1+1)^2$.

Substituindo na 3.ª equaçaõ em lugar de b, e c os seus respectivos valores, tirados das equaçoens (A), e (B), temos ....

$$(C) \ldots d = a + 3A + 3B + C$$

e por tanto, o 4.° termo da serie primitiva he a somma dos productos, que resultaõ das quantidades a, A, B, e C multiplicadas respectivamente pelos termos do desenvolvimento de $(1+1)^3$.

Substituindo, finalmente, na 4.ª equaçaõ em lugar de b, c, e d os seus respectivos valores, tirados das equaçoens (A), (B), e (C), temos ....

$$(D) \ldots e = a + 4A + 6B + 4C + D.$$

e por tanto, o 5.° termo da serie primitiva he a somma dos productos, que resultaõ das quantidades a, A, B, C, e D multiplicadas respectivamente pelos termos do desenvolvimento de $(1+1)^4$.

Pelo que, suppondo que n he o numero dos termos da serie primitiva, deve ser ....

$$a+\frac{(n-1)}{1}A+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\quad 2.}B+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\quad 2}\times$$

$$\frac{(n-3)}{3}C+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}D+\text{etc.}$$

o termo geral da dita serie, ou de huma serie capaz de differenças constantes. O Q. S. P.

(189) Achar o termo sommatorio de qualquer serie, que seja capaz de differenças constantes.

Se no segundo membro da equaçaõ (B) se suprimir a, e se tomar a em lugar de A, e A em lugar de B, teremos $2a+A$; e porque $A=b-a$; logo ..

$$a+b=2a+A$$

Se no segundo membro da equaçaõ (C) se suprimir o primeiro termo a, e se depois se tomar a em lugar de A, A em lugar de B, e B em lugar de C, teremos $3a+3A+B$; e porque $A=b-a$, e $B=c-2b+a$; logo ....

$$a+b+c=3a+3A+B$$

Discorrendo do mesmo módo se achará; que a somma dos quatro primeiros termos da serie primitiva he

$$4a+6A+4B+C$$

e que a somma dos cinco primeiros termos he .....

$$5a + 10A + 10B + 5C + D$$

Pelo que, a fórmula geral da somma, ou termo sommatorio de qualquer serie capaz de differenças constantes, de que n he o numero dos termos, he a seguinte ....

$$na + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} A + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3} B +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4} C + \text{etc.}$$

em cuja fórmula a he o 1°. termo da serie propósta, A o 1.° termo da serie de primeiras differenças, B o 1°. termo da serie de segundas differenças; e assim por diante: finalmente, a dita fórmula termina no termo, em que he factor o 1.° termo da serie de differenças constantes. O Q. S. P.

190 „ Achar a somma da serie dos quadrados dos „ termos da progressaõ arithmetica $p, p+d, p+2d$, „ etc., de que n he o numero dos termos.„

Soluçaõ.

Serie de primeiras differenças ....

$$(p+d)^2 - p^2 = 2pd + d^2$$

$$(p+2d)^2 - (p+d)^2 = 2pd + 3d^2$$

$$(p+3d)^2 - (p+2d)^2 = 2pd + 5d^2$$

$$(p+4d)^2 - (p+3d)^2 = 2pd + 7d^2$$

etc.

Serie de segundas differenças ....

$$(2pd+3d^2) - (2pd+d^2) = 2d^2$$
$$(2pd+5d^2) - (2pd+3d^2) = 2d^2$$
$$(2pd+7d^2) - (2pd+5d^2) = 2d^2$$

etc.

Logo a serie p^2, $(p+d)^2$, $(p+2d)^2$, $(p+3d)^2$, etc. he capaz de differenças constantes. Contrahindo agora ao prezente caso a fórmula, que se achou no art. precedente, temos ....

$$np^2 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}(2pd+d^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.2d^2$$

por somma da serie propósta. O Q. S. P.

191 Suppondo agora $p=1$, e $d=1$, he p, $p+d$, $p+2d$, $p+3d$, etc. a serie dos numeros naturaes; e temos $2pd+d^2=3$, e $2d^2=2$; e por tanto „ a „ somma da serie dos quadrados dos termos da se- „ rie dos numeros naturaes, de que n he o numero „ dos termos, he a seguinte fórmula

$$n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \times 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \times 2,$$

„ que se reduz a esta $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$. „

192 „ Achar a somma dos cubos dos termos da „ progressaõ arithmetica p, $p+d$, $p+2d$, etc., de que „ n he o numero dos termos. „

Soluçaõ.

A serie de primeiras differenças he . . . .

$(p+d)^3 - p^3 \; . \quad = 3p^2 d + 3pd^2 + d^3$

$(p+2d)^3 - (p+d)^3 = 3p^2 d + 9pd^2 + 7d^3$

$(p+3d)^3 - (p+2d)^3 = 3p^2 d + 15pd^2 + 19d^3$

$(p+4d)^3 - (p+3d)^3 = 3p^2 d + 21pd^2 + 37d^3$

$(p+5d)^3 - (p+4d)^3 = 3p^2 d + 27pd^2 + 61d^3$

etc.

A serie de segundas differenças he . . . .

$(3p^2 d + 9pd^2 + 7d^3) - (3p^2 d + 3pd^2 + d^3)$
$= 6pd^2 + 6d^3$

$(3p^2 d + 15pd^2 + 19d^3) - (3p^2 + 9pd^2 + 7d^3)$
$= 6pd^2 + 12d^3$

$(3p^2 d + 21pd^2 + 37d^3) - (3p^2 d + 15pd^2 + 19d^3)$
$= 6pd^2 + 18d^3$

$(3p^2 d + 27pd^2 + 61d^3) - (3p^2 d + 21pd^2 + 37d^3)$
$= 6pd^2 + 24d^3$

etc.

A serie de terceiras differenças he . . . .

$(6pd^2 + 12d^3) - (6pd^2 + 6d^3) = 6d^3$

$(6pd^2 + 18d^3) - (pd^2 + 12d^3) = 6d^3$

etc.

Logo a serie propósta $p^3, (p+d)^3, (p+2d)^3$, etc. he capaz de differenças constantes. Contrahindo pois ao prezente caso a fórmula geral do art. 189, temos

$$n \times p^3 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \times (p^2 d + 3 p d^2 + d^3) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} \times \frac{(n-2)}{3} (6 p d^2 + 6 d^3) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \times 6 d^3$$

por fórmula da somma da serie propósta, de que n he o numero dos termos. O Q. S. P.

193 Suppondo agora $p = 1$, e $d = 1$; he $p, p + d, p + 2d, p + 3d$, etc. a serie dos numeros naturaes; e temos $(3p^2 d + p d^2 + d^3) = 7$, $(6 p d^2 + 6 d^3) = 12$, e $6 d^3 = 6$: e por tanto ,, a somma dos cubos dos termos da serie dos numeros naturaes, de que o numero dos termos he n, he a seguinte fórmula

$$n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \times 7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \times 12 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \times \frac{(n-2)(n-3)}{3.\ 4} \times 6.\text{ ,,}$$

194 Finalmente, deduzindo-se de huma serie de potencias semelhantes dos termos de huma progressaõ arithmetica, as series de primeiras, de segundas, de terceiras, etc. differenças, se encontrará huma serie de differenças constantes, e se achará que o numero das series de differenças, desde a de primeiras differenças até á de differenças constantes inclusivamente, he o expoente da potencia, que se contempla: substituindo pois na fórmula

$$n a + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} A + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} B + \text{etc.}$$

do art. 189 em lugar de a o 1°. termo da serie propósta; em lugar de A o 1.º termo da serie de primeiras differenças; em lugar de B o 1.º termo da serie de segundas differenças; e assim por diante, athe se contemplar o 1.º termo da serie de differenças constantes, se terá a fórmula para calcular a somma da serie propósta.

195 Pois que hum termo qualquer de huma serie de differenças he o immediato do seu correspondente da serie immediata precedente menos o dito termo correspondente: por exemplo, o primeiro termo da segunda serie he o segundo da primeira menos o primeiro da segunda; o segundo da segunda he o terceiro da primeira menos o segundo da primeira: logo contemplando as series de differenças desde a de differenças constantes para a serie de primeiras differenças, temos que hum termo qualquer de huma serie de differenças, he a somma do immediato precedente com o termo seu correspondente da serie immediata precedente; por exemplo, o segundo termo da segunda serie he o primeiro da segunda sommado com o primeiro da primeira; o setimo da terceira he a somma do sexto da terceira com o sexto da segunda. Daqui se tira hum methodo facil para lavrar huma taboa das potencias inteiras semelhantes dos termos da serie dos numeros naturaes; cujo methodo he huma operaçaõ inversa á de buscar a serie de differenças constantes: eis-aqui hum exemplo sobre os cubos.

Operaçaõ para achar a serie de differenças constantes, incluida na serie dos cubos dos termos da serie dos numeros naturaes.

Serie de cubos ----------	1	8	27	64	125
		— 1	— 8	— 27	— 64
Serie de primeiras differenças ---		7	19	37	61
			— 7	— 19	— 37
Serie de segundas differenças -------			12	18	24
				— 12	— 18
Serie de differenças constantes -------------				6	6

Operaçaõ para achar a serie dos cubos dos termos da serie dos numeros naturaes.

Serie de dif. const.				6	6	6	6	6	etc.
				+12	+18	+24	+30	+36	etc.
Dª. de 2ªs. dif.			12	18	24	30	36	42	etc.
			+7	+19	+37	+61	+91	+127	etc.
Dª. de 1ªs ...		7	19	37	61	91	127	169	etc.
		+1	+8	+27	+64	+125	+216	+343	etc.
Cubos --	1	8	27	64	125	216	343	512	etc.
Raizes -	1	2	3	4	5	6	7	8	etc.

Dos numeros polygonos.

196 Os numeros *polygonos* saõ as sommas dos termos consecutivos de huma progressaõ arithmetica, de

que o primeiro termo he a unidade, e a differença he hum numero inteiro: por exemplo 1, (1 + 2), (1 + 2 + 3), (1 + 2 + 3 + 4), etc., ou 1, 3, 6, 10, etc. saõ numeros polygonos.

197 Os numeros polygonos denominaõ-se *triangulares*, *quadrados*, *pentagonaes*, *exagonaes*, etc. conforme a differença da progressaõ arithmetica (que se póde chamar *progressaõ geradora*) he 1, 2, 3, ou 4, etc.

198 Denomina-se *serie natural de numeros polygonos* a huma serie ascendente, cujos termos saõ os numeros polygonos de huma mesma classe, principiando a serie pela unidade, e seguindo-se depois os numeros polygonos de huma mesma classe, sendo cada hum delles, o immediato inferior ao que se lhe segue.

199 O numero, que representa a classe de hum numero polygono chama-se *indice*; por exemplo, 3 he o indice do numero triangular; 4 he o indice do numero quadrado; e 5 he o indice do numero pentagonal, etc. Advirta-se que o indice de hum numero polygono, ou de huma serie de numero polygonos he nestas investigaçoens representado por d.

200 Segue-se que „ a differença da progressaõ gera-„ dora de hum numero polygono, ou de huma serie de „ numeros polygonos he $d - 2$. „

201 O numero dos termos da progressaõ geradora de hum numero polygono chama-se *raiz* do dito numero

mero polygono. Advirta-se que n representará a raiz de hum numero polygono de qualquer classe.

202 Segue-se dos art. 196, 198, e 201 que n representa o lugar de hum numero polygono na sua respectiva serie; isto he, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., conforme o numero polygono he 1.°, 2.°, ou 3.°, etc. termo da sua respectiva serie.

203 Pois que hum numero polygono he a somma de huma progressaõ arithmetica, de que o primeiro termo he a unidade, a differença he o indice menos duas unidades, e o numero dos termos he a raiz do dito numero polygono (196, 200, e 201); logo (B. Al. art. 231, e 232) „a fórmula $\left(1+(1+\overline{n-1}\times\overline{d-2})\right)$ „$\times\frac{n}{2}$, que se reduz a esta $\frac{(n^2-n)(d-2)}{2}+n$ he „o termo geral de huma serie natural de numeros „polygonos, de que d he o indice, e n o numero dos „termos, ou a fórmula do numero polygono, de que „n he a raiz, e d o indice.„

204 Substituindo agora no termo geral da serie geral dos numeros polygonos, successivamente 3, 4, 5, 6, etc. em lugar de d, ou do indice, temos a seguinte taboada de fórmulas dos numeros triangulares, quadrados, pentagonaes, exagonaes, etc.

Taboada de fórmulas de numeros polygonos.

III. gono $\frac{n(n-1)\times 1}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$

IV. gono $\frac{n(n-1)\times 2}{2} + n = n^2$

V. gono $\frac{n(n-1)\times 3}{2} + n = \frac{3n^2-n}{2}$

VI. gono $\frac{n(n-1)\times 4}{2} + n = 2n^2-n$

VII. gono $\frac{n(n-1)\times 5}{2} + n = \frac{5n^2-3n}{2}$

VIII. gono $\frac{n(n-1)\times 6}{2} + n = 3n^2-2n$

IX. gono $\frac{n(n-1)\times 7}{2} + n = \frac{7n^2-5n}{2}$

X. gono $\frac{n(n-1)\times 8}{2} + n = 4n^2-3n$

XI. gono $\frac{n(n-1)\times 9}{2} + n = \frac{9n^2-7n}{2}$

XII. gono $\frac{n(n-1)\times 10}{2} + n = 5n^2-4n$

205 Suppondo que N representa hum numero polygono qualquer, deve ser pelo art. 203, $N = \frac{(n^2-n)(d-2)}{2} + n$; logo desembaraçando n, temos que ,, a equaçaõ

$$n = \frac{(d-4) + \sqrt{(8\times(d-2)N + (d-4)^2)}}{2(d-2)}$$

„ he a fórmula para calcular a raiz n de hum nume-
„ ro polygono N, por meio do dito numero, e do
„ seu indice d. „

206 Segue-se que „ se N he hum numero polygo-
„ no, e d o seu indice, deve ser $8(d-2)N +$
„ $(d-4)^2$ hum quadrado prefeito, e consequentemente,
„ se $8(d-2)N+(d-4)^2$ naõ he quadrado per-
„ feito, entaõ naõ póde ser N hum numero polygono,
„ de que d he indice. „

207 Pois que $N = \frac{(n^2-n)(d-2)}{2} + n$ (203);

logo „ $d = \frac{2(N-n)}{n(n-1)} + 2$ he a fórmula para cal-
„ cular o indice d de hum numero polygono N, por
„ meio do mesmo numero, e da sua raiz n. „

208 Segue-se que se N he hum numero polygono, e n a sua raiz, deve ser $n(n-1)$ hum divisor exacto de $2(N-n)$: e consequentemente „ se $2(N-n)$
„ naõ he multiplo de $n(n-1)$, naõ póde ser N hum
„ numero polygono, de que a raiz he n. „

209 Pois que $d-1$ he o 1.° termo da serie de primeiras differenças, que se deduz da serie natural de numeros polygonos, de que o indice he d, e he $d-2$ o 1.° termo da serie de segundas differenças, que neste caso he serie de differenças constantes: segue-se que substituindo na fórmula

$$an + \frac{n(n-1)}{2}A + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}B + \text{etc.}$$

do art. 189 a unidade em lugar de a, $d-1$ em lugar de A, e $d-2$ em lugar de B,, o resultado

$$n + \frac{n(n-1)}{2} \times (d-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \times$$

$$(d-2),$$

,, que se reduz a $\frac{(d-2)n^3 + 3n^2 + (5-d)n}{6}$

,, he a fórmula para calcular a somma de huma serie ,, natural de numeros polygonos, de que n he o numero dos termos, e d o indice.,,

210 Substituindo agora successivamente 3, 4, 5, 6, etc. em lugar de d na fórmula

$$\frac{(d-2)n^3 + 3n^2 + (5-d)n}{6}$$

os resultados saõ respectivamente as fórmulas para calcular cada huma das differentes series naturaes de numeros polygonos: taes saõ as seguintes fórmulas, em as quaes n representa o numero dos termos.

Fórmulas dos termos sommatorios das series naturaes dos numeros polygonos, de que n *he raiz.*

III. gonos	$\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$
IV. gonos	$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$
V. gonos	$\frac{3n^3+3n^2}{6}$
VI. gonos	$\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$
VII. gonos	$\frac{5n^3+3n^2-2n}{6}$
VIII. gonos	$\frac{6n^3+3n^2-3n}{6}$
IX. gonos	$\frac{7n^3+3n^2-4n}{6}$
X. gonos	$\frac{8n^3+3n^2-5n}{6}$
XI. gonos	$\frac{9n^3+3n^2-6n}{6}$
XII. gonos	$\frac{10n^3+3n^2-7n}{6}$

etc.

211 Com as ballas fórmaõ-se pilhas, que tem por baze hum triangulo equilatero, e o numero de ballas, que contém as camadas, contadas do vertice para a baze, constituem huma serie natural de numeros triangulares quando a pyramide, ou pilha he completa; e

por isso, e por meio da fórmula $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ se calcula o numero das ballas de huma tal pilha, em que n representa o numero das ballas, que contém hum lado qualquer da baze da pilha triangular: por exemplo, se o lado da baze da pilha contém 20 ballas, o numero das ballas, que comprehende a dita pilha he $\frac{20^3+3\times 20^2+2\times 20}{6}$, ou 1560.

212 Seja proposto sendo possivel formar com 1560 ballas de hum mesmo calibre huma pilha triangular.

Soluçaõ. 1.° Suppondo que x representa o numero das ballas, que deve conter o lado da baze da dita pilha, deve ser segundo o art. precedente .... $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}=1560$; logo $x^3+3x^2+2x=9360$: e por isso $x^2+3x+2=\frac{9360}{x}$.

2.° Pela natureza da questaõ deve ser x hum numero inteiro; e porque $x^2+3x+2=\frac{9360}{x}$ (1.°); logo deve ser x hum divisor de 9360.

3.° Pois que $x^3+3x^2+2x=9360$ (1.°), e naõ póde ser $x<3$; logo $x^3>\frac{9360}{3}$, e por tanto he $x>\sqrt[3]{3120}$: e pois que $x^3=9360-3x^2-2x$, deve ser $x<\sqrt[3]{9360}$: pelo que, o valor de x deve ser hum divisor de 9360, que naõ seja menor que 15, nem maior que 21.

4.° Pois que $9360 = 2^4 . 3^2 . 5 . 13$; logo o valor de x, deve ser hum dos divisores 20, 18, 16, e 15 de 9360: substituindo, finalmente, 20 em lugar de x na equaçaõ $x^3 + 3x^2 + 2x = 9360$, a dita equaçaõ naõ se destróe; e por tanto, com 1560 ballas de hum mesmo calibre fórma-se huma pilha triangular completa, dando-se 20 ballas ao lado da baze. O Q. S. P.

N. B. Se nenhum dos divisores 20, 18, 16, e 15 satisfizesse a equaçaõ $x^3 + 3x^2 + 2x = 9360$, a questaõ seria impossivel.

213 Tambem se fórmaõ pilhas, que tem por baze hum quadrado, em cujo caso a fórmula para calcular o numero das suas ballas he $\dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, em que n represénta o numero de ballas do lado da baze da pilha (210): por quanto os numeros de ballas das camadas da dita pilha, consideradas as camadas do vertice para a baze, constituem a serie dos quadrados dos termos da serie dos numeros naturaes: pelo que, se o lado da baze da pilha quadrada contém 25 ballas, o numero de ballas, que fórmaõ a dita pilha he ......
$\dfrac{2 \times 25^3 + 3 \times 25^2 + 25}{6}$, ou 5525.

214 Seja proposto sendo possivel formar com 5525 ballas de hum mesmo calibre huma pilha quadrada.

Soluçaõ. Suppondo que x reprezenta o numero de ballas, que deve conter o lado da baze da pilha quadrada, he $\dfrac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = 5525$ (213); logo

$2x^3 + 3x^2 + x = 33150$; logo $2x^2 + 3x + 1 = \frac{33150}{x}$; e porque x he numero inteiro pela natureza da questaõ; logo deve ser x hum divisor de 33150.

Ve-se que he $x > 3$, e por isso $2x^3 > 3x^2$, e $>$ x; logo $2x^3 > \frac{33150}{3}$; logo $x^3 > \frac{33150}{6}$; logo $x >$ $\sqrt[3]{5525}$; de que se segue que o menor valor de x naõ póde ser menor que 17. Por ser $2x^3 + 3x^2 + x$ $= 33150$, he $2x^3 < 33150$; logo $x < \sqrt[3]{\frac{33150}{2}}$, e por isso o maior valor de x naõ póde exceder a 25: de tudo que fica dito se conclue, que o valor de x para satisfazer á equaçaõ $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = 5525$, ou á equaçaõ $2x^3 + 3x^2 + x = 33150$, deve ser hum divisor de 33150, que naõ seja menor que 17, nem maior que 25; e pois que os divisores de 33150 comprehendidos naquelles limites, saõ 17, e 25; logo ou o numero 17, ou o numero 25 he o valor de x, se a questaõ he possivel: mas $\frac{2 \times 25^3 + 3 \times 25^2 + 25}{6} = 5525$; logo com 5525 ballas de hum mesmo calibre fórma-se huma pilha quadrada completa, dando 25 ballas ao lado da baze da pilha. O Q. S. D.

215 Tambem se formaõ com as ballas humas pilhas denominadas *oblongas* ou *rectangulares*: huma pilha oblonga he compósta de camadas rectangulares, os numeros

numeros de ballas dos lados das camadas da menor face da pilha constituem a progressaõ dos numeros naturaes, e os lados das camadas da maior face constituem huma progressaõ arithmetica, cuja differença he a unidade; de sorte que os lados das camadas da menor face da pilha saõ os termos da serie $1, 2, 3, \ldots . n$, sendo n o lado da baze, e os lados das camadas da maior face saõ os termos da serie $1+a, 2+a, 3+a, \ldots . n+a$: logo os termos da serie $(1+a)$, $2(2+a)$, $3(3+a), \ldots \ldots . n(n+a)$, ou os da serie $1+a$, 2^2+2a, $3^2+3a, \ldots . n^2+na$ saõ respectivamente as camadas tomadas consecutivamente do vertice da pilha: logo o numero das ballas da dita pilha he $(1+2^2+3^2+ \ldots \ldots +n^2)+(a+2a+3a+\ldots +na)$; e porque $1+2^2+3^3 + \ldots . +n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ (art. 210); e he $(a+2a+3a+\ldots . +na)=(a+na)\frac{n}{2}= \ldots \ldots \frac{(n^2+n)a}{2}$ (B. Ar. art. 232); logo $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{(n^2+n)a}{2}$ he a fórmula para calcular o numero de ballas, que contém huma pilha oblonga, da qual o menor lado da baze he n, e o maior lado da mesma baze he $n+a$. Suppondo pois que o menor lado da baze de huma pilha rectangular he de 8 ballas, e o maior de 13, ou de $8+5$, he $\frac{2\times 8^3+3\times 8^2+8}{6}+$

$\frac{(8^2+8)\times 5}{2}$, ou 384 o numero de ballas, que contém a dita pilha rectangular.

216 Seja proposto sendo possivel formar com 384 ballas de hum mesmo calibre huma pilha oblonga.

Soluçaõ. 1.º Seja x o menor lado da baze, e seja $x+y$ o maior lado; logo pelo art. precedente temos $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}+\frac{(x^2+x)y}{2}=384$; logo $2x^3+3x^2+x+3x^2y+3xy=2304$; logo $y=$ .... $\frac{2304-(2x^3+3x^2+x)}{3x^2+3x}=\frac{2304}{3x^2+3x}-\frac{2x^3+3x^2+x}{3x^2+3x}$ $=\frac{768}{x^2+x}-\frac{2x^2+3x+1}{3x+3}$; mas $\frac{2x^2+3x+1}{3x+3}=$ .... $\frac{(2x+1)(x+1)}{3(x+1)}$; logo $y=\frac{768}{x^2+x}-\frac{2x+1}{3}$; logo $3y+(2x+1)=\frac{768\times 3}{x^2+x}$: e pois que pela natureza da questaõ devem ser numeros inteiros x, e y; logo x^2+x deve ser divisor de 768×3.

2.º Pois que x deve ser numero inteiro maior que a unidade; logo x^2+x deve ser hum numero par (art. 28, 8, e 12), e naõ póde ser menor que 6; por quanto $2^2+2=6$.

3.º Seja x^2+x representado por d; logo $x=$ .. $\frac{\sqrt{(4d+1)}-1}{2}$ (B. Al. art. 100); pois que x he numero inteiro, deve ser $4d+1$ hum quadrado perfeito.

4.º Por ser $x=\frac{\sqrt{(4d+1)}-1}{2}$ (3.º), he $2x+1$

$=\sqrt{(4d+1)}$; logo $3y+\sqrt{(4d+1)}=\frac{768\times 3}{d}$ (1.°)

5.° Seja $\frac{768\times 3}{d}$ representado por q; logo $q>\sqrt{(4d+1)}$, e deve ser $q-\sqrt{(4d+1)}$ hum multiplo de 3 (4.°)

6.° Por ser $2x^3+3x^2+x+3x^2y+3xy=2304$ (1.°), he $x<\sqrt[3]{\frac{2304}{2}}$; logo o maior valor de x naõ póde exceder a 10; e por tanto d, ou x^2+x naõ póde exceder a 110.

7.° Para achar pois em numeros inteiros positivos os valores das incognitas da equaçaõ $384=\ldots\ldots\frac{2x^3+3x^2+x}{6}+\frac{(x^2+x)y}{2}$, deve-se buscar hum divisor d de 768×3 com as seguintes circumstancias: primeira que naõ seja menor que 6, nem exceda a 110 (2.°); segunda que seja $4d+1$ hum quadrado perfeito (3.°): terceira que $\frac{768\times 3}{d}-\sqrt{(4d+1)}$ seja divisivel exactamente por 3 (5.°).

Buscando, finalmente, o dito divisor com as referidas condiçoens, se achará que elle deve ser 72; logo $x=\frac{\sqrt{(72\times 4+1)}-1}{2}=8$, e $y=\frac{768}{72}-\ldots\frac{2\times 8+1}{3}=5$; e com effeito $\ldots\ldots\frac{2\times 8^3+3\times 8^2+8}{6}+\frac{(8^2+8)\times 5}{2}=384$.

Respósta. O maior lado da baze da pilha he de 13 ballas, e o menor de 8.

Das series dos numeros de differentes ordens.

217 „SE nas seguintes series verticalmente des-
„ póstas

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª
a	a	a	a	a	a
b	b'	b''	b'''	b^{IV}	b^{V}
c	c'	c''	c'''	c^{IV}	c^{V}
d	d'	d''	d'''	d^{IV}	d^{V}
e	e'	e''	e'''	e^{IV}	e^{V}
f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

„ he $a = b \times \frac{1}{k}$, $a + b = c \times \frac{2}{k}$, $a + b + c = d \times$
„ $\frac{3}{k}$, e assim por diante; e se he ....

$b' = a + b$	$b'' = a + b'$
$c' = a + b + c$	$c'' = a + b' + c'$
$d' = a + b + c + d$	$d'' = a + b' + c' + d'$
etc.	etc.
$b''' = a + b''$	$\overset{\mathrm{IV}}{b} = a + b'''$
$c''' = a + b'' + c''$	$\overset{\mathrm{IV}}{c} = a + b''' + c'''$
$d''' = a + b'' + c'' + d''$	$\overset{\mathrm{IV}}{d} = a + b''' + c''' + d'''$
etc.	etc.

„ e assim por diante: digo que ....

$$\int^{(m)} = u^{(m)} \times \frac{n}{k + (m - 1)}$$

„ em cuja equaçaõ $\int^{(m)}$ representa a somma de n ter-
„ mos da serie do lugar m, e $u^{(m)}$ significa o termo do
„ lugar $n + 1$ da mesma serie do lugar m. „

Dem. Temos segundo a hyp. ....

$$a + b + c + d = e \times \frac{4}{k} = d'$$

$$a + b + c = d \times \frac{4 - 1}{k} = c'$$

$$a + b = c \times \frac{4 - 2}{k} = b'$$

$$a = b \times \frac{4 - 3}{k} = a$$

$$0 = a \times \frac{4 - 4}{k} = 0$$

e por isso $a+b'+c'+d'=\frac{4}{k}\times(a+b+c+d+e)$ $-\frac{4a+3b+2c+d}{k}$; mas pela hyp. he $(a+b+c$ $+d+e)=e'$; logo $a+b'+c'+d'=\frac{4}{k}\times e'-\ldots$ $\frac{4a+3b+2c+d}{k}$; mas $4a+3b+2c+d=(a+b$ $+c+d)+(a+b+c)+(a+b)+a$, e temos pela hyp.

$$\begin{aligned}
a+b+c+d &= d' \\
a+b+c &= c' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a+b &= b' \\
a &= a
\end{aligned}$$

logo $a+b'+c'+d'=\frac{4}{k}\times e'-\frac{a+b'+c'+d'}{k}$, de que se deduz ....

$$a+b'+c'+d'=e'\times\frac{4}{k+1}$$

Facilmente se entende que he ....

$$a+b'+c'+d'+e' \quad =f'\times\frac{5}{k+1}$$

$$a+b'+c'+d'+e'+f'=g'\times\frac{6}{k+1}$$

etc.

he pois em geral na segunda serie ....

$$\int^{(2)}=u^{(2)}\times\frac{n}{k+1}.$$

Temos pela hyp., e pelo que fica provado que

$$
\begin{aligned}
a + b' + c' + d' &= e' \times \frac{4}{k+1} = d'' \\
a + b' + c' &= d' \times \frac{4-1}{k+1} = c'' \\
a + b' &= c' \times \frac{4-2}{k+1} = b'' \\
a &= b' \times \frac{4-3}{k+1} = a \\
0 &= a \times \frac{4-4}{k+1} = 0
\end{aligned}
$$

e por isso he $a + b'' + c'' + d'' = \frac{4}{k+1} \times (a + b' + c' + d' + e') - \frac{4a + 3b' + 2c' + d'}{k+1}$; mas pela hyp. he $a + b' + c' + d' + e' = e''$; logo $a + b'' + c'' + d'' = \frac{4}{k+1} \times e'' - \frac{4a + 3b' + 2c' + d'}{k+1}$; mas $4a + 3b' + 2c' + d' = (a + b' + c' + d') + (a + b' + c') + (a + b') + a$, e pela hyp. ....

$$
\begin{aligned}
a + b' + c' + d' &= d'' \\
a + b' + c' &= c'' \\
a + b' &= b'' \\
a &= a
\end{aligned}
$$

logo $a + b'' + c'' + d'' = \frac{4}{k+1} \times e'' -$ .... $\frac{a + b'' + c'' + d''}{k+1}$; logo desembaraçando $a + b'' + c'' + d''$, temos ....

$$a + b'' + c'' + d'' = e'' \times \frac{4}{k+2}$$

Facilmente se entende que he ....

$$a + b'' + c'' + d'' + e'' \quad = f'' \times \frac{5}{k+2}$$

$$a + b'' + c'' + d'' + e'' + f'' = g'' \times \frac{6}{k+2}$$

etc.

he pois em geral na terceira serie ....

$$\int^{(3)} = u^{(3)} \times \frac{n}{k+2}$$

De semelhante modo se concluirá que..........

$$\int^{(4)} = u^{(4)} \times \frac{n}{k+3}$$

$$\int^{(5)} = u^{(5)} \times \frac{n}{k+4}$$

etc.

Logo em geral temos $\int^{(m)} = u^{(m)} \times \frac{n}{k+(m-1)}$.
O Q. S. D.

218 Pois que $\int^{(m)} = u^{(m)} \times \frac{n}{k+(m-)}$; logo deve ser $\int^{(m)} - u^{(m)} = u^{(m)} \times \frac{n-1}{k+(m-1)}$; logo $\int^{(m)} = u^{(m)} \times \frac{n-1}{k+(m-1)} + u^{(m)}$; logo temos $\int^{(m)} = u^{(m)} \times \frac{(n-1)+(k+\overline{m-1})}{k+(m-1)}$: logo „ o „ termo sommatorio de n termos da serie do lugar „ m, contados os ditos termos desde o primeiro, he

$$u^{(m)} \times \frac{(n-1)+(k+\overline{m-1})}{k+(m-1)}$$

„ em

„ em que $\overset{(m)}{u}$ reprezenta o ultimo termo. „

219 He $\overset{(1)}{\int} = \overset{(1)}{u} \times \frac{(n-1)+k}{k}$ (art. 218);

e porque $\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{\int}$ (hyp.); logo $\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} \times \frac{(n-1)+k}{k}$; mas $\overset{(2)}{\int} = \overset{(2)}{u} \times \frac{(n-1)+(k+1)}{k+1}$ (art. 218.); logo temos

$$\overset{(2)}{\int} = \overset{(1)}{u} \times \frac{(n-1)+k}{k} \times \frac{(n-1)+(k+1)}{k+1}.$$

Pois que he $\overset{(3)}{u} = \overset{(2)}{\int}$ (hyp.), e he $\overset{(3)}{\int} = \overset{(3)}{u} \times \frac{(n-1)+(k+2)}{k+2}$ (art. 218); logo temos pelo que se acaba de provar

$$\overset{(3)}{\int} = \overset{(1)}{u} \times \frac{(n-1)+k}{k} \times \frac{(n-1)+k+1}{k+1} \times \frac{(n-1)+k+2}{k+2}.$$

De tudo se conclue que „ o termo sommatorio „ da serie do lugar m he

$$\overset{(1)}{u} \times \frac{\overline{n-1}+k}{k} \times \frac{n+k}{k+1} \times \frac{\overline{n+1}+k}{k+2} \times \frac{\overline{n+2}+k}{k+3} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{\overline{n+m-2}+k}{k+(m-1)}$$

„ em cuja fórmula n he o numero dos termos, e k „ he hum numero constante, tal que $\overset{(1)}{u} \times \frac{n}{k}$ he a

„ somma de n termos da primeira serie, e $u^{(1)}$ o ter-
„ mo do lugar $n+1$ da mesma primeira serie.„

220 Pois que $u^{(m)} = \int^{(m-1)}$ (hyp.); logo segun-
„ do o art. precedente „ a seguinte fórmula

$$„\ u^{(1)} \times \frac{(n-1)+k}{k} \times \frac{n+k}{k+1} \times \frac{(n+1)+k}{k+2} \times \ldots$$

$$„ \times \frac{(n+m-3+k)}{k+(m-2)}$$

„ he o termo geral da serie do lugar m, sendo o nu-
„ mero dos termos reprezentado por n.„

221 Suppondo agora $a=1$, e $k=1$, temos as seguintes series, que se denominaõ *series dos numeros de differentes ordens*.

Series dos numeros de differentes ordens.						
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª
1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Destas series a primeira chama-se *serie dos numeros de primeira ordem* : a segunda denomina-se *serie de numeros de segunda ordem* : a terceira denomina-se *serie dos numeros de terceira ordem* ; e assim por diante. A serie dos numeros de segunda ordem he a dos numeros naturaes ; a de terceira ordem he dos numeros triangulares (art. 204) ; a serie de quarta ordem tambem se denomina serie dos numeros *pyramidaes* : finalmente , as series dos numeros de differentes ordens tambem se denominaõ *series dos numeros figurados* , ainda que esta denominaçaõ naõ compete senaõ á terceira , e quarta serie .

222 Pois que nas series dos numeros de differentes ordens he $a = 1$, e $k = 1$; logo $u^{(1)} = 1$: e por tanto , segundo o art. 220 ,, o termo geral da serie dos ,, numeros da ordem m he ....

$$\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \ldots \times \frac{n+(m-2)}{m-1}$$

,, em cuja fórmula n reprezenta o numero dos ter- ,, mos , contados desde o primeiro . ,,

223 Dos art. 221, e 219 se segue que ,, o termo ,, sommatorio da serie dos numeros da ordem m he a ,, seguinte fórmula

$$\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \ldots \times \frac{n+(m-1)}{m}.$$

,, em que n reprezenta o numero dos termos . ,,

224 Dando ás series dos numeros de differentes ordens a seguinte disposiçaõ ,

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

temos que se a serie de primeira ordem tem n termos, a de segunda tem igualmente n termos; porém a de terceira ordem contém $n-1$ termos, a de quarta ordem contém $n-2$ termos; e assim por diante.

Pelo que na serie orisontal do lugar n, o primeiro termo he o termo do lugar n da serie de primeira ordem; e por tanto o dito primeiro termo da serie orisontal he a unidade.

O segundo termo da serie orisontal do lugar n, he o termo do lugar n da serie da segunda ordem; logo o dito segundo termo he n, ou $\frac{n}{1}$.

O terceiro termo da serie orisontal do lugar n, he o termo do lugar $n-1$ da serie de terceira ordem; logo (art. 222) o dito terceiro termo he

$\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$, ou $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

O quarto termo da serie orisontal do lugar n he o termo do lugar $n-2$ da serie de quarta ordem; logo segundo o art. 222 he ....

$\frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{3}$, ou $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$

o dito quarto termo da serie orisontal do lugar n.

Segue-se de tudo que „ na precedente desposiçaõ „ das series dos numeros de differentes ordens, a co- „ lumna orisontal do lugar n he a seguinte serie

$1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$, etc., na qual o ultimo ter- „ mo he o que tem por ultimo factor $\frac{n-(n-1)}{n}$, ou $\frac{1}{n}$. „

225 Pois que temos as seguintes equaçoens ....

$$
\begin{array}{lc|c|c|c|c|c}
(1+1)^1 = & 1 & +1 & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\
(1+1)^2 = & 1 & +2 & +1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
(1+1)^3 = & 1 & +3 & +3 & +1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
(1+1)^4 = & 1 & +4 & +6 & +4 & +1 & \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
(1+1)^5 = & 1 & +5 & +10 & +10 & +5 & +1
\end{array}
$$

etc.

e as series orisontaes, que fórmaõ os segundos membros, saõ identicas respectivamente com as precedentes, e formadas do mesmo modo; logo os coefficientes dos termos do desenvolvimento de $(a+b)^n$, sendo n numero inteiro, saõ os termos da seguinte serie ...... $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, etc., sendo o ultimo termo, o que tem por ultimo factor $\frac{n-(n-1)}{n}$ ou $\frac{1}{n}$, cujo ultimo termo he a unidade, como fica provado no art. precedente.

Addiçoens ás investigaçoens sobre os divisores.

226 SEGUE-SE dos art. 112, e 47 que „ se dous „ numeros naõ tem por commum divisor nenhum nu„ mero primo, os ditos dous numeros naõ tem medi„ da commum, ou saõ primeiros entre si.„

227 Segue-se dos art. 226, e 52 que „ se a he nu„ mero primo, e naõ he divisor de b, e os numeros „ m, e n saõ inteiros, a rasaõ $a^m : a^n \pm b$ he irredu„ sivel.„

228 Segue-se dos art. 227, e 71 que „ se a he nu„ mero primo, e naõ he divisor de b, e os numeros „ m, e n saõ inteiros, ha numeros primos, e compós„ tos, que competem á fórmula $a^m \times p \pm (a^n \pm b)$.„

229 „ Se todos os divisores do numero inteiro N

„ saõ comprehendidos na fórmula $2^m \times n + 1$, e ne-
„ nhum numero primo da fórmula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$
„ (que he de numeros primos, e compóstos pelo art.
„ 228) he divisor de N: digo que nenhum numero
„ composto da fórmula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$ he di-
„ visor de N. „

Dem. 1.° Na fórmula $2^m \times n + 1$ o numero n ou he par, ou impar: se he par, he $n = 2n'$, e se he impar, entaõ temos $n = 2n' - 1$; logo ou $2^m \times n + 1 = 2^{m+1} \times n' + 1$, ou $2^m \times n + 1 = 2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$; e por tanto „ todo o numero da fórmula $2^m \times n + 1$,
„ ou compete á fórmula $2^{m+1} \times n' + 1$, ou á fórmula
„ $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$. „

2°. Pois que $(2^{m+1} \times n' + 1) \times (2^{m+1} \times n'' + 1) = 2^{m+1} \times (2^{m+1} \times n' \times n'' + n' + n'') + 1$; e por isso o producto de dous numeros quaesquer da fórmula $2^{m+1} \times n' + 1$ compete á mesma fórmula, e consequentemente „ o producto de dous ou mais numeros da
„ fórmula $2^{m+1} \times n' + 1$ he sempre hum numero da
„ mesma fórmula. „

3.° He certo que nenhum dos numeros da fórmula $2^{m+1} \times n' + 1$ he da fórmula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$; logo (2.°) „ todo o producto de numeros da fórmula

„ $2^{m+1} \times n' + 1$ nunca póde ser numero da fórmula
„ $2^{m+1} n' \times -(2^m - 1)$. „

4.° Segue-se que „ todo o numero composto da fór-
„ mula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$ sempre tem por divi-
„ sor algum numero primo, que naõ he da fórmula
„ $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$. „

5.° Pois que todo o numero da fórmula $2^m \times n + 1$ compete á fórmula $2^{m+1} \times n' + 1$, ou á fórmula $2^{m+1} \times n' - (2^{m'} - 1)$ (1.°); e todo o numero composto da fórmula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$ sempre tem por divisor algum numero primo, que naõ he da fórmula $2^{m+1} \times n' + 1$ (4.°); logo „ se todos os diviso-
„ res do numero inteiro N saõ comprehendidos na
„ fórmula $2^m \times n + 1$, e nenhum numero primo da fór-
„ mula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$ he divisor de N, naõ
„ póde ser divisor de N nenhum numero composto
„ da fórmula $2^{m+1} \times n' - (2^m - 1)$. „ O Q. S. D.

230 „ Se p he divisor de m, $m > 2$, e saõ nume-
„ ros inteiros a, e b: digo que $a^p + b^p$ he divisor
„ de $a^m + b^m$. „

Dem. Temos $(a^m + b^m) : (a^p + b^p) = a^{m-p} - a^{m-2p} \times b^p + a^{m-3p} \times b^{2p} - a^{m-4p} \times b^{3p} +$ etc.

sendo

sendo o ultimo termo do quociente $a^{m-np} \times b^{(n-1)p}$, em que $n = \frac{m}{p}$; logo $a^p + b^p$ he divisor de $a^m + b^m$; pois que cada termo do quociente he numero inteiro. O Q. S. D.

231 Segue-se que „ se m he numero inteiro superior a 2, e se reprezentaõ numeros inteiros a, e b, he $a^m + b^m$ hum numero composto. „

232 „ Se p he divisor de m, e saõ numeros inteiros a, e b: digo que $a^p - b^p$ he sempre divisor de $a^m - b^m$. „

Dem. He $(a^m - b^m) : (a^p - b^p) = a^{m-p} + a^{m-2p} \times b^p + a^{m-3p} \times b^{2p}$ + etc., sendo o ultimo termo do quociente $a^{m-np} \times b^{(n-1)p}$, em que $n = \frac{m}{p}$; e pois que cada termo deste quociente he numero inteiro; logo $a^p - b^p$ he divisor de $a^m - b^m$. O Q. S. D.

233 Segue-se que „ se a, e b saõ numeros inteiros, „ todo o numero da fórmula $a^m - b^m$ naõ póde ser „ primo, sem que seja m numero primo, e juntamente „ $a - b = 1$, ou $a = b + 1$. „

234 „ Se a, e b saõ numeros inteiros, e deve ser „ x numero inteiro, e tambem $\frac{a + x^2}{b - 2x}$: digo que naõ „ póde ser x menor que $-1 + \sqrt{(b - a + 1)}$; que $x =$

„ $-1+\sqrt{b-a+1}$, se $-1+\sqrt{b-a+1}$ he numero
„ inteiro; porém se $-1+\sqrt{b-a+1}$ he numero me-
„ dio entre os numeros inteiros $c-1$, e c, entaõ he
„ $x=c+p$, sendo $p=0$, ou hum certo numero in-
„ teiro. „

Dem. Segundo a hyp. he $b-2x$ divisor de $a+x^2$; logo o maior valor de $b-2x$ he $a+x^2$; e pois que quanto maior he o valor de $b-2x$, menor he o valor, que compete a x; logo o menor valor de x deve nascer de $b-2x=a+x^2$; mas daquella equaçaõ resulta $x^2+2x=b-a$, e por isso $x=-1+\sqrt{(b-a+1)}$ (B. Al. art. 100); logo o menor valor de x, naõ póde ser menor que $-1+\sqrt{(b-a+1)}$.

Sendo $b-2x=a+x^2$, he $b-2x$ divisor de $a+x^2$; e pois que de $b-2x=a+x^2$ resulta $x=-1+\sqrt{(b-a+1)}$ como se acaba de ver; logo se $-1+\sqrt{(b-a+1)}$ he numero inteiro, temos $x=-1+\sqrt{(b-a+1)}$, para ser $b-2x$ divisor de $a+x^2$.

Se $-1+\sqrt{(b-a+1)}$ naõ he numero inteiro, entaõ como o numero x deve ser inteiro (hyp.), e o seu menor valor naõ póde ser menor que $-1+\sqrt{(b-a+1)}$ como se provou, deve por tanto ser x hum numero inteiro superior a $-1+\sqrt{(b-a+1)}$: se he pois $-1+\sqrt{(b-a+1)}$ hum numero medio entre $c-1$, e c, deve ser $x=c+p$, sendo $p=0$, ou hum certo numero inteiro. O Q. S. D.

235 „ Se os numeros a, b, e c saõ inteiros, e de-

„ ve ser p numero inteiro, e tambem $\frac{a+bp+p^2}{c-2p}$:
„ digo que $p=-\frac{b+2}{2}+\sqrt{(c-a+(\frac{b+2}{2})^2)}$,
„ se $-\frac{b+2}{2}+\sqrt{(c-a+(\frac{b+2}{2})^2)}$ he numero
„ inteiro; porém se $-\frac{b+2}{2}+\sqrt{(c-a+(\frac{b+2}{2})^2)}$
„ he hum numero medio entre os numeros inteiros d
„ -1, e d, entaõ he $p=d+q$, em que $q=0$, ou
„ hum certo numero inteiro.„

Esta verdade se prova como a precedente.

236 „ Methodo para decompor hum numero impar
„ em dous factores sendo possivel.„

1°. Se n he hum numero par, he n^2 numero par (28); logo (8) n^2+n he numero par: se n he numero impar, he n^2 numero impar (28); logo (12) n^2+n he numero par: suppondo agora que N he o numero impar, que se dezeja decompor em dous factores, naõ póde ser $N=n^2+n$, seja n par, ou impar.

2.° Se n he numero par, he n^2 numero par (28); e pois que $2n$ he numero par; logo (8) n^2+n he numero par: se n he numero impar, he n^2 numero impar (28); e pois que $2n$ he sempre numero par; logo n^2+2n he numero impar (10); e porque N he numero impar (hyp.); logo naõ póde ser $N=n^2+2n$, senaõ quando n he numero impar.

3.° Pois que N naõ he quadrado de numero inteiro (hyp.), seja $N = n^2 + d$, sendo n^2 o maior quadrado de numero inteiro, que se comprehende em N; logo $N > (n+1)^2$; mas $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (B. Al. art. 25); logo naõ póde ser N maior que $n^2 + 2n$, sendo n^2 o maior quadrado, de numero inteiro, que se comprehende em N.

Os numeros, que naõ excedem a $n^2 + 2n$, e que saõ ao mesmo passo valores de N, ou que excedem a n^2, saõ $n^2 + 2n$, $n^2 + n$, e $n^2 + d$, sendo $d < 2n$, e diverso de n; mas temos visto (1.°) que naõ póde ser $N = n^2 + n$, e que naõ póde ser $N = n^2 + 2n$, senaõ em o caso de ser n numero impar (2.°); logo ou $N = n^2 + 2n$ sendo n numero impar, ou $N = n^2 + d$, sendo $d < 2n$, e diverso de n.

4.° No caso de ser $N = n^2 + 2n$, temos $N = n(n+2)$; por exemplo, por ser $1443 = 37^2 + 74$, e $74 = 37 \times 2$, he $1443 = 37 \times (37 + 2)$, ou $1443 = 37 \times 39$.

5.° Agora vamos a considerar o caso de ser $N = n^2 + d$, sendo $d < 2n$, e diverso de n. Suppondo que n he o menor dos dous factores, que se pedem de N, o outro naõ póde ser menor que $n+1$; mas $n \times (n+1) = n^2 + n$, e naõ póde ser $N = n^2 + n$ (1.°); logo n, e $n+1$ naõ constituem hum par de cofactores de N. He $n(n+2) = n^2 + 2n$, mas agora consideramos o caso de ser $N < n^2 + 2n$; logo n, e $n+2$ naõ constituem hum par de cofactores de N, no caso, que se contempla. No caso pois de ser $N < n^2 + 2n$, o menor dos dous factores, em que se dezeja de compor N, he menor que n, e consequentemente menor que $\sqrt{N}$. Seja pois $n-x$ o menor dos ditos dous factores; e porque $(n-x)\times(n+x)$ $=n^2-x^2$, e $N=n^2+d$; logo o maior dos sobreditos factores he maior que $n+x$; e por isso seja $n-x$, e $n+x+y$ hum par de cofactores de N.

6.° Pois que N he numero impar, os seus divisores devem ser numeros impares (21), e por isso se n he numero par, deve ser x numero impar, para que $n-x$ seja numero impar (11); e se n he numero impar, deve ser x numero par, para que $n-x$ seja numero impar (11); e por tanto, deve ser x numero impar, ou par, conforme for n par, ou impar.

7.° Pois que sendo n numero par, he x numero impar (6.°); logo $n+x$ he numero impar (10); e pois que $(n+x)+y$ deve ser numero impar (6.°); logo y deve ser numero par (13). Temos visto que sendo n numero impar he x numero par (6.°); logo $n+x$ he numero impar (10); e pois que $(n+x)+y$ deve ser numero impar (6.°); logo (13) deve ser y, ou $(n+x+y)-(n+x)$ numero par: e por tanto sendo possivel de compor N em dous factores, e sendo $N<n^2+2n$, os ditos factores saõ $n-x$, e $n+x+2z$, em os quaes x he par ou impar, conforme n for impar ou par (6.°).

8.° Pois que $n-x$, e $n+x+2z$ he hum par de cofactores de N; logo $N=(n-x)(n+x+2z)$: desembaraçando agora z, temos $z=\dfrac{N-n^2+x^2}{2n-2x}$; e porque $N = n^2 + d$ (hyp.), e por isso $d = N - n^2$; logo $z = \frac{d + x^2}{2n - 2x}$; e pois que z he numero inteiro; logo a questaõ reduz-se prezentemente a achar hum valor de x em numero inteiro, de que resulte ser $2n - 2x$ divisor de $d + x^2$, devendo ser o valor de x hum numero par, ou impar conforme for n numero impar, ou par (6.°).

A continuaçaõ do methodo consiste nos dous art. precedentes, como se ve nos seguintes exemplos, com os quaes ficará bem comprehendido.

Exemplo 1.° Seja proposto decompor 1517 em dous factores sendo possivel.

Soluçaõ. He $1517 = 38^2 + 73$; logo $\frac{73 + x^2}{38 \times 2 - 2x} = z$ (8.°); e deve ser $38 \times 2 - 2x$ divisor de $73 + x^2$; logo (234) naõ póde ser x, menor que $-1 + \sqrt{76 - 73 + 1}$; mas $-1 + \sqrt{76 - 73 + 1} = 1$; e deve ser x numero impar, por ser $38 = n$ numero par (6°.); logo (234) temos $x = 1$; logo $38 - 1$, ou 37 he hum divisor de 1517 (7.°): e com effeito $1517 : 37 = 41$. O Q. S. P.

Exemplo 2.° Seja proposto sendo possivel decompor 6497 em dous factores.

Soluçaõ. He $6497 = 80^2 + 97$; logo (8.°) $z = \frac{97 + x^2}{80 \times 2 - 2x}$; e pois que $80 \times 2 - 2x$ deve ser divisor de $97 + x^2$ (8.°); logo (234) o menor valor de

x naõ póde ser menor que $-1+\sqrt{(80\times 2-97+1)}$; mas $-1+\sqrt{(80\times 2-97+1)}=7$, e deve ser x numero impar, por ser $80=n$ numero par (6.°); logo temos $x=7$ (234); logo (7.°) $80-7$, ou 73 he hum divisor de 6497; e com effeito $6497:73=89$. O Q. S. P.

Exemplo 3°. Seja proposto sendo possivel decompor 6901 em dous factores.

Soluçaõ. He $6901=83^2+12$; logo $\frac{12+x^2}{83\times 2-2x}$ deve ser hum numero inteiro (8.°), ou $83\times 2-2x$ deve ser divisor de $12+x^2$, e sendo x numero par, por ser $83=n$ numero impar (6.°); logo segundo o art. 234 naõ póde ser x menor que $-1+\sqrt{(83\times 2-12+1)}$; e pois que $-1+\sqrt{(83\times 2-12+1)}$ he hum numero medio entre 12, e 13, e deve ser x numero par; logo $x=14+p$, sendo $p=0$, ou numero par (234). Substituindo agora este valor de x em $\frac{12+x^2}{166-2x}$, temos $\frac{208+28p+p^2}{138-2p}$, que he o mesmo que $\frac{70+30p+p^2}{138-2p}+1$; logo $138-2p$ he divisor de $70+30p+p^2$; logo segundo o art. 235 naõ póde ser p menor que $-16+\sqrt{(138-70+16^2)}$; mas $-16+\sqrt{(138-70+16^2)}=2$; logo (235) he $p=2$; mas $x=14+p$; logo $x=14+2=16$; logo (7.°) he $83-16$, ou 67 hum divisor de 6901; e com effeito $6901:67=103$. O Q. S. P.

Exemplo. 4.° Seja proposto sendo possivel decompor 195667 em dous factores.

Soluçaõ. He $195667 = 442^2 + 303$; logo (8.°) he $\frac{303 + x^2}{442 \times 2 - 2x}$ numero inteiro, e juntamente deve ser x hum numero impar (6.°); logo (234) o menor valor de x naõ póde ser menor que $-1 + \sqrt{(884 - 303 + 1)}$; e porque $-1 + \sqrt{(884 - 303 + 1)}$ he hum numero medio entre 24, e 25, e deve ser x numero impar, por ser $442 = n$ numero par (6°.); logo pelo art. 234 temos $x = 25 + p$: substituindo agora este valor de x em $\frac{303 + x^2}{442 \times 2 - 2x}$, temos $\frac{928 + 50p + p^2}{834 - 2p} = 1 + \frac{94 + 52p + p^2}{834 - 2p}$; logo $834 - 2p$ deve ser divisor de $94 + 52p + p^2$, sendo p numero par, ou $p = 0$; logo (235) naõ póde ser p menor que $-27 + \sqrt{(834 - 94 + 27^2)}$; e pois que $-27 + \sqrt{(834 - 94 + 27^2)}$ he hum numero medio entre 11, e 12; logo $p = 12 + q$ (235). Substituindo este valor de p em $\frac{94 + 52p + p^2}{834 - 2p}$, temos $\frac{862 + 76q + q^2}{810 - 2q} = 1 + \frac{52 + 78q + q^2}{810 - 2q}$; logo $810 - 2q$ deve ser divisor de $52 + 78q + q^2$, sendo q hum numero inteiro; logo (235) naõ póde ser q menor que $-40 + \sqrt{(810 - 52 + 40^2)}$; mas $-40 + \sqrt{(810 - 52 + 40^2)}$ he hum numero medio entre 8, e 9, e deve ser q numero par; logo

logo (235) naõ póde ser q menor que 10: seja pois $q = 10 + r$.

Substituindo este valor de q em $\frac{52 + 78q + q^2}{810 - 2q}$, temos $\frac{932 + 98r + r^2}{790 - 2r} = \frac{142 + 100r + r^2}{790 - 2r} + 1$; logo $790 - 2r$ deve ser divisor de $142 + 100r + r^2$; logo (235) naõ póde ser r menor que $-51 + \sqrt{(790 - 142 + 51^2)}$; mas $-51 + \sqrt{(790 - 142 + 51^2)} = 6$; logo (235) temos $r = 6$.

Pois que $q = 10 + r$, e $r = 6$; logo $q = 10 + 6 = 16$; mas $p = 12 + q$; logo $p = 12 + 16 = 28$; mas $x = 25 + p$; logo $x = 25 + 28 = 53$; logo (7.°) $442 - 53 = 389$ he divisor de 195667; e com effeito $195667 : 389 = 503$. O Q. S. P.

Neste methodo o calculo he penoso quando se practicaõ muitas substituiçoens, e por isso naõ se devem continuar as substituiçoens se naõ athe ao ponto de conhecer que o menor dos dous factores, que se buscaõ, naõ excede a 277; e depois deve-se buscar pelo methodo do art. 120 o maior divisor do numero proposto com cada hum dos seguintes productos.

17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43 = 435 656 388 001
47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79 = 245 945 384 599 471
83. 89. 97. 101. 103. 107. 109 = 86 937 812 295 871
113. 127. 131. 137. 139. 149. 151 = 805 474 958 639 317
157. 163. 167. 173. 179. 181 = 23 954 187 079 819
191. 193. 197. 199. 211. 223 = 67 998 181 313 017
227. 229. 233. 239. 241. 257 = 175 107 974 924 611
257. 263. 269. 271. 277 = 10 330 066 617 593

entaõ o divisor achado será hum dos factores do numero proposto; porém se o dito numero proposto for primeiro com cada hum daquelles productos, devemos affirmar que o numero proposto he primo; pois que naõ tem por divisor nenhum numero primo inferior á sua raiz quadrada (5.°).

Finalmente, pois que na operaçaõ ordinaria de buscar o maior divisor de dous numeros, o resto de huma das divisoens he o dito maior divisor; segue-se que se o resto de huma das divisoens na operaçaõ ordinaria de buscar o maior divisor do numero proposto, e de hum daquelles productos for menor que o menor numero primo factor do producto, que se contempla, podemos affirmar que o numero proposto, naõ tem por divisor nenhum dos numeros primos, que saõ factores do dito producto; e consequentemente assim que se tiver tal resto, naõ se deve continuar a operaçaõ de buscar o maior divisor do numero proposto, e do sobredito producto.

237 Muitas vezes se sabe que hum numero tem por factor hum numero impar, de que a letra *termi-*

nante (ou o algarismo da casa das unidades) he 1, 3, 7, ou 9: para se achar neste caso o cofactor, damos aqui hum methodo expedito.

Para o methodo que vamos dar, faz-se necessario conhecer em primeiro lugar a letra, que compete ao quociente, conhecendo-se as terminantes do divisor, e dividendo; para o que vamos construir huma taboada destas terminantes.

He	$0 . 3 = 0$	$2 . 3 = 6$	$4 . 3 = 12$	$6 . 3 = 18$	$8 . 3 = 24$
	$1 . 3 = 3$	$3 . 3 = 9$	$5 . 3 = 15$	$7 . 3 = 21$	$9 . 3 = 27$

logo se a terminante do divisor he 3, a terminante do quociente he 0, 1, 2, 3, etc., conforme a terminante do dividendo he 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, ou 7

He	$0 . 7 = 0$	$2 . 7 = 14$	$4 . 7 = 28$	$6 . 7 = 42$	$8 . 7 = 56$
	$1 . 7 = 7$	$3 . 7 = 21$	$5 . 7 = 35$	$7 . 7 = 49$	$9 . 7 = 63$

logo se a terminante do divisor he 7, a terminante do quociente he 0, 1, 2, etc. conforme a do dividendo he 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, ou 3.

He	$0 . 9 = 0$	$2 . 9 = 18$	$4 . 9 = 36$	$6 . 9 = 54$	$8 . 9 = 72$
	$1 . 9 = 9$	$3 . 9 = 27$	$5 . 9 = 45$	$7 . 9 = 63$	$9 . 9 = 81$

logo se a terminante do divisor he 9, a do quociente he 0, 1, 2, etc. conforme a do dividendo he 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, ou 1.

Por meio do que se acaba de observar, se fórma a seguinte taboada, na qual a primeira columna vertical compoem-se das terminantes dos divisores, que se contemplaõ aqui; a primeira columna horisontal formase das letras, que competem ao quociente: e os algarismos comprehendidos no quadrilatero *ABCD*, saõ as terminantes dos dividendos. Para se buscar nesta taboada a letra, que corresponde ao quociente attendendo ás terminantes do divisor, e do dividendo, deve-se buscar a terminante do dividendo na columna horisontal, em que se acha a terminante do divisor, e entaõ a letra da primeira columna horisontal, que se achar na columna vertical, em que existe a terminante do dividendo, he a letra, que compete ao quociente; por exemplo, sendo 7 a terminante do divisor, e 6 a terminante do dividendo, deve ser 8 a letra, que compete ao quociente.

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*B*
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
C											*D*

Agora que temos o conhecimento das terminantes, passamos a dar o expedito methodo, que he a materia deste artigo.

Segundo as terminantes do dividendo, e divisor busque-se na precedente taboada a letra, que corresponde ao quociente: esta letra he a da casa das unidades: depois multiplique-se o divisor pela letra achada, e diminua-se o producto do dividendo, e suprima-se a terminante do resto, a qual he necessariamente cifra. Sobre o resto proceda-se do mesmo módo, e entaõ se terá o algarismo da casa das dezenas do quociente; e assim por diante athe se desvanecer o dividendo.

Exemplo 1.°

$$
\begin{array}{rl}
1318464 : 327 & = 4032 \\
\underline{654} & = 327 \times 2 \\
131781 & \\
\underline{981} & = 327 \times 3 \\
13080 & \\
\underline{1308} & = 327 \times 4 \\
0000 &
\end{array}
$$

Exemplo 2.°

$$
\begin{array}{rl}
1245266 : 529 & = 2354 \\
\underline{2116} & = 529 \times 4 \\
124315 & \\
\underline{2645} & = 529 \times 5 \\
12167 & \\
\underline{1587} & = 529 \times 3 \\
1058 & = 529 \times 2
\end{array}
$$

Para se conhecer a rasaõ deste methodo, basta prestar attençaõ ás seguintes operaçoens.

$$
\begin{array}{rl}
327 & \\
\underline{4032} & \\
654 & = 327 \times 2 \\
981 & = 327 \times 3 \\
\underline{1308} & = 327 \times 4 \\
1318464 : 327 & = 4032 \\
\underline{654} & = 327 \times 2 \\
131781 & \\
\underline{981} & = 327 \times 3 \\
13080 & \\
\underline{000} & = 327 \times 0 \\
1318 & \\
\underline{1318} & = 327 \times 4 \\
0000 &
\end{array}
$$

Reflexionando sobre as precedentes operaçoens se conhece que basta contemplar no dividendo tantas letras, contadas da direita para a esquerda, quantas saõ as que competem ao quociente, e por isso as operaçoens dos dous precedentes exemplos se reduzem ás seguintes.

Operaçaõ do 1.º Exemplo.	*Operaçaõ do 2.º Exemplo.*
1318464 : 327 = 4032	1245266 : 529 = 2354
654	2116
781	315
981	645
80	67
8	87
0	8
	8
	0

Fim do primeiro Opusculo.

INDICE

DO PRIMEIRO OPUSCULO.